

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE MOHAMED KHIDER BISKRA  
FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET DES SCIENCES  
DE LA NATURE ET DE LA VIE  
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES



Thèse Présentée pour l'obtention du diplôme de

**DOCTORAT EN SCIENCES**

Spécialité : Mathématiques      Option : Mathématiques Appliquées

**Thème**

**Problèmes aux limites en piézoélectricité  
avec mémoire longue**

**Par : MESAI AOUN Mohammed Salah**

**Soutenu publiquement le: 15/07/2023**

**Devant le jury composé de:**

<b>DJABRANE Yahia</b>	Professeur à l'université de Biskra	<b>Président</b>
<b>SELMANI Mohamed</b>	Professeur à l'université de Sétif	<b>Rapporteur</b>
<b>MENACER Tidjani</b>	Professeur à l'université de Biskra	<b>Examineur</b>
<b>HADJ AMMAR Tedjani</b>	Professeur à l'université d'El-Oued	<b>Examineur</b>
<b>AZEB AHMED Abdelaziz</b>	MCA à l'université d'El-Oued	<b>Invité</b>

# Remerciements

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et mes remerciements les plus profonds à mon encadreur le professeur **Selmani Mohamed**. Je lui suis également reconnaissant pour le temps conséquent qu'il m'a accordé malgré ses nombreuses responsabilités, ses qualités humaines et scientifiques qu'il m'a apportées lors de l'encadrement de ma thèse. J'ai beaucoup appris à son côté et je lui adresse ma gratitude pour tout cela.

Je suis très honorée que Monsieur le professeur **Djabrane Yahia** a accepté de présider le jury de ma soutenance de ma thèse.

Je voudrais adresser tous mes remerciements sincèrement et appréciations aux professeurs **Menacer Tidjani** et **Hadj Ammar Tedjani** pour avoir accepté d'examiner mon travail.

Je tiens aussi à manifester toute ma gratitude envers tous les membres du conseil scientifique.

Enfin, mes remerciements aussi à toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'élaboration de cette thèse.

MESAI AOUN Mohammed Salah

# Dédicaces

À ceux qui ont fait de moi ce que je suis et qui sont toujours présents pour me soutenir à tout moment. À tout ceux qui m'ont toujours porté dans leurs cœurs.

À mon père

Monsieur "Sadok" pour ses prières.

À ma mère

pour sa tendresse et ses prières.

À ma femme et mes enfants chacun en son nom.

À toute ma famille chacun en son nom.

Tous les professeurs de l'université de Biskra et l'université d'El-Oued.

Mes amis, mes collègues et tous ceux qui m'encourageaient.

MESAI AOUN Mohammed Salah

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Notations</b>	<b>7</b>
<b>I Préliminaires</b>	<b>10</b>
<b>1 Espaces fonctionnels</b>	<b>12</b>
1.1 Rappels et compléments . . . . .	12
1.2 Espaces de Sobolev . . . . .	16
1.3 Espaces fonctionnels pour l'électro-mécanique . . . . .	17
<b>2 Éléments d'analyse non linéaire</b>	<b>21</b>
2.1 Inéquations variationnelles elliptiques . . . . .	21
2.2 Équations et inéquations variationnelles d'évolution . . . . .	25
2.3 Lemmes de Gronwall . . . . .	26
<b>3 Modélisation</b>	<b>28</b>
3.1 Cadre physique et modèles mathématiques . . . . .	28
3.2 Lois de comportement . . . . .	32
3.3 Conditions de contact . . . . .	35
3.4 Lois de frottement . . . . .	39

<b>II</b>	<b>Problèmes piézoélectriques avec mémoire longue</b>	<b>41</b>
<b>4</b>	<b>Problème électro-viscoélastique avec usure</b>	<b>43</b>
4.1	Formulation mécanique du problème . . . . .	44
4.2	Formulation variationnelle . . . . .	48
4.3	Existence et unicité de la solution . . . . .	50
4.4	Formulation variationnelle approchée . . . . .	66
4.5	Estimation d'erreur . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Problème électro-viscoélastique avec endommagement et usure</b>	<b>80</b>
5.1	Formulation mécanique du problème . . . . .	81
5.2	Formulation variationnelle . . . . .	86
5.3	Existence et unicité de la solution . . . . .	89
<b>6</b>	<b>Problème électro-élasto-viscoplastique avec une variable interne d'état et adhésion</b>	<b>113</b>
6.1	Formulation mécanique du problème . . . . .	114
6.2	Formulation variationnelle . . . . .	119
6.3	Existence et unicité de la solution . . . . .	122
<b>7</b>	<b>Problème thermo-électro-viscoélastique avec endommagement et adhésion</b>	<b>136</b>
7.1	Formulation mécanique du problème . . . . .	137
7.2	Formulation variationnelle . . . . .	144
7.3	Existence et unicité de la solution . . . . .	147
<b>Conclusion et perspectives</b>		<b>163</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>164</b>

# Introduction

Les problèmes de contact avec ou sans frottement impliquant des corps déformables sont très fréquents en industrie ainsi que dans la vie de tous les jours. Le contact du piston avec la chemise, de la roue sur la piste d'atterrissage d'un avion et d'une chaussure avec le sol ne représentent que trois exemples parmi bien d'autres. Compte tenu du fait que ces phénomènes jouent un rôle important dans les structures et les systèmes mécaniques. Accompagnés de phénomènes physiques et de surface complexes, les processus de contact sont modélisés par des problèmes aux limites non linéaires, très difficiles. La considération des différentes conditions de contact et de frottement associées à des lois de comportement de plus en plus complexes conduit à des modèles nouveaux et non standards, exprimés à l'aide des inéquations variationnelles d'évolution. Des progrès importants ont été réalisés récemment dans l'analyse variationnelle et numérique de ces modèles.

Située au carrefour de plusieurs disciplines scientifiques, la caractéristique principale de la modélisation mathématique en mécanique du contact est la fertilisation croisée entre les modèles mécaniques et les applications dans les sciences de l'ingénieur, d'une part, et l'analyse mathématique et numérique, d'autre part. Les recherches dans ce domaine sont motivées par des possibilités importantes d'applications dans différents secteurs industriels (notamment dans l'industrie métallurgique et l'industrie de l'automobile) mais aussi dans le génie civil et la médecine.

Outre les problèmes cités ci-dessus, il y a d'autres phénomènes réels et qui sont très importants tels que l'endommagement du matériau et l'adhésion des corps. L'endommagement est un phénomène très important en ingénierie, car il affecte directement la structure des machines. Il existe une littérature abondante sur ce sujet. Des modèles introduisant l'influence de l'endommagement interne du matériau ont été investis mathématiquement.

Des modèles de l'endommagement ont été développés dans [19, 20] à partir du principe de la puissance virtuelle. L'analyse mathématique des problèmes aux limites en dimension un peut être trouvée dans [21, 22]. La fonction d'endommagement varie entre 0 et 1. Quand  $\beta = 1$  il n'y a pas d'endommagement dans le matériau, quand  $\beta = 0$  le matériau est complètement endommagé, quand  $0 < \beta < 1$  l'endommagement est partiel. Les problèmes de contact quasistatiques ont été investis dans [21, 23, 24, 40]. Dans cette thèse la relation utilisée pour modéliser l'évolution du champ d'endommagement est la suivante

$$\frac{d\beta}{dt} - k\Delta\beta + \partial\Psi_K(\beta) \ni S(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \beta),$$

où  $K$  est l'ensemble des fonctions test admissibles d'endommagement,  $S$  étant la fonction source de l'endommagement.

Un autre phénomène sera considéré dans cette thèse, ce phénomène a reçu récemment une très grande attention dans la littérature mathématique. L'analyse des modèles de contact avec adhésion peut être trouvée dans [2, 3, 10, 11, 13, 16, 24, 28]. La nouveauté dans tous ces articles est l'introduction d'une variable interne de surface, le champ d'adhésion noté par  $\alpha$  décrivant l'intensité d'adhésion sur la surface de contact. Le champ d'adhésion satisfait la restriction  $0 \leq \alpha \leq 1$ , quand  $\alpha = 1$  au point de la surface de contact, l'adhésion est complète, quand  $\alpha = 0$  il n'y a pas d'adhésion. Quand  $0 < \alpha < 1$  l'adhésion est partielle. Nous renvoyons le lecteur à une bibliographie abondante sur le sujet dans [38, 41].

La condition de contact sans frottement est utilisée dans un certain nombre de références pour simplifier l'analyse de certains modèles. La loi de frottement la plus populaire utilisée dans la littérature est la loi de Coulomb, formulée pour la première fois par Amontons en 1699. Exprimée en termes d'inégalités. Diverses versions dépendantes de la loi de Coulomb ont également été largement utilisées à la fois dans la littérature technique et mathématique, comme expliqué dans [51].

Dans la science des matériaux, l'usure des surfaces désigne le phénomène de dégradation des couches superficielles d'un solide sous l'action mécanique du milieu extérieur. L'usure dans les systèmes coulissants est souvent très lente mais persistante, continue et cumulative. Les aspérités sous de fortes contraintes de contact peuvent se déformer plastiquement ou se briser. Dans le premier cas, la morphologie de surface change et, par conséquent, la contrainte de contact normale et la traction de frottement sont affectées. Celles-ci peuvent

être incorporés dans un coefficient de frottement qui dépend de l'histoire du processus de contact. Dans le second cas, lorsque les aspérités se rompent, les surfaces s'usent, les débris sont produits et la structure de surface change avec le temps. Ceci doit être pris en compte si le comportement à long terme du système doit être prédit de façon réaliste.

Pour modéliser l'usure des surfaces de contact nous introduisons une fonction d'usure, qui tient compte de la profondeur, dans la direction normale, du matériau retiré. Par conséquent, elle rend compte de la variation de la géométrie de surface et représente la quantité cumulée de matériau éliminé, par unité de surface. Cela conduit à la forme de la loi d'Archard sur l'usure superficielle. Une partie de nos travaux a été consacrée à l'étude de ce type de loi, pour un contact avec compliance normale.

Les matériaux piézoélectriques ont été découverts au début du siècle par les époux Curie. Ce sont des diélectriques particuliers qui permettent de transformer l'énergie de déformation élastique en énergie électrique, et inversement. Plus précisément, la piézoélectricité est la capacité de certains matériaux à se polariser lorsqu'ils sont contraints mécaniquement, la charge apparaissant à leur surface étant proportionnelle à la déformation engendrée. L'effet piézoélectrique inverse est l'obtention d'une déformation par application d'un champ électrique.

Les matériaux piézoélectriques sont très nombreux. Le plus connu est sans doute le quartz, toujours utilisé dans les montres pour générer des impulsions d'horloge. Mais ce sont des céramiques synthétiques, les PZT (plomb, zirconate, titanate) qui sont le plus largement utilisées aujourd'hui dans l'industrie.

De manière plus générale, l'effet direct peut être mis à profit dans la réalisation de capteurs (capteur de pression etc.) tandis que l'effet inverse permet de réaliser des actionneurs (injecteurs à commande piézoélectrique en automobile, nanomanipulateur).

L'utilisation de la piézoélectricité a explosé ces dernières années et est en pleine expansion. La capacité de ces matériaux à convertir l'énergie mécanique en énergie électrique et vice versa est une valeur inestimable pour les transducteurs acoustique, l'échographie médicale, et pour la haute précision des pompes et des moteurs. Des performances piézoélectriques élevées ont également ouvert de nouvelles possibilités de "récupération d'énergie",



en utilisant le mouvement ambiant et les vibrations pour produire de l'électricité où les piles ou autres sources d'énergie sont impraticables ou indisponibles [5, 15].

L'objet de cette thèse est l'étude de quelques problèmes aux limites de contact, avec ou sans frottement, entre un corps piézoélectrique déformable avec mémoire longue et une fondation qui peut être se déplace avec une vitesse constante (un tapis roulant, par exemple). La fondation est déformable et réactive. Nous nous plaçons dans le cadre des petites déformations et nous étudions des processus quasi-statiques et dynamiques pour des matériaux électro-viscoélastiques, électro-élasto-viscoplastiques et thermo-électro-viscoélastiques, respectivement.

Cette thèse est organisée en **deux parties** que nous allons brièvement décrire afin de faciliter sa lecture.

**La première partie** de ce travail est consacré aux résultats préliminaires dont nous avons besoin pour l'étude des problèmes de contact considérés dans la deuxième partie du manuscrit. Elle constitue la base de cette thèse et comprend trois chapitres.

Le *premier chapitre* présente les espaces fonctionnels utilisés dans l'étude des problèmes variationnels considérés. Nous y abordons de façon succincte quelques rappels sur les espaces  $C^m$ ,  $L^p$  ainsi que sur les espaces de Sobolev et leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. Pour finir ce chapitre, nous présentons les espaces fonctionnels utilisés en mécanique du contact.

Le *deuxième chapitre* porte sur des éléments d'analyse non linéaire. Dans un premier temps, nous commençons par quelques résultats sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Ensuite, nous rappelons quelques résultats sur les fonctions convexes notamment les inéquations variationnelles elliptiques dont nous nous servons par la suite de ce manuscrit. Puis, nous présentons quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle dans les espaces de Hilbert ainsi que des résultats sur les équations et les inéquations variationnelles d'évolution. Pour clôturer ce chapitre, nous rappelons les lemmes de type Gronwall utilisés dans les démonstrations d'unicité des solutions faibles et l'obtention des estimations d'erreurs.

Le *troisième et dernier chapitre* de cette partie est basé essentiellement sur la modélisation. Nous commençons par préciser le cadre physique, puis nous présentons les lois de

comportement de nature électro-viscoélastiques, électro-élasto-viscoplastiques et thermo-électro-viscoélastiques considérées dans les problèmes de contact. Enfin, nous décrivons les conditions de contact et les lois de frottement que nous employons dans les problèmes de contact envisagés.

Dans **la deuxième partie**, nous procédons à l'étude des problèmes de contact, sous diverses conditions de contact avec ou sans frottement entre un corps ( électro-viscoélastiques, électro-élasto-viscoplastiques ou thermo-électro-viscoélastiques) et un obstacle assimilé à une fondation peut être mobile. Cette partie comporte quatre chapitres qui sont structurés de la manière suivante.

Le *premier chapitre* est consacré à l'étude mathématique d'un problème de contact avec frottement pour des matériaux électro-viscoélastiques avec mémoire longue dans un processus quasi-statique. Le contact avec une base déformable et mobile est modélisé par une compliance normale et usure. La formulation faible du problème se formule comme un système formé par une inéquation variationnelle par rapport au champ de déplacement, une équation variationnelle par rapport au champ électrique et une équation différentielle du premier ordre par rapport au champ d'usure. Nous établissons un résultat d'existence et d'unicité de la solution. La démonstration est basée sur la théorie des inéquations variationnelles elliptiques et des arguments de point fixe. Pour finir ce chapitre, nous présentons une approximation numérique de ce problème de contact reposant sur une approximation à la fois en temps et en espace, en utilisant respectivement une discrétisation temporelle uniforme et une méthode de type élément finis. A l'issue de ces discrétisations, nous donnons un résultat sur l'estimation de l'erreur.

Dans *le deuxième chapitre*, nous nous proposons d'étudier un problème similaire à celui du chapitre précédent. La nouveauté réside ici dans le fait que l'endommagement du corps est pris en considération et la base de contact est électriquement conductrice. Le problème se formule par un système qui comporte une inéquation variationnelle par rapport au champ de déplacement, une inéquation variationnelle du type parabolique par rapport au champ d'endommagement, une équation variationnelle par rapport au champ électrique et une équation différentielle d'ordre un par rapport au champ d'usure. Nous terminons ce chapitre par un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible. La démonstration se déroule

en plusieurs étapes et repose notamment sur des arguments de la théorie des inéquations variationnelles elliptiques et de point fixe. Le matériel présenté dans ce chapitre fait l'objet de l'article [34].

Dans *le troisième chapitre*, nous considérons un problème de contact avec frottement, compliance normale et adhésion pour des matériaux électro-élasto-viscoplastiques avec mémoire longue et une variable interne d'état dans un processus quasi-statique. Le problème se formule par un système qui comporte une inéquation variationnelle par rapport au champ de déplacement, une équation d'évolution par rapport au champ de variable interne d'état, une équation variationnelle par rapport au champ électrique et une équation différentielle d'ordre un par rapport au champ d'adhésion. Nous établissons et démontrons un résultat d'existence et d'unicité de la solution. La démonstration est basée sur des arguments des inéquations variationnelles elliptiques et des arguments de point fixe.

Dans *le quatrième et dernier chapitre* de cette partie, nous considérons un problème de contact sans frottement avec compliance normale et adhésion pour des matériaux thermo-électro-viscoélastiques avec mémoire longue et endommagement dans un processus dynamique. Le problème se formule par un système qui comporte une équation variationnelle par rapport au champ de déplacement, une inéquation variationnelle du type parabolique par rapport au champ d'endommagement, une équation variationnelle d'évolution par rapport au champ de température, une équation variationnelle par rapport au champ électrique et une équation différentielle d'ordre un par rapport au champ d'adhésion. Nous établissons et démontrons un résultat d'existence et d'unicité de la solution. La démonstration est basée sur des arguments d'équations variationnelles, un résultat classique concernant les inéquations paraboliques et des arguments de point fixe.

Nous terminons ce manuscrit par une conclusion et quelques perspectives concernant les différents travaux effectués.

## Notations

Si  $\Omega$  est un domaine de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ), nous notons par :

$\overline{\Omega}$	l'adhérence de $\Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ .
$\Gamma$	la frontière de $\Omega$ supposée régulière.
$\Gamma_i$ ( $i = \overline{1, 3}, a, b$ )	une partie mesurable de la frontière $\Gamma$ .
$mes \Gamma_i$	la mesure de Lebesgue ( $d - 1$ ) dimensionnelle de $\Gamma_i$ .
$\boldsymbol{\nu}$	la normale unitaire sortante à $\Gamma$ .
$\nu_\nu, \boldsymbol{\nu}_\tau$	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel $\boldsymbol{\nu}$ définies sur $\overline{\Omega}$ .
$\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\overline{\Omega}$ .
$\mathcal{D}(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans $\Omega$ .
$\mathcal{D}'(\Omega)$	l'espace des distributions sur $\Omega$ .
$H$	l'espace $\{\mathbf{u} = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega)\}$ .
$\mathcal{H}$	l'espace $\{\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\}$ .
$H_1$	l'espace $\{\mathbf{u} \in H \mid \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \in \mathcal{H}\}$ .
$\mathcal{H}_1$	l'espace $\{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H} \mid Div \boldsymbol{\sigma} \in H\}$ .
$V$	l'espace $\{\mathbf{v} \in H_1 \mid \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_1\}$ .
$W$	l'espace $\{\phi \in H^1(\Omega) \mid \phi = 0 \text{ sur } \Gamma_a\}$ .
$\mathcal{W}$	l'espace $\{\mathbf{D} \in H \mid div \mathbf{D} \in L^2(\Omega)\}$ .
$E$	l'espace $\{\vartheta \in H^1(\Omega) \mid \vartheta = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2\}$ .
$\mathcal{H}_\infty$	l'espace $\{E = (E_{ijkl}) \mid E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{klij} \in L^\infty(\Omega)\}$ .
$H^1(\Omega)$	l'espace de Sobolev d'ordre 1 sur $\Omega$ .
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur $\Gamma$ .
$H_\Gamma$	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$ .
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .
$H'_\Gamma$	l'espace dual de $H_\Gamma = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$ .
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.

Si  $H$  est un espace de Hilbert réel et  $d \in \mathbb{N}^*$ , nous utilisons les notations suivantes :

$H^d$	l'espace $\{\mathbf{x} = (x_i) \mid x_i \in H, i = \overline{1, d}\}$ .
$H_s^{d \times d}$	l'espace $\{\mathbf{x} = (x_{ij}) \mid x_{ij} = x_{ji} \in H, i, j = \overline{1, d}\}$ .
$(\cdot, \cdot)_H$	le produit scalaire de $H$ .
$ \cdot _H$	la norme de $H$ .
$2^H$	l'ensemble de toutes les parties de $H$ .
$H'$	l'espace dual de $H$ .
$(\cdot, \cdot)_{H' \times H}$	le produit de dualité entre $H'$ et $H$ .
$\Psi_K$	la fonction indicatrice de $K \subset H$ .
$x_n \rightarrow x$	la convergence forte de la suite $(x_n)$ vers l'élément $x$ dans $H$ .
$x_n \rightharpoonup x$	la convergence faible de la suite $(x_n)$ vers l'élément $x$ dans $H$ .
$\mathcal{L}(H)$	l'espace des applications linéaires et continues de $H$ dans $H$ .
Si de plus $[0, T]$ un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$ , nous notons par	
$\mathcal{C}(0, T; H)$	l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ dans $H$ .
$ \cdot _{0, H}$	la norme de $\mathcal{C}(0, T; H)$ .
$\mathcal{C}^1(0, T; H)$	l'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans $H$ .
$ \cdot _{1, H}$	la norme de $\mathcal{C}^1(0, T; H)$ .
$L^p(0, T; H)$	l'espace des fonctions $u$ mesurables de $(0, T)$ dans $H$ telles que $\int_0^T  u(t) _H^p dt < +\infty$ avec les modifications usuelles si $p = +\infty$ .
$ \cdot _{0, p, H}$	la norme de $L^p(0, T; H)$ .
$W^{k, p}(0, T; H)$	l'espace de Sobolev de paramètres $k$ et $p$ .
$ \cdot _{k, p, H}$	la norme de $W^{k, p}(0, T; H)$ .
Pour une fonction $f$ , nous notons par	
$\dot{f}, \ddot{f}$	les dérivées première et seconde de $f$ par rapport au temps.
$f_{,i}$	la dérivée partielle de $f$ par rapport à la $i$ ème composante $x_i$ .
$\nabla f$	le gradient de $f$ .
$\varepsilon(f)$	la partie symétrique du gradient de $f = \frac{1}{2}(\nabla f + \nabla^T f)$ .
$Div f$	la divergence de $f$ .
$\partial f$	le sous-différentiel (classique) de $f$ .

Si  $H^1$  et  $H^2$  sont deux espaces de Hilbert réels, nous notons par

$\mathcal{L}(H^1, H^2)$  l'espace des applications linéaires et continues de  $H^1$  dans  $H^2$ .

$|\cdot|_{\mathcal{L}(H^1, H^2)}$  la norme de  $\mathcal{L}(H^1, H^2)$ .

Autres notations

$\liminf$  la limite inférieure.

$\mathbb{S}^d$  l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur  $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}_s^{d \times d}$ .

$I_d$  le tenseur identité du second ordre sur  $\mathbb{R}^d$ .

$\mathbf{0}_d$  le zéro de  $\mathbb{R}^d$  et celui de  $\mathbb{S}^d$ .

$c$  une constante générique strictement positive.

p.p presque partout.

i.e identiquement égale.

$r_+$  partie positive de  $r$ .

$\Pi_h$  opérateur d'interpolation d'élément fini.

$O(h)$  pour tout constante  $c > 0$  indépendante de  $h$  telle que  $|O(h)| \leq ch$ .

# Première partie

## Préliminaires

---

Cette partie, dans laquelle nous présentons les outils d'analyse fonctionnelle et des notations de la mécanique de contact, contient trois chapitres. Dans le premier chapitre nous faisons quelques rappels d'analyse comme, par exemple, un survol des propriétés fondamentales des espaces de Banach, de Hilbert ainsi que les espaces de type Sobolev. En outre, nous introduisons certains espaces fonctionnels pour l'électro-mécanique dont nous avons besoin dans l'étude des problèmes de contact que nous abordons dans le reste du manuscrit. Dans le deuxième chapitre, nous présentons un bref rappel portant sur les opérateurs monotones et les propriétés des fonctions convexes. Ensuite, nous passons en revue quelques résultats concernant les équations et inéquations variationnelles qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations. Dans le troisième chapitre nous nous intéressons à la modélisation des problèmes de contact. Nous y présentons les lois de comportement, les conditions de contact et les lois de frottement que nous utilisons dans la suite de ce manuscrit.



# Chapitre 1

## Espaces fonctionnels

Dans ce chapitre nous introduisons les espaces fonctionnels utilisés dans cette thèse. Partout ci-dessous  $\Omega$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ), de frontière  $\Gamma$  Lipschitzienne, c'est-à-dire que  $\Gamma$  est représentable localement comme le graphe d'une fonction Lipschitzienne sur un ouvert de  $\mathbb{R}^{d-1}$ , étant situé localement d'un seul côté de  $\Gamma$ . Par ailleurs, nous considérons deux décompositions de  $\Gamma$ ,  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$  et  $\Gamma = \Gamma_a \cup \Gamma_b$  avec  $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$  telle que  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_a$  et  $\Gamma_b$  sont mesurables, et  $mes \Gamma_1 > 0$ ,  $mes \Gamma_a > 0$ .

### 1.1 Rappels et compléments

Nous faisons quelques rappels sur les espaces de fonctions à valeurs réelles et vectorielles. Nous allons aborder les espaces de fonctions continues, continûment différentiables et les espaces  $L^p$ , qui nous permettront d'introduire les espaces spécifiques à la mécanique dans la suite. Tout d'abord, nous introduisons la notation classique

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}},$$

dans laquelle figurent le multi-index  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$  et sa longueur  $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ .

Le cadre étant bien posé, commençons tout d'abord par les espaces de fonctions continues et continûment différentiables.

**Espaces de fonctions continues et continûment différentiables.** Nous notons par  $C(\bar{\Omega})$  l'espace des fonctions continue sur  $\bar{\Omega}$ . Toute fonction de  $C(\bar{\Omega})$  est bornée.

Par ailleurs, l'espace  $C(\overline{\Omega})$  est de Banach s'il est muni de la norme

$$|v|_{C(\overline{\Omega})} = \sup \{ |v(x)|, x \in \overline{\Omega} \} \equiv \max \{ |v(x)|, x \in \overline{\Omega} \}.$$

Pour tout entier  $m$ ,  $C^m(\overline{\Omega})$  désigne l'espace des fonctions continues sur  $\overline{\Omega}$  dont les dérivées d'ordre au plus  $m$  sont également continues sur  $\overline{\Omega}$ , i.e.

$$C^m(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}), D^\alpha v \in C(\overline{\Omega}) \text{ pour } |\alpha| \leq m\}.$$

C'est également un espace de Banach muni de la norme

$$|v|_{C^m(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha v|_{C(\overline{\Omega})}.$$

Par ailleurs, nous introduisons l'espace  $C^\infty(\overline{\Omega})$  des fonctions indéfiniment différentiables

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}), v \in C^m(\overline{\Omega}) \forall m \in \mathbb{N}\}.$$

$C_0^\infty(\Omega)$  désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur l'ensemble  $\Omega$  à support inclus dans  $\Omega$ , i.e.

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\Omega), \text{supp } v \subset \Omega\},$$

où le support d'une fonction  $v$  se définit de la façon suivante

$$\text{supp } v = \overline{\{x \in \Omega, v(x) \neq 0\}}.$$

La fonction  $v$  est dite à support compact dans  $\Omega$  si son support  $\text{supp } v$  est un sous ensemble propre de l'ensemble  $\Omega$ . Il est clair que l'inclusion  $C_0^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\overline{\Omega})$  est valable.

**Les espaces  $C(0, T; X)$  et  $C^1(0, T; X)$ .** Soient  $0 < T < +\infty$  et  $(X, |\cdot|_X)$  un espace de Banach réel. Nous notons par  $C(0, T; X)$  et  $C^1(0, T; X)$  les espaces des fonctions continues et continûment dérivables sur  $[0, T]$  à valeurs dans  $X$ , respectivement, avec les normes

$$|v|_{0,X} = \max_{t \in [0, T]} |v(t)|_X,$$

$$|v|_{1,X} = \max_{t \in [0, T]} |v(t)|_X + \max_{t \in [0, T]} |\dot{v}(t)|_X.$$

Nous notons par  $C_c(0, T; X)$  l'ensemble des fonctions continues à support compact dans  $(0, T)$  à valeurs dans  $X$ .

**Définition 1.1.** Une fonction  $u : [0, T] \rightarrow X$  est dite mesurable s'il existe un sous-ensemble  $E \subset [0, T]$  de mesure nulle et une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions appartenant à  $C_c(0, T; X)$  telle que  $|u_n(t) - u(t)|_X \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , pour tout  $t \in [0, T] \setminus E$ .

**Définition 1.2.** Une fonction  $u : [0, T] \rightarrow X$  est dite fortement dérivable en  $t_0 \in (0, T)$  s'il existe un élément  $\frac{du}{dt}(t_0) \in X$  appelé la dérivée forte de  $u$  dans  $t_0$ , tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{1}{h} (u(t_0 + h) - u(t_0)) - \frac{du}{dt}(t_0) \right|_X = 0.$$

**Définition 1.3.** Une fonction  $u : [0, T] \rightarrow X$  est dite intégrable s'il existe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions appartenant à  $C_c(0, T; X)$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T |u_n(t) - u(t)|_X dt = 0.$$

**Théorème 1.4. (Bochner)** Une fonction  $u : [0, T] \rightarrow X$  mesurable est intégrable si et seulement si  $t \mapsto |u(t)|_X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  est intégrable. Dans ce cas

$$\left| \int_0^T u(t) dt \right|_X \leq \int_0^T |u(t)|_X dt.$$

**Les espaces  $L^p$ .** Soit  $p \in [1, +\infty[$ . De façon usuelle, nous désignons par  $L^p(\Omega)$  l'espace des fonctions mesurables et  $p$ -intégrables au sens de la mesure de Lebesgue définies sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telles que

$$|v|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

C'est un espace de Banach muni de la norme  $|\cdot|_{L^p(\Omega)}$ .

L'espace  $L^\infty(\Omega)$  désigne l'espace des fonctions mesurables et essentiellement bornées définies sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Muni de la norme

$$|v|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess } |v(x)| < \infty,$$

il est également de Banach.

Soit  $p \in [1, \infty[$ . Alors le conjugué de  $p$ , noté  $q$ , est défini par

$$\begin{cases} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 & \text{si } p \neq 1, \\ q = \infty & \text{si } p = 1. \end{cases}$$

Soient  $u \in L^p(\Omega)$  et  $v \in L^q(\Omega)$ . Alors, l'inégalité suivante, dite de Hölder, à lieu

$$\int_{\Omega} |u(x) v(x)| dx \leq |v|_{L^p(\Omega)} |v|_{L^q(\Omega)}.$$

L'espace  $L^2(\Omega)$  est un espace de Hilbert s'il est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

De plus, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, correspondant à l'inégalité de Hölder pour  $p = 2$ , est vérifiée, i.e.

$$\int_{\Omega} |u(x) v(x)| dx \leq |u|_{L^2(\Omega)} |v|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

**Les espaces vectoriels**  $L^p(0, T; X)$ . Classiquement, nous désignons par  $L^p(0, T; X)$  avec  $p \in [1, +\infty[$ , l'espaces des fonctions mesurables  $u : ]0, T[ \rightarrow X$  de puissance  $p$ -ième intégrables, à savoir

$$\int_0^T |u(t)|_X^p dt < \infty.$$

L'espace  $L^\infty(0, T; X)$  se définit comme l'espaces des fonctions mesurables  $u : ]0, T[ \rightarrow X$  telles que la fonction  $t \rightarrow |u(t)|_X$  est essentiellement bornée sur l'intervalle  $]0, T[$ .

Pour  $p \in [1, +\infty[$ , l'espace  $L^p(0, T; X)$  muni de la norme

$$|u|_{0,p,X} = \left( \int_0^T |u(t)|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

ainsi que l'espace  $L^\infty(0, T; X)$  muni de la norme

$$|u|_{0,\infty,X} = \inf \{c > 0 \mid |u(t)|_X < c \text{ p.p. } t \in (0, T)\},$$

sont des espaces de Banach.

Si de plus l'espace  $(X, (\cdot, \cdot)_X)$  est un espace de Hilbert, alors l'espace  $L^2(0, T; X)$  muni du produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt,$$

est également un espace de Hilbert.

## 1.2 Espaces de Sobolev

Dans cette section, nous faisons quelques rappels sur les espaces de Sobolev.

**Espaces de Sobolev**  $W^{k,p}(\Omega)$ . Soient  $k \in \mathbb{N}$  et  $p \in [1, \infty]$ . Nous définissons les espaces de Sobolev par l'égalité

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \text{ tel que } D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ avec } 0 < |\alpha| \leq k\},$$

les espaces  $W^{k,p}(\Omega)$  sont des espaces de Banach, muni de la norme

$$|u|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < +\infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

Pour  $p = 2$ ,  $W^{k,2}(\Omega)$  sera noté par  $H^k(\Omega)$ , qui est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est donné par

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx \quad \forall u, v \in H^k(\Omega).$$

Pour  $k = 1$  l'espace  $H^1(\Omega)$  est défini par

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \partial_i u \in L^2(\Omega), i = \overline{1, d}\}.$$

Nous notons par  $\nabla u$  le vecteur de composante  $\partial_i u$ . Nous avons  $\nabla u \in L^2(\Omega)^d$  pour tout  $u \in H^1(\Omega)$ . Nous savons que  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2(\Omega)},$$

et la norme associée

$$|u|_{H^1(\Omega)} = (u, u)_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}}.$$

Par ailleurs, nous avons les résultats suivants :

- $C^1(\overline{\Omega})$  est dense dans  $H^1(\Omega)$ ,
- $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  avec injection compacte (Théorème de Rellich),
- il existe une application linéaire et continue  $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$  telle que  $\gamma u = u|_{\Gamma}$  pour tout  $u \in C^1(\overline{\Omega})$  (Théorème de trace de Sobolev).

**Remarque 1.5.** L'application  $\gamma$  s'appelle application de trace ; elle est définie comme le prolongement par densité de l'application  $u \rightarrow u|_{\Gamma}$  définie pour  $u \in C^1(\bar{\Omega})$ . Nous notons que l'application de trace  $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$  est un opérateur compact. L'application de trace n'est pas surjective. L'image de  $H^1(\Omega)$  par cette application est notée  $H^{1/2}(\Gamma)$  ; c'est un sous-espace de  $L^2(\Gamma)$  qui est de Hilbert pour la structure transportée par  $\gamma$ . Son dual sera noté  $H^{-1/2}(\Gamma)$ .

Pour plus de détails voir [24, 51].

**Espaces vectoriels de Sobolev**  $W^{k,p}(0, T; X)$ . Nous utilisons la notation classique

$$W^{k,p}(0, T; X) = \left\{ u \in L^p(0, T; X) \mid u^{(i)} \in L^p(0, T; X) \text{ et } |u^{(i)}|_{0,p,X} < \infty, \forall i \leq k \right\},$$

afin de désigner les espaces vectoriels de Sobolev pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $p \in [1, +\infty]$ ,  $u^{(i)}$  étant la dérivée d'ordre  $i$  de  $u$ . L'espace  $W^{k,p}(0, T; X)$  est un espace de Banach muni de la norme

$$|v|_{k,p,X} = |v|_{0,p,X} + \sum_{0 < i \leq k} |v^{(i)}|_{0,p,X}.$$

Dans le cas particulier où  $p = 2$ , si  $(X, (\cdot, \cdot)_X)$  est un espace de Hilbert, l'espace  $H^k(0, T; X) = W^{k,2}(0, T; X)$  est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^k(0,T;X)} = \sum_{0 \leq i \leq k} \int_0^T (u^{(i)}(t), v^{(i)}(t))_X dt.$$

Pour plus de détails sur les espaces de Sobolev nous pouvons référer à [1, 9, 15, 37].

## 1.3 Espaces fonctionnels pour l'électro-mécanique

L'analyse variationnelle des problèmes d'électro-mécanique nécessite l'introduction d'espaces de fonctions spécifiques. Nous introduisons dans cette section les espaces fonctionnels en mécanique associés aux opérateurs divergence et déformation.

Nous définissons les espaces suivants :

$$\begin{cases} H = \{ \mathbf{u} = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega) \}, \\ \mathcal{H} = \{ \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega) \}, \\ H_1 = \{ \mathbf{u} = (u_i) \mid \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \in \mathcal{H} \}, \\ \mathcal{H}_1 = \{ \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H} \mid \text{Div} \boldsymbol{\sigma} \in H \}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Les espaces  $H$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $H_1$  et  $\mathcal{H}_1$  sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires donnés, respectivement, par

$$\begin{cases} (\mathbf{u}, \mathbf{v})_H = \int_{\Omega} u_i v_i dx, \\ (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx, \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H_1} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_H + (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}}, \\ (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\mathcal{H}_1} = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\mathcal{H}} + (\text{Div} \boldsymbol{\sigma}, \text{Div} \boldsymbol{\tau})_H, \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $\boldsymbol{\varepsilon} : H_1 \rightarrow \mathcal{H}$ ,  $\text{Div} : \mathcal{H}_1 \rightarrow H$  sont les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{Div} \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij,j}).$$

Les normes sur les espaces  $H$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $H_1$  et  $\mathcal{H}_1$  sont notées par  $|\cdot|_H$ ,  $|\cdot|_{\mathcal{H}}$ ,  $|\cdot|_{H_1}$  et  $|\cdot|_{\mathcal{H}_1}$ , respectivement.

Puisque la frontière  $\Gamma$  est Lipschitzienne, le vecteur normal extérieur  $\boldsymbol{\nu}$  à la frontière est défini presque partout. Pour tout champ de vecteur  $\mathbf{v} \in H_1$  nous utilisons la notation  $\boldsymbol{\nu}$  pour désigner  $\gamma \mathbf{v}$  la trace de  $\mathbf{v}$  sur  $\Gamma$ .

Nous rappelons que l'application de trace  $\gamma : H_1 \rightarrow L^2(\Gamma)^d$  est linéaire et continue, mais n'est pas surjective. L'image de  $H_1$  par cette application est notée par  $H_{\Gamma} = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$ , ce sous-espace s'injecte continûment dans  $L^2(\Gamma)^d$ .

Par ailleurs, si  $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$  est suffisamment régulier, nous rappelons la formule de Green :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx + \int_{\Omega} \text{Div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} dx = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da \quad \forall \mathbf{v} \in H_1. \quad (1.3)$$

Nous introduisons à présent un sous-espace fermé de  $H_1$ , dont la définition est donnée ci-après

$$V = \{\mathbf{v} \in H_1 \mid \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_1\}. \quad (1.4)$$

Puisque  $mes \Gamma_1 > 0$ , l'inégalité de Korn s'applique sur  $V$ , il existe une constante  $c_K > 0$  dépendante uniquement de  $\Omega$  et  $\Gamma_1$  telle que

$$|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})|_{\mathcal{H}} \geq c_K |\mathbf{v}|_{H_1} \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (1.5)$$

Une preuve de cette inégalité peut être trouvée dans [37].

Sur  $V$ , nous considérons le produit scalaire donné par

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad (1.6)$$

et soit  $|\cdot|_V$  la norme associée; c'est-à-dire

$$|\mathbf{v}|_V = |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})|_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (1.7)$$

Par l'inégalité (1.5) de Korn et (1.7), il vient que  $|\cdot|_{H_1}$  et  $|\cdot|_V$  sont des normes équivalentes sur  $V$  et ainsi  $(V, (\cdot, \cdot)_V)$  est un espace de Hilbert.

En outre, d'après (1.5), (1.7) et le théorème de trace de Sobolev, trouvons qu'il existe une constante  $c_0 > 0$  dépendante uniquement de  $\Omega$ ,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$  telle que

$$|\mathbf{v}|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 |\mathbf{v}|_V \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (1.8)$$

Ensuite, nous introduisons concernant au champ électrique les espaces suivants :

$$W = \{ \phi \in H^1(\Omega) \mid \phi = 0 \text{ sur } \Gamma_a \}, \quad (1.9)$$

$$\mathcal{W} = \{ \mathbf{D} = (D_i) \mid D_i \in L^2(\Omega), \operatorname{div} \mathbf{D} \in L^2(\Omega) \}, \quad (1.10)$$

où  $\operatorname{div} \mathbf{D} = (D_{i,i})$ . Puisque  $\operatorname{mes} \Gamma_a > 0$ , l'inégalité de Friedrichs-Poincaré est vérifiée ainsi il existe une constante  $c_F > 0$  dépendante uniquement de  $\Omega$  et  $\Gamma_a$  telle que

$$|\nabla \phi|_H \geq c_F |\phi|_{H^1(\Omega)} \quad \forall \phi \in W. \quad (1.11)$$

Une démonstration de l'inégalité de Friedrichs-Poincaré peut être trouvée dans [36].

Les espaces  $W$  et  $\mathcal{W}$  sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires donnés par

$$(\varphi, \phi)_W = (\nabla \varphi, \nabla \phi)_H, \quad (\mathbf{D}, \mathbf{E})_{\mathcal{W}} = (\mathbf{D}, \mathbf{E})_H + (\operatorname{div} \mathbf{D}, \operatorname{div} \mathbf{E})_{L^2(\Omega)}, \quad (1.12)$$

soient  $|\cdot|_W$  et  $|\cdot|_{\mathcal{W}}$  les normes associées; c'est-à-dire

$$|\phi|_W = |\nabla \phi|_H, \quad |\mathbf{D}|_{\mathcal{W}}^2 = |\mathbf{D}|_H^2 + |\operatorname{div} \mathbf{D}|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (1.13)$$

En outre, d'après (1.11), (1.13) et le théorème de trace de Sobolev, trouvons qu'il existe une constante  $\tilde{c}_0 > 0$  dépendante uniquement de  $\Omega$ ,  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_3$  telle que

$$|\phi|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{c}_0 |\phi|_W \quad \forall \phi \in W. \quad (1.14)$$

En plus, si  $\mathbf{D} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  est suffisamment régulier, nous rappelons aussi la formule de Green ci-dessous :

$$\int_{\Omega} \mathbf{D} \cdot \nabla \phi dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{D} \phi dx = \int_{\Gamma} \mathbf{D} \boldsymbol{\nu} \phi da \quad \forall \phi \in H^1(\Omega). \quad (1.15)$$



Enfin, nous définissons l'espace suivant :

$$\mathcal{H}_\infty = \{\mathbf{E} = (E_{ijkl}) \mid E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{klij} \in L^\infty(\Omega) \ 1 \leq i, j, k, l \leq d\}, \quad (1.16)$$

notons que  $\mathcal{H}_\infty$  est un espace de Banach réel muni de la norme

$$|\mathbf{E}|_{\mathcal{H}_\infty} = \sum_{1 \leq i, j, k, l \leq d} |E_{ijkl}|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (1.17)$$

Par ailleurs, un calcul élémentaire montre que

$$|\mathbf{E}\boldsymbol{\tau}|_{\mathcal{H}} \leq |\mathbf{E}|_{\mathcal{H}_\infty} |\boldsymbol{\tau}|_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{E} \in \mathcal{H}_\infty, \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{H}. \quad (1.18)$$

Pour des détails sur les résultats de cette section nous renvoyons par exemple aux références [44, 47].

# Chapitre 2

## Éléments d'analyse non linéaire

Dans ce chapitre, nous présentons quelques éléments d'analyse fonctionnelle. Nous introduisons également quelques résultats concernant les inéquations variationnelles elliptiques, équations et inéquations variationnelles d'évolution qui interviennent dans l'étude des problèmes considérés par la suite. Pour finir, nous rappelons les lemmes de Gronwall qui seront utilisés plus tard.

### 2.1 Inéquations variationnelles elliptiques

Dans cette section, nous commençons par un bref rappel sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Pour ce faire, nous considérons un espace de Hilbert  $X$  munit du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_X$  et de la norme associée  $|\cdot|_X$ .

**Définition 2.1.** *Un opérateur  $A : X \rightarrow X$  est dit :*

(1) *monotone si*

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X;$$

(2) *strictement monotone si*

$$(Au - Av, u - v)_X > 0 \quad \forall u, v \in X, u \neq v;$$

(3) *fortement monotone s'il existe  $m > 0$  tel que*

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m |u - v|_X^2 \quad \forall u, v \in X;$$

(4) de Lipschitz s'il existe  $M > 0$  tel que

$$|Au - Av|_X \leq M |u - v|_X \quad \forall u, v \in X;$$

(5) hémicontinu si pour toute suite  $(t_n) \subset \mathbb{R}$  telle que  $t_n \rightarrow t$ , nous avons

$$(A(u + t_n v), w)_X \rightarrow (A(u + tv), w)_X \quad \forall u, v, w \in X.$$

En utilisant la définition précédente, il est facile de démontrer le résultat suivant.

**Proposition 2.2.** *Tout opérateur de Lipschitz est hémicontinu.*

**Théorème 2.3. (Théorème du point fixe)** *Soient  $X$  un espace de Banach et  $A : X \rightarrow X$  un opérateur de Lipschitz avec  $0 < M < 1$ . L'opérateur  $A$  admet un point fixe unique  $x \in X$ , c'est-à-dire  $Ax = x$  et nous appelons  $A$  un opérateur contractant.*

Par ailleurs, nous rappelons le résultat d'existence et d'unicité suivant.

**Proposition 2.4.** *Soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors pour tout  $f \in X$  il existe un élément unique  $u \in X$  tel que  $Au = f$ .*

Le résultat précédent est un cas particulier du théorème de Minty-Browder (voir par exemple [9] p.88).

**Définition 2.5.** *Soit  $A : X \rightarrow X'$  un opérateur défini sur  $X$ . L'opérateur  $A$  est dit :*

(1) monotone si

$$(Au - Av, u - v)_{X' \times X} \geq 0 \quad \forall u, v \in X;$$

(2) hémicontinu si

$$\forall u, v \in X \quad \text{l'application } t \rightarrow A(u + tv) : \mathbb{R} \rightarrow X' \text{ est continue.}$$

Nous continuons avec quelques définitions portant les formes bilinéaires définies dans un espace de Hilbert.

**Définition 2.6.** *Une forme bilinéaire  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  est continue s'il existe un réel  $M > 0$  tel que*

$$|a(u, v)| \leq M |u|_X |v|_X \quad \forall u, v \in X.$$

**Définition 2.7.** *Une forme bilinéaire  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  est dite coercive s'il existe une constante  $m > 0$  telle que*

$$a(u, u) \geq m |u|_X^2 \quad \forall u \in X.$$

**Théorème 2.8. (Théorème de Lax-Milgram).** Soient  $X$  un espace de Hilbert et  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire symétrique, continue et coercive. Soit  $l : X \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire continue. Alors, il existe une solution unique  $u \in X$  qui satisfait

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in X.$$

Rappelons à présent une notion relative aux fonctions convexes.

**Définition 2.9.** Soit  $K$  une partie convexe de  $X$  et soit  $j : K \rightarrow \mathbb{R}$ . Nous disons que la fonction  $f$  est convexe si

$$j((1-t)u + tv) \leq (1-t)j(u) + tj(v)$$

pour tout  $u, v \in K$  et  $t \in ]0, 1[$ .

**Définition 2.10.** La fonction  $j : K \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  est propre si elle n'a pas identiquement égale à  $+\infty$ , et si elle ne prend jamais la valeur  $-\infty$ .

**Définition 2.11.** Soit  $K$  une partie, convexe, fermé, non vide de  $X$ . Soit  $j : K \rightarrow \mathbb{R}$ .  $j$  est dit

(1) semi-continue inférieurement si pour tout  $u \in K$  et pour toute suite  $(u_n) \subset K$  qui converge vers  $u$  dans  $X$ , nous avons  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} j(u_n) \geq j(u)$ .

(2) faiblement semi-continue inférieurement si pour tout  $u \in K$  et pour toute suite  $(u_n) \subset K$  qui converge faiblement vers  $u$  dans  $X$ , nous avons  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} j(u_n) \geq j(u)$ .

Il est possible de lier la notion de fonction semi-continue inférieurement et la notion de fonction faiblement semi-continue inférieurement. Plus précisément, nous avons le résultat suivant.

**Proposition 2.12.** Soient  $(X, |\cdot|_X)$  un espace de Banach,  $K$  une partie, convexe, fermé, non vide de  $X$  et  $j : K \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe. Alors  $j$  est semi-continue inférieurement si et seulement si elle est faiblement semi-continue inférieurement.

Nous pouvons appliquer ce qui précède aux fonctions indicatrices de sous-ensembles. Si l'espace  $X$  désigne un espace de Hilbert et  $K$  un sous-ensemble de l'espace  $X$ .

**Définition 2.13.** Nous appelons fonction indicatrice de  $K$ , la fonction  $\Psi_K$  définie par

$$\Psi_K(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in K, \\ +\infty & \text{si } u \notin K. \end{cases}$$

**Définition 2.14.** Soit une fonction  $j : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $u$  un élément de l'espace  $X$  tel que  $j(u) \neq \pm\infty$ . Le sous-différentiel de la fonction  $j$  en  $u$ , noté  $\partial j(u)$  est l'ensemble défini par

$$\partial j(u) = \{u' \in X' \mid j(v) \geq j(u) + (u', v - u) \quad \forall v \in X\}.$$

Le crochet  $(\cdot, \cdot)$  désignant la dualité entre  $X'$  et  $X$ .

Tout élément  $u'$  de l'ensemble  $\partial j(u)$  est appelé sous-gradient de la fonction  $j$  en  $u$ . La fonction  $j$  est dite sous-différentiable en  $u$  si  $\partial j(u) \neq \emptyset$ . Elle est dite sous-différentiable si elle l'est en tout point  $u$  de l'espace  $X$ .

Soit  $K$  un sous-ensemble convexe non vide de l'espace  $X$ . Considérons la fonction indicatrice  $\Psi_K$  de l'ensemble  $K$ . Nous avons de suite que si  $u \notin K$  alors  $\partial \Psi_K(u) = \emptyset$ . Supposons alors que  $u \in K$ . Il vient que si  $u' \in \partial \Psi_K(u)$  alors  $(u', v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K$ .

Nous pouvons ainsi caractériser le sous-différentiel  $\partial \Psi_K$  d'une fonction indicatrice  $\Psi_K$  d'un ensemble convexe non vide

$$\partial \Psi_K(u) = \{u' \in X' \mid (u', v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K\}. \quad (2.1)$$

Nous allons rappeler maintenant un résultat d'existence et d'unicité de la solution des inéquations variationnelles. Soient  $A : X \rightarrow X$  un opérateur,  $K \subset X$  et  $f \in X$ . Plusieurs problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles en mécanique des milieux continus conduisent à des problèmes mathématiques ayant la forme suivante :

**Problème.** Trouver  $u$  tel que

$$u \in X, \quad (Au, v - u)_X + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X,$$

où  $j : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ .

Ce problème est appelé *inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce* sur  $X$ .

En ce qui concerne le problème précédent nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant.

**Théorème 2.15.** Soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur fortement monotone et de Lipschitz et  $j : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une fonctionnelle propre, convexe et semi-continue inférieurement. Alors l'inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce admet une solution unique.

## 2.2 Équations et inéquations variationnelles d'évolution

Nous rappelons dans cette section deux résultats sur les équations d'évolution et un résultat sur les inéquations variationnelles d'évolution.

### Équation différentielle ordinaire

**Théorème 2.16. (Cauchy-Lipschitz)** *Soit  $(X, |\cdot|_X)$  un espace de Banach réel et soit  $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$  un opérateur défini p.p. sur  $(0, T)$ , qui satisfait les propriétés suivantes :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ |F(t, x_1) - F(t, x_2)|_X \leq L_F |x_1 - x_2|_X \quad \forall x_1, x_2 \in X, \text{ p.p. } t \in (0, T); \end{array} \right.$$

$$\text{il existe } 1 \leq p < +\infty \text{ tel que } F(\cdot, x) \in L^p(0, T; X) \quad \forall x \in X.$$

Alors pour tout  $x_0 \in X$ , il existe une fonction unique  $x \in W^{1,p}(0, T; X)$  telle que

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)) \quad \text{p.p. } t \in (0, T),$$

$$x(0) = x_0.$$

Maintenant nous considérons  $V$  et  $H$  deux espaces de Hilbert réels tels que l'application d'inclusion de  $(V, |\cdot|_V)$  dans  $(H, |\cdot|_H)$  est continue et dense. Identifiant le dual de  $H$  avec lui-même, c'est-à-dire nous pouvons écrire le triplet de Gelfand  $V \subset H \subset V'$ . Les notations  $|\cdot|_V$ ,  $|\cdot|_{V'}$  et  $(\cdot, \cdot)_{V' \times V}$  représentent les normes sur  $V$ ,  $V'$  et le produit de dualité entre  $V'$  et  $V$ , respectivement.

### Équation aux dérivées partielles d'évolution

**Théorème 2.17.** *Soient  $V$  et  $H$  deux espaces satisfaisant les hypothèses décrites ci-dessus et soit  $A : V \rightarrow V'$  un opérateur hémicontinu et monotone qui satisfait*

$$\text{il existe } \lambda > 0 \text{ et } \alpha \in \mathbb{R} \quad (Av, v)_{V' \times V} \geq \lambda |v|_V^2 + \alpha \quad \forall v \in V,$$

$$\exists c > 0, \quad |Av|_{V'} \leq c(|v|_V + 1) \quad \forall v \in V.$$

Alors, pour tout  $u_0 \in H$  et  $f \in L^2(0, T; V')$ , il existe une fonction unique  $u$  qui satisfait

$$u \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \quad \dot{u} \in L^2(0, T; V'),$$

$$\dot{u}(t) + Au(t) = f(t) \text{ p.p. } t \in (0, T),$$

$$u(0) = u_0$$

### Inéquation variationnelle d'évolution

**Théorème 2.18.** *Soient  $V \subset H \subset V'$  un triplet de Gelfand,  $K$  un sous-ensemble fermé non vide et convexe de  $V$ , et  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire symétrique et continue qui satisfait*

$$\text{il existe } c_1 > 0 \text{ et } c_0 \text{ } a(v, v) + c_0 |v|_H^2 \geq c_1 |v|_V^2 \quad \forall v \in V.$$

*Alors, pour tout  $u_0 \in K$  et  $f \in L^2(0, T; H)$ , il existe une unique fonction  $u$  qui satisfait*

$$u \in L^2(0, T; V) \cap H^1(0, T; H),$$

$$u(t) \in K \quad \forall t \in [0, T],$$

$$\begin{aligned} & (\dot{u}(t), v - u(t))_{V' \times V} + a(u(t), v - u(t)) \\ & \geq (f(t), v - u(t))_H \quad \forall v \in K, \text{ p.p. } t \in (0, T), \end{aligned}$$

$$u(0) = u_0.$$

Pour les démonstrations de ces trois théorèmes nous pouvons regarder dans [51].

## 2.3 Lemmes de Gronwall

Nous rappelons ici les lemmes de Gronwall qui interviennent par la suite dans ce manuscrit.

**Lemme 2.19.** *Soient  $m$  et  $n \in C(0, T; \mathbb{R})$  telles que  $m(t) \geq 0$  et  $n(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $a \geq 0$  une constante et  $\phi \in C(0, T; \mathbb{R})$*

(1) *Si*

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s) ds + \int_0^t n(s) \phi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

*alors*

$$\phi(t) \leq \left( a + \int_0^t m(s) ds \right) \exp \left( \int_0^t n(s) ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

(2) *Si*

$$\phi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \phi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \phi(s) ds \leq e^{at} \int_0^t m(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Dans le cas particulier  $a = 0$ ,  $n = 1$ , la partie (1) de ce Lemme devient.

**Corollaire 2.20.** *Soit  $m \in C(0, T; \mathbb{R})$  telle que  $m(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [0, T]$ . Si  $\phi \in C(0, T; \mathbb{R})$  est une fonction telle que*

$$\phi(t) \leq \int_0^t m(s) ds + \int_0^t \phi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors, il existe  $c > 0$  tel que

$$\phi(t) \leq c \int_0^t m(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

**Lemme 2.21.** *Soient  $T > 0$ , donné, et  $N > 0$ , un entier. Nous définissons  $k = \frac{T}{N}$ . Supposons que  $\{e_n\}_{n=0}^N$  et  $\{g_n\}_{n=0}^N$  sont deux suites de nombres non négatifs satisfaisant*

$$e_0 \leq \bar{c}g_0 \text{ et } e_n \leq \bar{c}g_n + \bar{c} \sum_{j=0}^{n-1} ke_j, \quad n = 1, \dots, N,$$

avec,  $\bar{c}$  est une constante positive indépendante de  $N$  et  $k$ . Alors, si  $k$  est suffisamment petit, il existe une constante positive  $c$ , indépendante de  $N$  et  $k$ , telle que

$$\max_{0 \leq n \leq N} e_n \leq c \max_{0 \leq n \leq N} g_n$$

Les démonstrations des Lemmes 2.19 et 2.21 peuvent être trouvées dans [26, 58].



# Chapitre 3

## Modélisation

Dans ce chapitre, nous introduisons dans un premier temps le cadre physique des problèmes de contact ainsi qu'un bref rappel sur la mécanique des milieux continus, nous rappellons notamment ici l'équation de mouvement de Cauchy et l'équation de la conservation de la charge. Ensuite, nous décrivons les lois de comportement (lois électro-visoélastiques, électro-élasto-visoplastiques et thermo-électro-visoélastiques avec mémoire longue). Finalement, nous présentons les différentes conditions aux limites de contact et les lois de frottement qui seront utilisées dans les chapitres suivants.

### 3.1 Cadre physique et modèles mathématiques

Dans cette section, nous allons introduire le cadre physique et les modèles mathématiques qui servira de base pour l'étude des problèmes de contact entre un corps piézoélectrique déformable avec mémoire longue et avec ou sans variable interne d'état, et une fondation peut être mobile.

**Cadre physique.** Nous considérons un corps matériel déformable qui occupe un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ), avec une frontière Lipschitzienne  $\Gamma$ , partitionnée en trois parties mesurables  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$ , correspondant aux conditions aux limites mécaniques, telle que  $mes \Gamma_1 > 0$ . Le corps peut entrer en contact sur  $\Gamma_3$  avec une fondation déformable. Si la fondation est isolée électriquement, nous proposons de diviser  $\Gamma$  en deux parties mesurables  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_b$  avec  $\Gamma_3 \subset \Gamma_b$ , sinon, nous la partitionnons en trois parties mesurables  $\Gamma_a$ ,  $\Gamma_b$  et  $\Gamma_3$ ,

correspondant aux conditions aux limites électriques, telle que  $mes \Gamma_a > 0$ . Nous notons par  $\nu$  la normale unitaire sortante à  $\Gamma$ . Soit  $T > 0$  et soit  $[0, T]$  l'intervalle de temps en question. Le corps est encastré sur  $\Gamma_1$  dans une structure fixe. Sur  $\Gamma_2$  agissent des tractions surfaciques de densité  $f_2$  et dans  $\Omega$  agissent des forces volumiques de densité  $f_0$  et des charges électriques de densité volumiques  $q_0$ . Nous supposons que  $f_2$  et  $f_0$  varient très lentement par rapport au temps. Le corps est soumis à l'action de potentiel nul sur la partie  $\Gamma_a$  de la frontière ainsi qu'à l'action des charges électriques de densité surfacique  $q_2$ , agissent sur la partie  $\Gamma_b$ . Nous supposons que la fondation se déplace avec une vitesse constante ( un tapis roulant par exemple )  $\mathbf{v}^* = -v^* \mathbf{n}^*$  et  $v^* > 0$  est donnée et  $\mathbf{n}^*$  est un vecteur unitaire dans le plan de la fondation,  $g$  représente l'écart initial entre le corps et la fondation dans le sens de  $\nu$ .

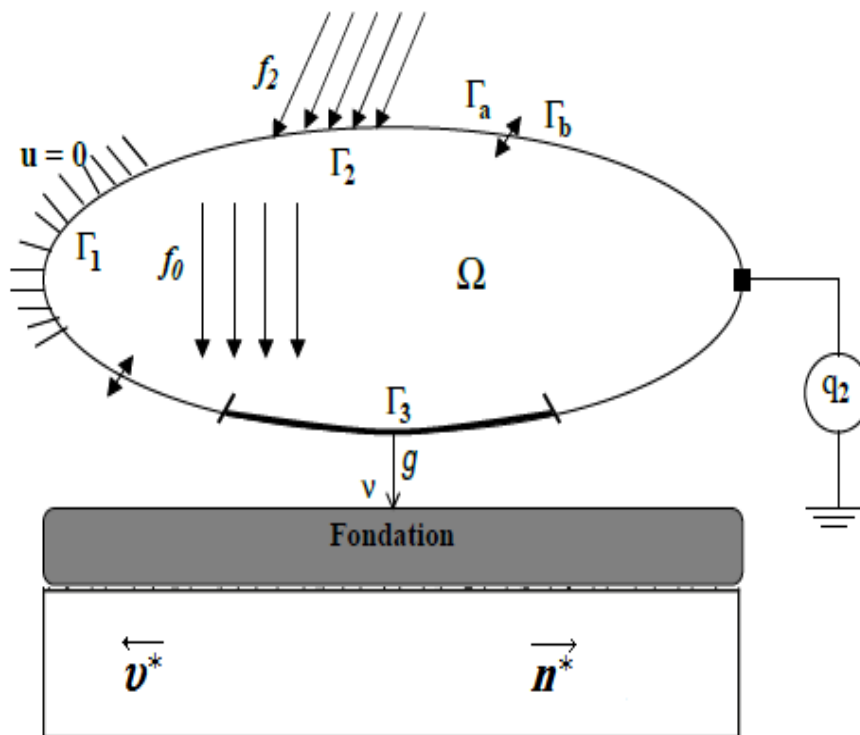


FIG 3.1.1 Corps piézoélectrique en contact avec une isolatrice

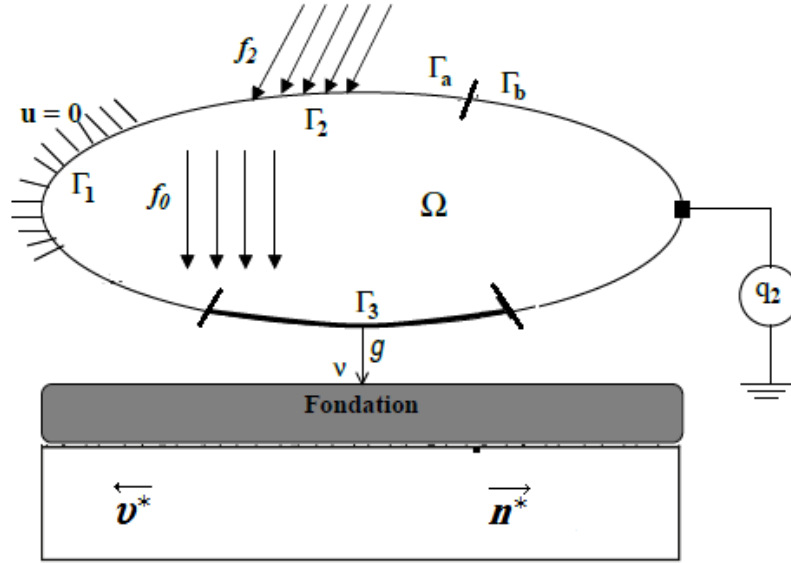


FIG 3.1.2 Corps piézoélectrique en contact avec une conductrice

**Notations.** Nous désignons par  $\mathbb{S}^d$  l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ), “.”,  $|\cdot|$  représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathbb{S}^d$ . Ainsi,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v_i, \quad |\mathbf{v}| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d,$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} = \sigma_{ij} \tau_{ij}, \quad |\boldsymbol{\tau}| = (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau})^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^d,$$

avec la convention de l'indice muet.

Nous notons par  $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  le champ des déplacements,  $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$  le champ des contraintes,  $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  le champ de potentiel électrique,  $\mathbf{D} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  le champ des déplacements électriques,  $\beta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  le champ d'endommagement,  $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  le champ de température,  $\zeta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction d'usure,  $\mathbf{k} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  le champ de variable interne d'état et  $\alpha : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  le champ d'adhésion.  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  et  $\mathbf{E}(\varphi)$  sont le champ des déformations linéarisées et le champ électrique, respectivement.

Pour le champ des déplacements  $\mathbf{u}$ , nous désignons par  $u_\nu$  et  $\mathbf{u}_\tau$  les composantes normale et tangentielle

$$u_\nu = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{u}_\tau = \mathbf{u} - u_\nu \boldsymbol{\nu}. \quad (3.1)$$

Nous définissons de façon similaire,  $\sigma_\nu$  et  $\sigma_\tau$  les composantes normale et tangentielle du tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma\nu$

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu)_\nu, \quad \sigma_\tau = (\sigma\nu)_\tau,$$

donc

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu) \cdot \nu, \quad \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu \nu.$$

En utilisant (3.1) et les égalités précédentes, nous avons la relation

$$(\sigma\nu) \cdot \mathbf{u} = \sigma_\nu u_\nu + \sigma_\tau \cdot \mathbf{u}_\tau,$$

qui va intervenir tout au long de cette thèse pour établir les formulations variationnelles des problèmes mécaniques.

Dans ce manuscrit, pour désigner les dérivées partielles  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  d'une fonction  $u$ , nous adoptons la notation  $u_{,i}$ . La dérivée temporelle de  $u$  sera notée  $\dot{u}$ .

En outre,  $\dot{\mathbf{u}}$  désigne le champ des vitesses et  $\ddot{\mathbf{u}}$  désigne le champ des accélérations.

Dans cette thèse, le champ électrique est donné par

$$\mathbf{E}(\varphi) = -\nabla\varphi,$$

soit encore

$$\mathbf{E}(\varphi) = (E_i(\varphi)), \quad E_i(\varphi) = -\varphi_{,i}, \quad 1 \leq i \leq d.$$

Nous passons maintenant à la description des modèles mathématiques associés au cadre physique ci-dessus.

**Modèles mathématiques.** Nous commençons avec les modèles mathématiques qui décrivent l'évolution du corps dans le cadre physique ci-dessus. La loi fondamentale de la mécanique des milieux continus exprimant l'équivalence entre des efforts extérieurs et le tenseur des accélérations pour un système quelconque conduit à l'équation de mouvement de Cauchy

$$Div\sigma + \mathbf{f}_0 = \rho\ddot{\mathbf{u}} \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.2)$$

où  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  désigne la densité de masse. Les processus d'évolution définis par (3.2) s'appellent processus dynamiques. Dans certaines situations, cette équation peut encore se simplifier. Par exemple, dans le cas où  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ , il s'agit d'un processus statique. Dans le cas

où le champ des vitesses varie lentement par rapport au temps, c'est-à-dire que le terme  $\rho\ddot{\mathbf{u}}$  peut être négligé, nous sommes en présence d'un processus quasistatique. Dans ces deux cas l'équation (3.2) devient

$$\text{Div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega \times (0, T).$$

Dans le cas d'un matériau piézoélectrique, nous avons une nouvelle inconnue, le champ électrique  $\mathbf{E}$ , d'où la nécessité d'introduire une autre équation d'équilibre pour la gérer. C'est l'équation de Maxwell-Gauss ou équation de conservation de la charge

$$\text{div}\mathbf{D} = q_0 \text{ dans } \Omega \times (0, T). \quad (3.3)$$

Les équations (3.2) et (3.3) sont équivalentes à  $d + 1$  relations scalaires. Par conséquent, mathématiquement ces équations ne suffisent pas à modéliser le problème d'équilibre du corps car il y a plus d'inconnues que d'équations. Les équations (3.2) et (3.3) expriment un processus universel valable pour tous les matériaux piézoélectriques et de ce fait elles ne suffisent pas à déterminer tous les différents comportements électro-mécaniques des milieux continus. Par conséquent, les équations sont donc insuffisantes, à elles seules, pour décrire l'équilibre des corps matériels piézoélectriques. Elles doivent alors être complétées par d'autres relations qui caractérisent le comportement de chaque type de matériau et que les nous désignons sous le vocable général de loi de comportement.

## 3.2 Lois de comportement

Dans cette section, nous considérons les lois de comportement pour les matériaux électro-viscoélastiques, électro-élasto-viscoplastiques ou thermo-électro-viscoélastiques avec mémoire longue et avec ou sans variable interne d'état. Ces lois sont utilisées dans de nombreux ouvrages portant notamment sur l'étude mathématique des problèmes de contact.

**Matériaux électro-viscoélastiques avec mémoire longue.** Nous considérons ici une catégorie de matériaux où le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  et le vecteur des déplacements électriques  $\mathbf{D}$  sont reliés par la loi de comportement

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \int_0^t \mathcal{M}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))ds - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi), \\ \mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \mathbf{B}\mathbf{E}(\varphi), \end{cases} \quad (3.4)$$

où  $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  est l'opérateur de viscosité non linéaire,  $\mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  est l'opérateur d'élasticité non linéaire,  $\mathcal{M} = (M_{ijkl})$  est le tenseur de relaxation.  $\mathbf{E}(\varphi) = -\nabla\varphi$  est le champ électrique,  $\mathcal{E} = (e_{ijk})$  est le tenseur piézoélectrique qui traduit la proportionnalité entre la charge et la déformation à champ constant ou nul et  $\mathbf{B} = (B_{ij})$  est le tenseur diélectrique à déformation nulle qui constitue un tenseur symétrique défini positif. Par ailleurs  $\mathcal{E}^* = (e_{ijk}^*)$  où  $e_{ijk}^* = e_{kij}$ , dénote le transposé du tenseur  $\mathcal{E}$  tel que

$$\mathcal{E}\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{v} = \boldsymbol{\sigma}.\mathcal{E}^*\mathbf{v} \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}^d, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d.$$

Par ailleurs, nous notons que les deux opérateurs  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{F}$  dépendent aussi de la variable spatiale  $\mathbf{x}$ , mais pour simplicité, nous ne signalons pas explicitement cette dépendance, par conséquent, tout ce qui suit est valable pour les matériaux non-homogènes. Nous utilisons respectivement les notations  $\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}})$  et  $\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  pour  $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}))$  et  $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))$ . En particulier, nous supposons que le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  est une fonction linéaire du tenseur des petites déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et du gradient du potentiel électrique ou le champ électrique  $\mathbf{E}$ , c'est-à-dire

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\dot{u}) + f_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u) + e_{ijk}^*\varphi_{,k},$$

où  $\mathcal{A} = (a_{ijkl})$  est un tenseur d'ordre quatre, ses composantes  $a_{ijkl}$  s'appellent coefficients de viscosité et  $\mathcal{F} = (f_{ijkl})$  est un tenseur d'ordre quatre, ses composantes  $f_{ijkl}$  s'appellent coefficients d'élasticité et  $\mathcal{E} = (e_{ijk})$  est le tenseur des constantes piézoélectriques. Dans le cas non-homogène  $a_{ijkl}$ ,  $f_{ijkl}$  et  $e_{ijk}$  dépendent du point  $\mathbf{x} \in \Omega$  et dans le cas homogène  $a_{ijkl}$ ,  $f_{ijkl}$  et  $e_{ijk}$  sont des constantes.

### Matériaux électro-viscoélastiques avec mémoire longue et endommagement.

Dans ce cas la loi de comportement est donnée par

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \beta) + \int_0^t \mathcal{M}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) ds - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi), \\ \mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \mathbf{B}\mathbf{E}(\varphi). \end{cases} \quad (3.5)$$

L'évolution du champ d'endommagement  $\beta$  utilisée aux cinquième et septième chapitres est modélisée par l'inclusion du type parabolique donnée par la relation

$$\dot{\beta} - k \Delta \beta + \partial\Psi_K(\beta) \ni S(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \beta), \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

où  $k$  est une constante positive,  $S$  est la fonction source de l'endommagement,  $\partial\Psi_K$  est le sous-différentiel de la fonction indicatrice  $\Psi_K$  et  $K$  est l'ensemble des endommagements

admissibles défini par

$$K = \{ \xi \in H^1(\Omega) \mid 0 \leq \xi \leq 1 \text{ p.p. dans } \Omega \}.$$

**Matériaux électro-élasto-viscoplastiques avec mémoire longue et variable interne d'état.** Dans ce cas le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  et le vecteur des déplacements électriques  $\mathbf{D}$  sont reliés par la loi de comportement suivante

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi) \\ \quad + \int_0^t \mathcal{G}(t-s, \boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(s)) + \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \mathbf{k}(s)) ds \\ \mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \mathbf{B}\mathbf{E}(\varphi), \end{cases} \quad (3.6)$$

où  $\mathcal{G} : \Omega \times (0, T) \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  est un opérateur non linéaire de visco-plasticité à mémoire longue et  $\mathbf{k} : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$  est une variable interne d'état à valeur vectorielle dont l'évolution est régie par l'équation différentielle

$$\dot{\mathbf{k}} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma} - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \mathbf{k})$$

où  $\mathbf{S} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  est une fonction constitutive non linéaire.

**Matériaux thermo-électro-viscoélastiques avec mémoire longue et endommagement.** Un matériaux est dit thermo-électro-viscoélastiques avec mémoire longue et endommagement si sa loi de construction est de la forme

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \beta) + \int_0^t \mathcal{M}(t-s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) ds - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi) - \theta \mathbf{C}_e, \\ \mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \mathbf{B}\mathbf{E}(\varphi) + \theta \mathbf{P}, \end{cases} \quad (3.7)$$

où  $\mathbf{C}_e = (c_{ij})$  est le tenseur de dilatation thermique et  $\mathbf{P} : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$  est le tenseur de matériau pyroélectrique dans un milieu piézoélectrique continuellement non homogène. L'évolution du champ de température  $\theta$  utilisée au septième chapitre est modélisée par l'équation de la conservation de l'énergie suivante

$$\dot{\theta} - k_c \Delta \theta = \Theta(\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}), \theta \mathbf{C}_e) + p, \text{ dans } \Omega \times (0, T),$$

où  $k_c > 0$  représente le coefficient de conductivité thermique,  $\Theta$  est une fonction constitutive non linéaire qui représente la chaleur générée par le travail des forces internes et  $p : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  est la densité des sources de chaleur volumiques.

Pour plus de détails sur ce paragraphe, nous renvoyons par exemple à [4, 37, 40, 52, 53, 56].

Nous passons maintenant aux conditions de contact utilisées dans les chapitres suivants.

### 3.3 Conditions de contact

Dans cette section, nous introduisons les conditions de contact utilisées dans les problèmes aux limites que nous allons considérer dans la thèse. Nous nous plaçons dans le cadre physique ci-dessus. Nous définissons maintenant les conditions aux limites mécaniques et électriques sur chaque partie de  $\Gamma$ .

**La condition aux limites de déplacement.** Le corps est encastré dans une position fixe sur la partie  $\Gamma_1$ , le champ des déplacements  $\mathbf{y}$  est par conséquent nul

$$\mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T). \quad (3.8)$$

**La condition aux limites de traction.** Une traction surfacique de densité  $\mathbf{f}_2$  agit sur  $\Gamma_2$  et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}$  satisfait

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T). \quad (3.9)$$

**Contact avec compliance normale et adhésion.** Tout d'abord, nous introduisons une variable interne d'état  $\alpha$  définie sur  $\Gamma_3 \times (0, T)$  qui représente l'intensité d'adhésion sur la surface de contact, telle que  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Quand  $\alpha = 1$  l'adhésion est complète et tous les liens sont actifs, quand  $\alpha = 0$  tous les liens sont désactivés et il n'y a pas d'adhésion ; quand  $0 < \alpha < 1$  c'est le cas d'une adhésion partielle. Pour plus détails sur ce paragraphe, nous renvoyons par exemple [16, 17].

Nous supposons que la contrainte normale satisfait la condition de compliance normale avec adhésion

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g) - \gamma_\nu \alpha^2 R_\nu(u_\nu) \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.10)$$

où  $\gamma_\nu$  est un coefficient positif,  $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est la fonction de compliance normale et  $R_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est l'opérateur de troncature donné par

$$R_\nu(s) = \begin{cases} L & \text{si } s < -L, \\ -s & \text{si } -L \leq s \leq 0, \\ L & \text{si } s > 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

ici  $L > 0$  est la longueur caractéristique des liens.



Nous supposons que la contrainte tangentielle satisfait la condition suivante

$$-\boldsymbol{\sigma}_\tau = p_\tau(\alpha)\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau) \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.12)$$

où  $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est la fonction de contact tangentiel et  $\mathbf{R}_\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  est un opérateur de troncature défini par

$$\mathbf{R}_\tau(\mathbf{v}) = \begin{cases} \mathbf{v} & \text{si } |\mathbf{v}| \leq L, \\ L \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} & \text{si } |\mathbf{v}| > L. \end{cases} \quad (3.13)$$

La diversité des matériaux a conduit les chercheurs à utiliser le collage des composites comme étant un moyen universel d'assemblage de matériaux de natures différentes. Pour modéliser les phénomènes d'adhésion, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact.

L'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle de la forme

$$\dot{\alpha} = -(\alpha [\gamma_\nu (R_\nu(u_\nu))^2 + \gamma_\tau |\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)|^2] - \varepsilon_a)_+ \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.14)$$

$$\alpha(0) = \alpha_0 \text{ sur } \Gamma_3, \quad (3.15)$$

où  $\gamma_\tau$  et  $\varepsilon_a$  sont des coefficients d'adhésion positifs et  $\alpha_0$  l'adhésion initial tel que

$$0 \leq \alpha_0 \leq 1, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \quad (3.16)$$

**Remarque 3.1.** *Nous remarquons que sous les trois conditions précédentes le champ d'adhésion vérifie la restriction  $0 \leq \alpha \leq 1$ . En effet, puisque  $\dot{\alpha} \leq 0$  donc  $\alpha \leq \alpha_0 \leq 1$ . En outre, si  $\alpha = 0$  quand  $t = t_0$  donc  $\dot{\alpha} = 0$  pour tout  $t \geq t_0$ , et d'où  $\alpha = 0$  pour tout  $t \geq t_0$ , p.p.  $\mathbf{x} \in \Gamma_3$ . Alors, nous concluons que  $0 \leq \alpha \leq 1$  pour tout  $t \in [0, T]$  p.p.  $\mathbf{x} \in \Gamma_3$ .*

**Les conditions aux limites électriques.** Nous supposons que le potentiel électrique est nul sur la partie  $\Gamma_a$

$$\varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_a \times (0, T). \quad (3.17)$$

Les charges électriques de densité surfacique  $q_2$ , agissent sur la partie  $\Gamma_b$  et supposons que la fondation est électriquement isolatrice avec ( $\Gamma_3 \subset \Gamma_b$ ). Aors, le déplacement électrique normal satisfait

$$\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = q_2 \text{ sur } \Gamma_b \times (0, T), \quad (3.18)$$

et

$$q_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (3.19)$$

Nous allons utiliser ces conditions dans les chapitres 4 et 7 du manuscrit.

Nous nous plaçons maintenant dans le cadre physique de la FIG 3.1.2, nous supposons dans la suite que la fondation est électriquement conductrice et que son potentiel est maintenu à  $\varphi_0$ . La condition électrique sur  $\Gamma_3$  que nous allons utiliser dans le sixième chapitre du manuscrit est donnée par

$$\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = \psi(u_\nu - g) \phi_L(\varphi - \varphi_0) \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (3.20)$$

où  $\psi$  et  $\phi_L$  sont des fonctions données qui seront décrites ultérieurement. Cette condition représente une condition régularisée qui peut être obtenue à partir des considérations suivantes.

Lorsqu'il n'y a pas de contact en un point sur la surface ( i.e.  $u_\nu < g$  ), l'interstice entre le corps et la base est supposé être isolant (disons qu'il est rempli d'air) et la composante normale du champ de déplacement électrique s'annule pour qu'il n'y ait aucune charge électrique libre sur la surface. Ainsi,

$$u_\nu < g \Rightarrow \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0. \quad (3.21)$$

Pendant le processus de contact, ( i.e. quand  $u_\nu \geq g$  ) la composante normale du champ de déplacement électrique ou la charge électrique libre est supposé être proportionnelle à la différence entre le potentiel de surface du corps et le potentiel de la fondation, avec une constante positive  $k$  comme facteur de proportionnalité. Ainsi,

$$u_\nu \geq g \Rightarrow \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = k(\varphi - \varphi_0). \quad (3.22)$$

Nous combinons (3.21) et (3.22) pour écrire

$$\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = k \chi_{[0, \infty)}(u_\nu - g) (\varphi - \varphi_0) \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (3.23)$$

où  $\chi_{[0, \infty)}$  est la fonction caractéristique de l'intervalle  $[0, \infty)$ , qui est donnée par

$$\chi_{[0, \infty)}(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0, \\ 1 & \text{si } r \geq 0. \end{cases}$$

La condition (3.23) décrit le contact électrique parfait et elle est en quelque sorte semblable à la condition bien connue de contact de Signorini. Les deux conditions peuvent être considérées comme des sur-idéalisations dans plusieurs applications. Pour le rendre plus réaliste, nous régularisons la relation (3.23) par (3.20) dans laquelle  $k\chi_{[0,\infty)}(u_\nu - g)$  est remplacé par  $\psi$  qui est une fonction régulière qui sera décrite ci-dessous, et  $\phi_L$  est une fonction de troncation,

$$\phi_L(s) = \begin{cases} -L & \text{si } s < -L, \\ s & \text{si } -L \leq s \leq L, \\ L & \text{si } s > L, \end{cases} \quad (3.24)$$

où  $L$  est une constante positive très grande. De cette façon, la différence  $\varphi - \varphi_0$  est remplacé par  $\phi_L(\varphi - \varphi_0)$ . Notons que cette troncation ne pose aucune limitation pratique à l'applicabilité du modèle, puisque  $L$  peut être arbitrairement grand et donc dans les applications  $\phi_L(\varphi - \varphi_0) = \varphi - \varphi_0$ .

Les raisons de la régularisation (3.20) de (3.23) sont mathématiques.

Premièrement, nous avons besoin d'éviter les discontinuités dans les charges électriques lorsque le contact est établi, et d'où, nous régularisons la fonction  $k\chi_{[0,\infty)}$  dans (3.23) par une fonction Lipschitzienne  $\psi$ . Un choix possible est l'exemple suivant :

$$\psi(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0, \\ k\delta r & \text{si } 0 \leq r \leq \frac{1}{\delta}, \\ k & \text{si } r > \frac{1}{\delta}, \end{cases} \quad (3.25)$$

où  $\delta$  est un paramètre assez grand. Ce choix veut dire que durant le processus du contact, la conductivité électrique augmente avec le contact à travers les aspérités de la surface, et se stabilise quand la pénétration  $u_\nu - g$  atteint la valeur  $\frac{1}{\delta}$ .

Deuxièmement, nous avons besoin du terme  $\phi_L(\varphi - \varphi_0)$  pour rendre le terme  $\varphi - \varphi_0$  borné.

Dans le cinquième chapitre de cette thèse notre processus implique l'usure des surfaces en contact, nous devons prendre en compte le changement de géométrie en remplaçant la fonction d'écart initial  $g$  par  $g + \zeta$  au cours du processus, ainsi, (3.20) devient

$$\mathbf{D}\cdot\nu = \psi(u_\nu - g - \zeta)\phi_L(\varphi - \varphi_0) \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (3.26)$$

Maintenant, nous présentons les lois de frottement intervenant dans cette thèse.

### 3.4 Lois de frottement

Dans cette section nous allons introduire les lois de frottement qui seront utilisées par la suite dans ce manuscrit. Ces lois sont représentées par des relations entre la composante tangentielle du champ de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ , la composante normale du champ de contraintes  $\sigma_\nu$  et la vitesse tangentielle  $\dot{\mathbf{u}}_\tau$  ou le déplacement tangentiel  $\mathbf{u}_\tau$ .

**Contact avec une fondation mobile.** Dans le cas où la fondation se déplace avec une vitesse  $\mathbf{v}^*$ , la loi de frottement de type Coulomb s'écrit de la manière suivante :

$$|\boldsymbol{\sigma}_\tau| \leq F_b, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = -F_b \frac{(\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*)}{|\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*|} \text{ si } \dot{\mathbf{u}}_\tau \neq \mathbf{v}^*, \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (3.27)$$

Ici  $F_b$  représente le seuil de frottement,  $\dot{\mathbf{u}}_\tau$  est la vitesse tangentielle et  $\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*$  représente le taux de glissement entre la surface de contact et la fondation.

Par la suite nous supposons que le seuil de frottement  $F_b$  dépend de la composante normale du champ de contraintes  $\sigma_\nu$ . Cette hypothèse est naturelle car, par exemple, dans le cas de la loi classique de Coulomb, nous avons

$$F_b = \mu |\sigma_\nu|, \quad (3.28)$$

où  $\mu \geq 0$  représente le coefficient de frottement et  $\sigma_\nu$  dépend de  $\mathbf{u}$  via la loi de comportement.

La loi (3.27) – (3.28) sera utilisée dans le chapitre 5 du manuscrit.

Une autre forme de loi de frottement de type Coulomb telle que

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = -\lambda (\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*), \quad \lambda \geq 0, \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (3.29)$$

Cette forme sera utilisée dans le chapitre 4 du manuscrit.

**Loi de frottement avec usure.** Dans la littérature, la prise en compte de ce phénomène se fait à l'aide d'une variable de surface, la fonction d'usure notée  $\zeta$ . La condition de contact avec frottement et usure se formule de la façon suivante :

$$|\boldsymbol{\sigma}_\tau| = p_\tau (u_\nu - g - \zeta), \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (3.30)$$

Cette égalité sera utilisée dans le chapitre 4 du manuscrit.

En supposant maintenant que la contrainte normale satisfait une loi de compliance normale avec usure

$$-\sigma_\nu = p_\nu (u_\nu - g - \zeta), \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (3.31)$$

Cette condition nous l'utiliserons dans les chapitres 4 et 5 du manuscrit.

**Loi de frottement avec adhésion.** Une version générale associée à la loi de Coulomb de sèche frottement avec adhésion sur la surface de contact  $\Gamma_3$  s'écrit de la façon suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} |\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \alpha^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)| \leq p_\tau(u_\nu - g) \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \alpha^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)| < p_\tau(u_\nu - g) \Rightarrow \dot{\mathbf{u}}_\tau = 0 \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \alpha^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)| = p_\tau(u_\nu - g) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \\ \text{telle que } \boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \alpha^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau) = -\lambda \dot{\mathbf{u}}_\tau \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (3.32)$$

Cette condition nous l'utiliserons dans le sixième chapitre.

**Loi d'Archard.** L'évolution de la fonction d'usure avec une fondation mobile est décrite dans la littérature par la loi d'Archard suivante :

$$\dot{\zeta} = -k_1 \mu \sigma_\nu |\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*|, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.33)$$

où  $k_1 > 0$  est le coefficient d'usure et  $\mu = \mu(\zeta, |\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*|) \geq 0$  est le coefficient de frottement.

Maintenant, pour éviter quelques difficultés mathématiques qui surviennent lorsque le taux de glissement est très grand, nous remplaçons le terme  $|\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*|$  dans (3.33) par le terme  $R^*(|\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*|)$  où  $R^* : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est un opérateur de troncature défini par

$$R^*(r) = \begin{cases} r & \text{si } r \leq R, \\ R & \text{si } r > R. \end{cases} \quad (3.34)$$

Ici  $R$  est une constante positive. Dans ce cas la forme de la loi (3.33) devient

$$\dot{\zeta} = -k_1 \mu \sigma_\nu R^*(|\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*|), \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.35)$$

Nous allons utiliser cette loi dans le chapitre 5 du manuscrit.

En supposant maintenant que la vitesse de la fondation  $\mathbf{v}^*$  est très grand par rapport à la vitesse tangentielle  $\dot{\mathbf{u}}_\tau$  et, pour cette raison, nous négligeons  $\dot{\mathbf{u}}_\tau$  par rapport à  $\mathbf{v}^*$ . Par conséquent, en utilisant les approximations  $\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^* \approx -\mathbf{v}^* \neq 0$  et  $|\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*| \approx |\mathbf{v}^*| = v^*$ .

Si  $R$  est assez grand et  $\mu$  désigne une constante strictement positive, l'équation (3.35) devient

$$\dot{\zeta} = -k_0 v^* \sigma_\nu, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.36)$$

où  $k_0 > 0$  est le coefficient d'usure.

Cette équation sera utilisée dans le chapitre 4 du manuscrit.

## Deuxième partie

# Problèmes piézoélectriques avec mémoire longue

---

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'étude de quelques problèmes piézoélectriques de contact en petites déformations. Cette partie est divisée en quatre chapitres. Dans le premier chapitre, nous étudions un problème de contact électro-viscoélastique avec mémoire longue dans un processus quasi-statique avec compliance normale, usure et frottement de type de Coulomb. Pour ce problème, nous donnons la formulation forte du problème ainsi que les hypothèses sur les données afin d'obtenir la formulation variationnelle du problème. Ensuite, nous fournissons un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible sous une hypothèse de petitesse. Puis, nous démontrons ce résultat d'existence et d'unicité de la solution faible du problème. L'analyse du problème se termine par l'obtention d'estimation d'erreur de discrétisation spatiale et temporelle. Dans le chapitre suivant, nous considérons un problème similaire au celui du chapitre précédent, en tenant compte de l'endommagement du corps et de la base de contact comme une conductrice. Tout d'abord, nous donnons la formulation forte puis la formulation variationnelle du problème. Pour finir ce chapitre, nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution faible du problème. Dans le troisième chapitre, nous considérons un problème de contact avec frottement, compliance normale et adhésion pour des matériaux électro-élasto-viscoplastiques avec mémoire longue et une variable interne d'état dans un processus quasi-statique. Pour ce problème, nous donnons la formulation forte puis la formulation variationnelle. À la fin de ce chapitre, nous établissons et démontrons un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible. Dans le quatrième chapitre, nous traitons un problème dynamique de contact sans frottement avec compliance normale et adhésion entre un corps thermo-électro-viscoélastique avec mémoire longue et endommagement, et une fondation isolatrice. Après avoir posé le problème mécanique, nous décrivons sa formulation variationnelle. Puis, nous établissons et démontrons un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible du problème.

# Chapitre 4

## Problème électro-viscoélastique avec usure

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude théorique et numérique d'un problème quasi-statique de contact avec frottement entre un corps de loi constitutive électro-viscoélastique avec mémoire longue et un obstacle assimilé à une fondation déformable, mobile et électriquement isolatrice. Nous prenons en considération l'usure des surfaces de contact. La fonction d'usure, satisfaisant la loi d'Archard. Le problème est formulé par un système d'équations aux dérivées partielles contenant la loi de comportement du matériau, les équations d'équilibre du corps, une équation différentielle modélisant le champ d'usure et les conditions aux limites auxquelles il est soumis.

Ce chapitre comporte quatre sections. Dans la première section, nous commençons par formuler le problème mécanique et nous précisons les hypothèses adéquates sur les données afin d'obtenir la formulation variationnelle. Puis, dans la deuxième section, nous énonçons la formulation variationnelle du problème mécanique. Ensuite, dans la troisième section, nous énonçons et démontrons notre résultat principal d'existence et d'unicité de la solution faible. Les techniques employées sont basées sur les résultats des inéquations variationnelles et la théorie des opérateurs monotones, suivi par les arguments du point fixe. Enfin, dans la quatrième section, nous allons considérer une approximation numérique du problème variationnelle, basée sur une discrétisation temporelle et spatiale. Pour ces schémas discrétisés nous allons obtenir un résultat de l'estimation de l'erreur.



## 4.1 Formulation mécanique du problème

Nous nous plaçons dans le cadre physique de la FIG 3.1.1. Nous considérons que le corps est électro-viscoélastique, plus exactement, nous utilisons une loi de comportement de la forme (3.4). En ce qui concerne le contact, nous modélisons par une compliance normale avec frottement et usure.

Sous ces considérations, le problème mécanique que nous étudions est le suivant.

**Problème P1.** *Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ , le champ de potentiel électrique  $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , le champ des déplacements électriques  $\mathbf{D} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  et la fonction d'usure  $\zeta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , tels que*

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \int_0^t \mathcal{M}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))ds + \mathcal{E}^*\nabla\varphi \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (4.1)$$

$$\mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathbf{B}\nabla\varphi \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (4.2)$$

$$\text{Div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (4.3)$$

$$\text{div}\mathbf{D} = q_0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (4.4)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (4.5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} -\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g - \zeta), & |\boldsymbol{\sigma}_\tau| = p_\tau(u_\nu - g - \zeta), \\ \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\lambda(\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*), & \lambda \geq 0, \\ \dot{\zeta} = -k_0 v^* \sigma_\nu, \end{cases} \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (4.7)$$

$$\varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_a \times (0, T), \quad (4.8)$$

$$\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\nu} = q_2 \text{ sur } \Gamma_b \times (0, T), \quad (4.9)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \zeta(0) = 0 \text{ dans } \Omega. \quad (4.10)$$

Ici et ci-dessous, afin de simplifier la notation, nous ne signalons pas explicitement la dépendance des différentes fonctions de la variable spatiale  $\mathbf{x}$ . Nous décrivons maintenant les équations et les conditions aux limites du problème P1.

Les équations (4.1) et (4.2) représentent la loi de comportement électro-viscoélastique avec mémoire longue, les équations (4.3) et (4.4) représentent les équations d'équilibre,

tandis que les conditions (4.5) et (4.6) sont respectivement les conditions de déplacement-traction. La relation (4.7) représente les conditions de frottement avec compliance normale et usure. Les conditions (4.8) et (4.9) représentent les conditions aux limites électriques. Pour finir, (4.10) est les conditions initiales.

Pour l'étude du problème mécanique (4.1) – (4.10), nous introduisons les espaces de Hilbert  $H$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $H_1$  et  $\mathcal{H}_1$  donnés par (1.1) munis des produits scalaires donnés par (1.2). Tout au long de ce chapitre, nous avons besoins de l'espaces  $V$ ,  $W$  et  $\mathcal{W}$  définis par (1.4) et (1.9) – (1.10) munis des produits scalaires donnés par (1.6) et (1.12), respectivement.

Nous considérons maintenant les hypothèses suivantes : L'opérateur de viscosité  $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)| \leq L_{\mathcal{A}} |\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2| \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad (\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m_{\mathcal{A}} |\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2|^2 \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ est Lebesgue} \\ \quad \text{mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \text{ appartient à } \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (4.11)$$

L'opérateur d'élasticité  $\mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)| \leq L_{\mathcal{F}} |\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2| \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ est Lebesgue} \\ \quad \text{mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \text{ appartient à } \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Le tenseur diélectrique  $\mathbf{B} = (b_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{E} = (b_{ij}(\mathbf{x})E_j) \\ \quad \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) } b_{ij} = b_{ji}, b_{ij} \in L^\infty(\Omega). \\ \text{(c) Il existe } m_B > 0 \text{ telle que} \\ \quad \mathbf{B}\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \geq m_B |\mathbf{E}|^2 \\ \quad \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right. \quad (4.13)$$

Le tenseur piézoélectrique  $\mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{E}(\mathbf{x})\boldsymbol{\tau} = (e_{ijk}(\mathbf{x})\tau_{jk}) \\ \quad \forall \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) } e_{ijk} = e_{ikj} \in L^\infty(\Omega). \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Les fonctions de compliance  $p_r : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  ( $r = \nu, \tau$ ) satisfont

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_r > 0 \text{ telle que} \\ \quad |p_r(\mathbf{x}, \alpha_1) - p_r(\mathbf{x}, \alpha_2)| \leq L_r |\alpha_1 - \alpha_2| \\ \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(b) Il existe } m_r > 0 \text{ telle que} \\ \quad |p_r(\mathbf{x}, \alpha)| \leq m_r \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \rightarrow p_r(\mathbf{x}, \alpha) \text{ est Lebesgue} \\ \quad \text{mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R}. \\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \rightarrow p_r(\mathbf{x}, 0) \text{ appartient à } L^2(\Gamma_3). \end{array} \right. \quad (4.15)$$

Le tenseur de relaxation  $\mathcal{M}$  satisfait

$$\mathcal{M} \in C^1(0, T; \mathcal{H}_\infty). \quad (4.16)$$

Les forces volumiques  $\mathbf{f}_0$  et les tractions surfaciques  $\mathbf{f}_2$  ont la régularité

$$\mathbf{f}_0 \in C(0, T; H), \quad \mathbf{f}_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_2)^d), \quad (4.17)$$

De même, la densité de charge volumique  $q_0$  et surfacique  $q_2$  satisfont

$$q_0 \in C(0, T; L^2(\Omega)), \quad q_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_b)). \quad (4.18)$$

$$q_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_3 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.19)$$

La fonction d'écart initial entre le corps et la fondation  $g$  vérifie

$$g \in L^2(\Gamma_3), \quad g \geq 0 \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \quad (4.20)$$

Finalement, le champ initial des déplacements  $\mathbf{u}_0$  satisfait

$$\mathbf{u}_0 \in V. \quad (4.21)$$

Nous énonçons maintenant quelques définitions que nous utilisons dans la suite de ce chapitre.

D'abord, nous définissons la fonction  $\mathbf{f} : [0, T] \rightarrow V$  par

$$(\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0(t) \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot \mathbf{v} da, \quad (4.22)$$

Ensuite, la fonction  $q : [0, T] \rightarrow W$  par

$$(q(t), \phi)_W = \int_{\Omega} q_0(t) \phi dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t) \phi da. \quad (4.23)$$

Les conditions (4.17) et (4.18) impliquent

$$\mathbf{f} \in C(0, T; V), \quad q \in C(0, T; W). \quad (4.24)$$

Enfin, nous définissons la fonctionnelle  $j : V \times V \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\begin{aligned} j(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \zeta) &= \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - g - \zeta) v_\nu da \\ &+ \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu - g - \zeta) |\mathbf{v}_\tau - \mathbf{v}^*| da, \end{aligned} \quad (4.25)$$

pour tout  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  et  $\zeta \in L^2(\Gamma_3)$ .

La fonctionnelle  $j : V \times V \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } \mathbf{u} \in V \text{ et } \zeta \in L^2(\Gamma_3), \mathbf{v} \rightarrow j(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \zeta) \text{ est propre,} \\ \text{convexe et semicontinue-inférieurement sur } V. \end{array} \right. \quad (4.26)$$

## 4.2 Formulation variationnelle

Dans cette section, nous nous intéressons à la formulation variationnelle du Problème P1. Nous supposons dans ce qui suit que  $\mathbf{u}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfaisant (4.1), (4.3), (4.6) et (4.7). Soit  $\mathbf{v} \in V$ . Nous utilisons la formule de Green (1.3) et l'équation de mouvement (4.3), afin d'écrire

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) dx + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) da,$$

Nous divisons l'intégrale de surface  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  et en utilisant la définition de l'espace  $V$  avec (4.6) et (4.22), nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) dx &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) da \\ &= (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}})_V + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) da. \end{aligned}$$

Sur  $\Gamma_3$ , nous avons

$$\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) = \sigma_{\nu} (v - \dot{u})_{\nu} + \boldsymbol{\sigma}_{\tau} \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}})_{\tau}.$$

De (4.7), nous avons

$$\sigma_{\nu} (v - \dot{u})_{\nu} = -p_{\nu} (u_{\nu} - g - \zeta) v_{\nu} + p_{\nu} (u_{\nu} - g - \zeta) \dot{u}_{\nu},$$

en outre, nous avons

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{\tau} \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}})_{\tau} &= \boldsymbol{\sigma}_{\tau} \cdot (\mathbf{v}_{\tau} - \mathbf{v}^* + \mathbf{v}^* - \dot{\mathbf{u}}_{\tau}) \\ &= \boldsymbol{\sigma}_{\tau} \cdot (\mathbf{v}_{\tau} - \mathbf{v}^*) + \boldsymbol{\sigma}_{\tau} \cdot (\mathbf{v}^* - \dot{\mathbf{u}}_{\tau}). \end{aligned}$$

Il est clair que

$$\boldsymbol{\sigma}_{\tau} \cdot (\mathbf{v}_{\tau} - \mathbf{v}^*) \geq -|\boldsymbol{\sigma}_{\tau}| |\mathbf{v}_{\tau} - \mathbf{v}^*|,$$

et de (4.7), nous avons

$$|\boldsymbol{\sigma}_{\tau}| = p_{\tau} (u_{\nu} - g - \zeta),$$

et d'où

$$\boldsymbol{\sigma}_{\tau} \cdot (\mathbf{v}_{\tau} - \mathbf{v}^*) \geq -p_{\tau} (u_{\nu} - g - \zeta) |\mathbf{v}_{\tau} - \mathbf{v}^*|.$$

D'autre part, de (4.7) nous constatons que  $\boldsymbol{\sigma}_\tau$  et  $\mathbf{v}^* - \dot{\mathbf{u}}_\tau$  ont la même direction, donc, nous écrivons

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\mathbf{v}^* - \dot{\mathbf{u}}_\tau) &= |\boldsymbol{\sigma}_\tau| |\mathbf{v}^* - \dot{\mathbf{u}}_\tau| \\ &= p_\tau (u_\nu - g - \zeta) |\mathbf{v}^* - \dot{\mathbf{u}}_\tau|.\end{aligned}$$

Maintenant, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) &\geq -p_\nu (u_\nu - g - \zeta) v_\nu + p_\nu (u_\nu - g - \zeta) \dot{u}_\nu \\ &\quad - p_\tau (u_\nu - g - \zeta) |\mathbf{v}_\tau - \mathbf{v}^*| + p_\tau (u_\nu - g - \zeta) |\mathbf{v}^* - \dot{\mathbf{u}}_\tau| \\ &= [p_\nu (u_\nu - g - \zeta) \dot{u}_\nu + p_\tau (u_\nu - g - \zeta) |\mathbf{v}^* - \dot{\mathbf{u}}_\tau|] \\ &\quad - [p_\nu (u_\nu - g - \zeta) v_\nu + p_\tau (u_\nu - g - \zeta) |\mathbf{v}_\tau - \mathbf{v}^*|].\end{aligned}$$

De tout ce qui précède, en utilisant (4.25), nous obtenons

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \zeta) - j(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \zeta) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}})_V. \quad (4.27)$$

En outre, soient  $\varphi$  et  $\mathbf{D}$  des fonctions suffisamment régulières qui satisfaisant (4.2), (4.4) et (4.9). Soit  $\phi \in W$ . Nous employons la formule de Green (1.15), nous avons

$$\int_{\Omega} \mathbf{D} \cdot \nabla \phi dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{D} \phi dx = \int_{\Gamma} \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} \phi da,$$

Nous divisons l'intégrale de surface  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_b$ , en utilisant (4.4) et la définition de  $W$ , nous trouvons

$$\int_{\Omega} \mathbf{D} \cdot \nabla \phi dx + \int_{\Omega} q_0 \phi dx = \int_{\Gamma_b} \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} \phi da,$$

d'après (4.9), nous avons

$$\int_{\Gamma_b} \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} \phi da = \int_{\Gamma_b} q_2 \phi da \quad \forall \phi \in W.$$

Nous combinons les deux égalités précédentes avec (4.23) afin de voir que

$$(\mathbf{D}, \nabla \phi)_H = -(q, \phi)_W. \quad (4.28)$$

Nous rassemblons maintenant la loi constitutive (4.1)–(4.2), l'inégalité (4.27), l'égalité (4.28) et les conditions initiales (4.10) pour établir la formulation variationnelle du problème P1 suivante.

**Problème PV1.** Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$ , le champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma} : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ , le champ de potentiel électrique  $\varphi : [0, T] \rightarrow W$ , le champ des déplacements électriques  $\mathbf{D} : [0, T] \rightarrow \mathcal{W}$  et la fonction d'usure  $\zeta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$  tels que

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{M}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))ds + \mathcal{E}^*\nabla\varphi(t), \quad (4.29)$$

$$(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}, \zeta(t)) - j(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t), \zeta(t)) \quad (4.30)$$

$$\geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

$$\mathbf{D}(t) = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) - \mathbf{B}\nabla\varphi(t), \quad (4.31)$$

$$(\mathbf{D}(t), \nabla\phi)_H = -(q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, \quad (4.32)$$

$$\dot{\zeta} = k_0 v^* p_\nu (u_\nu - g - \zeta), \quad (4.33)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \zeta(0) = 0, \quad (4.34)$$

pour tout  $t \in [0, T]$ .

L'élément  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \mathbf{D}, \zeta)$  qui satisfait (4.29)–(4.34) s'appelle solution faible du Problème P1. La solvabilité de ce système fera l'objet de la section suivante.

### 4.3 Existence et unicité de la solution

Dans cette section, nous énonçons et prouvons le résultat de l'existence et d'unicité suivant.

**Théorème 4.1.** *Supposons que les hypothèses (4.11) – (4.21) sont satisfaites. Alors, le problème PV1 admet une solution unique  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \mathbf{D}, \zeta)$  ayant la régularité*

$$\mathbf{u} \in C^1(0, T; V), \quad (4.35)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \in C(0, T; \mathcal{H}_1), \quad (4.36)$$

$$\varphi \in C(0, T; W), \quad (4.37)$$

$$\mathbf{D} \in C(0, T; \mathcal{W}), \quad (4.38)$$

$$\zeta \in C^1(0, T; L^2(\Gamma_3)). \quad (4.39)$$

Nous concluons que sous les hypothèses (4.11) – (4.21), le problème mécanique (4.1) – (4.10) a une solution faible unique. La régularité de la solution faible est donnée par (4.35) – (4.39).

La démonstration du Théorème 4.1 sera donnée en plusieurs étapes. Pour la présenter, nous supposons dans ce qui suit que les hypothèses (4.11) – (4.21) sont vérifiées,  $c$  désigne une constante positive qui dépend de  $\Omega$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $p_\nu$ ,  $p_\tau$  et  $T$  dont la valeur peut changer d'un endroit à un autre.

Dans la première étape, nous supposons que les fonctions  $\zeta \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$ ,  $\boldsymbol{\eta} \in C(0, T; \mathcal{H})$  et  $\mathbf{g} \in C(0, T; V)$  sont données et nous construisons le problème intermédiaire suivant.

**Problème PV1 $_{\zeta\eta\mathbf{g}}$ .** *Trouver le champ des vitesses  $\mathbf{v}_{\zeta\eta\mathbf{g}} : [0, T] \rightarrow V$  et le champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}_{\zeta\eta\mathbf{g}} : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$  tels que, pour tout  $t \in [0, T]$ ,*

$$\boldsymbol{\sigma}_{\zeta\eta\mathbf{g}}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_{\zeta\eta\mathbf{g}}(t)) + \boldsymbol{\eta}(t), \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} & (\boldsymbol{\sigma}_{\zeta\eta\mathbf{g}}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\zeta\eta\mathbf{g}}(t)))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{g}(t), \mathbf{v}, \zeta(t)) - j(\mathbf{g}(t), \mathbf{v}_{\zeta\eta\mathbf{g}}(t), \zeta(t)) \\ & \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\zeta\eta\mathbf{g}}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (4.41)$$

**Lemme 4.2.** *PV1 $_{\zeta\eta\mathbf{g}}$  a une solution unique tel que*

$$\mathbf{v}_{\zeta\eta\mathbf{g}} \in C(0, T; V), \quad \boldsymbol{\sigma}_{\zeta\eta\mathbf{g}} \in C(0, T; \mathcal{H}_1). \quad (4.42)$$

**Preuve.** Nous définissons l'opérateur  $A : V \rightarrow V$  tel que

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \quad (4.43)$$

L'opérateur  $A$  est fortement monotone et de Lipschitz sur  $V$ . En effet, en utilisant (4.43) la définition de  $A$ , l'égalité (1.7), l'hypothèse (4.11) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  et  $\forall \mathbf{w} \in V$ , nous avons

$$\begin{aligned} (A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{w})_V &= (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}))_{\mathcal{H}} \\ &\leq L_{\mathcal{A}} |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})|_{\mathcal{H}} |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})|_{\mathcal{H}} \\ &\leq L_{\mathcal{A}} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|_V |\mathbf{w}|_V. \end{aligned}$$

Donc

$$|A\mathbf{u} - A\mathbf{v}|_V \leq L_{\mathcal{A}} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|_V,$$



qui prouve que  $A$  est de Lipschitz sur  $V$ .

De même, pour tout  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ , nous avons

$$\begin{aligned} (A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_V &= (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \\ &\geq m_{\mathcal{A}} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|_V^2, \end{aligned}$$

c'est à dire que  $A$  est un opérateur fortement monotone sur  $V$ .

Nous utilisons le théorème de représentation de Riesz pour définir un élément  $\mathbf{F} \in C(0, T; V)$  par

$$(\mathbf{F}(t), \mathbf{v})_V = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V - (\boldsymbol{\eta}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}}. \quad (4.44)$$

Puisque l'opérateur  $A$  est de Lipschitz et fortement monotone sur  $V$  avec (4.26), nous concluons d'après un résultat standard sur les inéquations variationnelles elliptiques de seconde espèce (Théorème 2.15) qu'il existe une fonction unique  $\mathbf{v}_{\zeta\eta g}(t) \in V$  qui satisfait

$$\begin{aligned} (A\mathbf{v}_{\zeta\eta g}(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\zeta\eta g}(t))_V + j(\mathbf{g}(t), \mathbf{v}, \zeta(t)) - j(\mathbf{g}(t), \mathbf{v}_{\zeta\eta g}(t), \zeta(t)) \\ \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\zeta\eta g}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, \end{aligned} \quad (4.45)$$

en combinant (4.40) et (4.43) – (4.45), nous déduisons que  $\mathbf{v}_{\zeta\eta g}$  est une solution unique de  $\text{PV1}_{\zeta\eta g}$ .

Nous utilisons la relation (4.40), l'hypothèse (4.11) et les propriétés du tenseur de déformations à obtenir que  $\boldsymbol{\sigma}_{\zeta\eta g}(t) \in \mathcal{H}$ . Puisque  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\zeta\eta g}(t) \pm \boldsymbol{\Phi}$  satisfait (4.41), où  $\boldsymbol{\Phi} \in \mathcal{D}(\Omega)^d$  est arbitraire. En utilisant (4.41), les définitions (4.22) et (4.25) et l'intégration par partie, nous trouvons

$$(-\text{Div}\boldsymbol{\sigma}_{\zeta\eta g}(t), \boldsymbol{\Phi})_H \geq (\mathbf{f}_0(t), \boldsymbol{\Phi})_H \text{ et } (-\text{Div}\boldsymbol{\sigma}_{\zeta\eta g}(t), \boldsymbol{\Phi})_H \leq (\mathbf{f}_0(t), \boldsymbol{\Phi})_H.$$

Donc

$$\text{Div}\boldsymbol{\sigma}_{\zeta\eta g}(t) + \mathbf{f}_0(t) = \mathbf{0}. \quad (4.46)$$

Avec l'hypothèse (4.17) sur la régularité de  $\mathbf{f}_0$ , nous voyons que

$$\text{Div}\boldsymbol{\sigma}_{\zeta\eta g}(t) \in H.$$

Alors que  $\boldsymbol{\sigma}_{\zeta\eta g}(t) \in \mathcal{H}_1$ . Dans la suite nous allons montrer que

$$\mathbf{v}_{\zeta\eta g} \in C(0, T; V), \quad \boldsymbol{\sigma}_{\zeta\eta g} \in C(0, T; \mathcal{H}_1).$$

Soit  $t_1, t_2 \in [0, T]$  et pour simplifier les notations nous posons  $\mathbf{v}_{\zeta\eta g}(t_i) = \mathbf{v}_i$ ,  $\mathbf{g}(t_i) = \mathbf{g}_i$ ,  $\boldsymbol{\eta}(t_i) = \boldsymbol{\eta}_i$ ,  $\zeta(t_i) = \zeta_i$ ,  $\mathbf{f}(t_i) = \mathbf{f}_i$ , et  $\boldsymbol{\sigma}_{\zeta\eta g}(t_i) = \boldsymbol{\sigma}_i$  pour  $i = 1, 2$ .

Nous appliquons l'inéquation (4.45) avec (4.44) pour  $t = t_1$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} (A\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_V &\leq j(\mathbf{g}_1, \mathbf{v}_2, \zeta_1) - j(\mathbf{g}_1, \mathbf{v}_1, \zeta_1) \\ &\quad + (\mathbf{f}_1, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_V - (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2))_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

encore une fois, pour  $t = t_2$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ , nous trouvons

$$\begin{aligned} (-A\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_V &\leq j(\mathbf{g}_2, \mathbf{v}_1, \zeta_2) - j(\mathbf{g}_2, \mathbf{v}_2, \zeta_2) \\ &\quad - (\mathbf{f}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_V + (\boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2))_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Nous additionnons les deux inégalités précédentes pour obtenir

$$\begin{aligned} &(A\mathbf{v}_1 - A\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_V \\ &\leq j(\mathbf{g}_1, \mathbf{v}_2, \zeta_1) - j(\mathbf{g}_1, \mathbf{v}_1, \zeta_1) + j(\mathbf{g}_2, \mathbf{v}_1, \zeta_2) - j(\mathbf{g}_2, \mathbf{v}_2, \zeta_2) \\ &\quad + (\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_V + (\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2))_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

En utilisant la définition (4.43), l'hypothèse (4.11), la définition (1.7) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\begin{aligned} &m_{\mathcal{A}} |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V^2 \tag{4.47} \\ &\leq |j(\mathbf{g}_1, \mathbf{v}_1, \zeta_1) - j(\mathbf{g}_1, \mathbf{v}_2, \zeta_1) + j(\mathbf{g}_2, \mathbf{v}_2, \zeta_2) - j(\mathbf{g}_2, \mathbf{v}_1, \zeta_2)| \\ &\quad + (|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2|_V + |\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2|_{\mathcal{H}}) |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V. \end{aligned}$$

De (4.25) la définition de la fonctionnelle  $j$  et employons l'inégalité  $||\mathbf{u}| - |\mathbf{v}|| \leq |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$   $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ , nous avons

$$\begin{aligned} &|j(\mathbf{g}_1, \mathbf{v}_1, \zeta_1) - j(\mathbf{g}_1, \mathbf{v}_2, \zeta_1) + j(\mathbf{g}_2, \mathbf{v}_2, \zeta_2) - j(\mathbf{g}_2, \mathbf{v}_1, \zeta_2)| \\ &= \left| \int_{\Gamma_3} p_\nu (g_{1\nu} - g - \zeta_1) v_{1\nu} da - \int_{\Gamma_3} p_\nu (g_{1\nu} - g - \zeta_1) v_{2\nu} da \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma_3} p_\nu (g_{2\nu} - g - \zeta_2) v_{2\nu} da - \int_{\Gamma_3} p_\nu (g_{2\nu} - g - \zeta_2) v_{1\nu} da \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma_3} p_\tau (g_{1\nu} - g - \zeta_1) |\mathbf{v}_{1\tau} - \mathbf{v}^*| da - \int_{\Gamma_3} p_\tau (g_{1\nu} - g - \zeta_1) |\mathbf{v}_{2\tau} - \mathbf{v}^*| da \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\Gamma_3} p_\tau (g_{2\nu} - g - \zeta_2) |\mathbf{v}_{2\tau} - \mathbf{v}^*| da - \int_{\Gamma_3} p_\tau (g_{2\nu} - g - \zeta_2) |\mathbf{v}_{1\tau} - \mathbf{v}^*| da \\
 & \leq \int_{\Gamma_3} |p_\nu (g_{1\nu} - g - \zeta_1) - p_\nu (g_{2\nu} - g - \zeta_2)| |v_{1\nu} - v_{2\nu}| da \\
 & + \int_{\Gamma_3} |p_\tau (g_{1\nu} - g - \zeta_1) - p_\tau (g_{2\nu} - g - \zeta_2)| |\mathbf{v}_{1\tau} - \mathbf{v}_{2\tau}| da.
 \end{aligned}$$

En utilisant l'argument  $|u_r| \leq |\mathbf{u}|$  ( $r = \nu, \tau$ ), (4.15) les hypothèses sur  $p_\nu, p_\tau$ , l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (1.8), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & |j(\mathbf{g}_1, \mathbf{v}_1, \zeta_1) - j(\mathbf{g}_1, \mathbf{v}_2, \zeta_1) + j(\mathbf{g}_2, \mathbf{v}_2, \zeta_2) - j(\mathbf{g}_2, \mathbf{v}_1, \zeta_2)| \\
 & \leq (L_\nu + L_\tau) c_0 \left( c_0 |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|_V + |\zeta_1 - \zeta_2|_{L^2(\Gamma_3)} \right) |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V,
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

en combinant (4.47) avec (4.48) pour voir que

$$\begin{aligned}
 m_{\mathcal{A}} |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V & \leq (L_\nu + L_\tau) c_0 \left( c_0 |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|_V + |\zeta_1 - \zeta_2|_{L^2(\Gamma_3)} \right) \\
 & + |\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2|_V + |\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2|_{\mathcal{H}},
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

D'après la régularité de  $\{\mathbf{g}, \zeta, \mathbf{f}, \boldsymbol{\eta}\}$  et (4.49), nous déduisons que

$$\mathbf{v}_{\zeta\eta\mathbf{g}} \in C(0, T; V). \tag{4.50}$$

D'autre part, nous appliquons (4.40) pour  $t = t_1$  puis  $t = t_2$ , et faisons la soustraction et en utilisant (4.11) et (1.7) afin de voir que

$$|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2|_{\mathcal{H}} \leq L_{\mathcal{A}} |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V + |\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2|_{\mathcal{H}}. \tag{4.51}$$

De (4.46), nous avons

$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma}_{\zeta\eta\mathbf{g}}(t_i) + \mathbf{f}_0(t_i) = \mathbf{0} \text{ pour } i = 1, 2. \tag{4.52}$$

En employant (4.51) – (4.52) avec la régularité de  $(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v}_{\zeta\eta\mathbf{g}}, \mathbf{f}_0)$ , nous concluons que

$$\boldsymbol{\sigma}_{\zeta\eta\mathbf{g}} \in C(0, T; \mathcal{H}_1).$$

Ce qui termine la preuve du Lemme 4.2. □

Soient  $\zeta \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$ ,  $\boldsymbol{\eta} \in C(0, T; \mathcal{H})$  et  $\mathbf{g} \in C(0, T; V)$ . Nous définissons maintenant l'opérateur  $\Lambda_{\zeta\boldsymbol{\eta}} : C(0, T; V) \rightarrow C(0, T; V)$  par

$$\Lambda_{\zeta\boldsymbol{\eta}} \mathbf{g}(t) = \mathbf{u}_0 + \int_0^t \mathbf{v}_{\zeta\eta\mathbf{g}}(s) ds \quad \forall \mathbf{g} \in C(0, T; V). \tag{4.53}$$

Nous avons sur l'opérateur  $\Lambda_{\zeta\eta}$  le résultat suivant.

**Lemme 4.3.** *L'opérateur  $\Lambda_{\zeta\eta}$  admet un point fixe unique  $\mathbf{g}_{\zeta\eta} \in C(0, T; V)$ .*

**Preuve.** Soient  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in C(0, T; V)$  et  $\boldsymbol{\eta} \in C(0, T; \mathcal{H})$ . Nous utilisons les notations  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{\zeta\eta\mathbf{g}_i}$  et  $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{\zeta\eta\mathbf{g}_i}$  pour  $i = 1, 2$ . En utilisant les mêmes arguments que nous avons utilisées dans (4.49), nous trouvons pour tout  $t \in [0, T]$

$$m_{\mathcal{A}} |\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)|_V \leq (L_\nu + L_\tau) c_0^2 |\mathbf{g}_1(t) - \mathbf{g}_2(t)|_V,$$

nous intégrons l'inégalité précédente par rapport à  $t$  et employons (4.53), nous obtenons

$$|\Lambda_{\zeta\eta}\mathbf{g}_1(t) - \Lambda_{\zeta\eta}\mathbf{g}_2(t)|_V \leq c \int_0^t |\mathbf{g}_1(s) - \mathbf{g}_2(s)|_V ds \quad \forall t \in [0, T],$$

En réitérant  $m$  fois l'inégalité précédente, il est facile de voir que

$$|\Lambda_{\zeta\eta}^m \mathbf{g}_1 - \Lambda_{\zeta\eta}^m \mathbf{g}_2|_{0,V} \leq \frac{(cT)^m}{m!} |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|_{0,V}.$$

Nous déduisons que pour  $m$  suffisamment grand, l'opérateur  $\Lambda_{\zeta\eta}^m$  est un contractant sur l'espace de Banach  $C(0, T; V)$ , donc,  $\Lambda_{\zeta\eta}^m$  possède un point fixe unique  $\mathbf{g}_{\zeta\eta} \in C(0, T; V)$  et par conséquent  $\mathbf{g}_{\zeta\eta}$  est le point fixe unique de  $\Lambda_{\zeta\eta}$ .  $\square$

Maintenant nous considérons le problème suivant.

**Problem PV1 $_{\zeta\eta}$ .** *Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u}_{\zeta\eta} : [0, T] \rightarrow V$  tel que pour tout  $t \in [0, T]$ ,*

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_{\zeta\eta}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_{\zeta\eta}(t)))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}_{\zeta\eta}(t), \mathbf{v}, \zeta(t)) - j(\mathbf{u}_{\zeta\eta}(t), \dot{\mathbf{u}}_{\zeta\eta}(t), \zeta(t)) \quad (4.54)$$

$$+(\boldsymbol{\eta}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_{\zeta\eta}(t)))_{\mathcal{H}} \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_{\zeta\eta}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

$$\mathbf{u}_{\zeta\eta}(0) = \mathbf{u}_0. \quad (4.55)$$

Pour le problem PV1 $_{\zeta\eta}$  nous avons le résultat suivant.

**Lemme 4.4.** *Le problème PV1 $_{\zeta\eta}$  a une solution unique  $\mathbf{u}_{\zeta\eta}$  qui satisfait (4.35).*

**Preuve.** Soient  $\zeta \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$  et  $\boldsymbol{\eta} \in C(0, T; \mathcal{H})$ , nous notons par  $\mathbf{g}_{\zeta\eta} \in C(0, T; V)$  le point fixe garantié par le Lemme 4.3 et soit  $\mathbf{u}_{\zeta\eta}$  la fonction définie par

$$\mathbf{u}_{\zeta\eta}(t) = \mathbf{u}_0 + \int_0^t \mathbf{v}_{\zeta\eta\mathbf{g}_{\zeta\eta}}(s) ds. \quad (4.56)$$

Comme  $\mathbf{g}_{\zeta\eta}$  est le point fixe de  $\Lambda_{\zeta\eta}$ , donc

$$\Lambda_{\zeta\eta}\mathbf{g}_{\zeta\eta} = \mathbf{g}_{\zeta\eta}.$$

Nous combinons cette égalité avec (4.53) la définition de  $\Lambda_{\zeta\eta}$  et (4.56) afin de voir que

$$\mathbf{g}_{\zeta\eta} = \mathbf{u}_{\zeta\eta}. \quad (4.57)$$

En outre, de (4.56) la définition de  $\mathbf{u}_{\zeta\eta}$ , nous avons

$$\dot{\mathbf{u}}_{\zeta\eta} = \mathbf{v}_{\zeta\eta}\mathbf{g}_{\zeta\eta}. \quad (4.58)$$

Donc, nous remplaçons  $\mathbf{g}$  par  $\mathbf{g}_{\zeta\eta}$  dans (4.45), et utilisons (4.43) – (4.44) et (4.57) – (4.58), nous trouvons que  $\mathbf{u}_{\zeta\eta}$  est une solution unique de  $\text{PV1}_{\zeta\eta}$ , en plus de ça la relation (4.58) et la régularité de  $\mathbf{v}_{\zeta\eta}\mathbf{g}_{\zeta\eta}$  nous donnent  $\mathbf{u}_{\zeta\eta} \in C^1(0, T; V)$ .  $\square$

Dans la deuxième étape. Soient  $\zeta \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$  et  $\boldsymbol{\eta} \in C(0, T; \mathcal{H})$ , nous utilisons  $\mathbf{u}_{\zeta\eta}$  la solution unique de  $\text{PV1}_{\zeta\eta}$ .

Pour le champ électrique. Nous considérons le problème variationnel suivant.

**Problème QV1 $_{\zeta\eta}$ .** *Trouver le champ de potentiel électrique  $\varphi_{\zeta\eta} : [0, T] \rightarrow W$  tel que pour tout  $t \in [0, T]$*

$$(\mathbf{B}\nabla\varphi_{\zeta\eta}(t), \nabla\phi)_H - (\boldsymbol{\mathcal{E}}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\zeta\eta}(t)), \nabla\phi)_H = (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W. \quad (4.59)$$

Nous avons le résultat suivant.

**Lemme 4.5.** *QV1 $_{\zeta\eta}$  a une solution unique  $\varphi_{\zeta\eta}$  qui satisfait la régularité (4.37).*

**Preuve.** Nous définissons la forme bilinéaire  $b : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$b(\varphi, \phi) = (\mathbf{B}\nabla\varphi, \nabla\phi)_H \quad \forall \varphi, \phi \in W.$$

Nous utilisons cette définition, (4.13) l'hypothèse sur le tenseur  $\mathbf{B}$  et la définition (1.13) avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$b(\varphi, \phi) = b(\phi, \varphi), \quad b(\varphi, \varphi) \geq m_B |\varphi|_W^2, \quad b(\varphi, \phi) \leq c |\varphi|_W |\phi|_W.$$

Donc  $b$  est une forme bilinéaire symétrique, continue et coercive sur  $W$ . Cependant, en utilisant le théorème de représentation de Riesz, nous pouvons définir une forme linéaire continue  $q_{\zeta\eta}(t) : W \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$q_{\zeta\eta}(t)(\phi) = (q(t), \phi)_W + (\boldsymbol{\mathcal{E}}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\zeta\eta}(t)), \nabla\phi)_H.$$

Nous appliquons le théorème de Lax-Milgram pour déduire qu'il existe un élément unique  $\varphi_{\zeta\eta}(t) \in W$  tel que

$$b(\varphi_{\zeta\eta}(t), \phi) = q_{\zeta\eta}(t)(\phi).$$

Nous concluons alors que  $\varphi_{\zeta\eta}$  est une solution unique de  $\text{QV1}_{\zeta\eta}$ .

Dans la suite, nous allons vérifier que  $\varphi_{\zeta\eta} \in C(0, T; W)$ . Pour  $t_1, t_2 \in [0, T]$  nous adoptons les notations suivantes  $\varphi_{\zeta\eta}(t_i) = \varphi_i$ ,  $\mathbf{u}_{\zeta\eta}(t_i) = \mathbf{u}_i$  et  $q(t_i) = q_i$ , ( $i = 1, 2$ ). Pour tout  $\phi \in W$ . En utilisant (4.59) pour  $t = t_1$ , nous voyons que

$$(\mathbf{B}\nabla\varphi_1, \nabla\phi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_1), \nabla\phi)_H = (q_1, \phi)_W,$$

de même, pour  $t = t_2$ , nous avons

$$(\mathbf{B}\nabla\varphi_2, \nabla\phi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_2), \nabla\phi)_H = (q_2, \phi)_W.$$

Nous choisissons  $\phi = \varphi_1 - \varphi_2$  et faisons la soustraction, nous trouvons

$$\begin{aligned} & (\mathbf{B}\nabla\varphi_1 - \mathbf{B}\nabla\varphi_2, \nabla(\varphi_1 - \varphi_2))_H \\ &= (q_1 - q_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W + (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_1) - \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_2), \nabla(\varphi_1 - \varphi_2))_H. \end{aligned}$$

En utilisant (1.2), (1.7), (1.13), les hypothèses (4.13) – (4.14) sur  $\mathbf{B}$ ,  $\mathcal{E}$  et l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir

$$m_B |\varphi_1 - \varphi_2|_W^2 \leq c_{\mathcal{E}} |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_V |\varphi_1 - \varphi_2|_W + |q_1 - q_2|_W |\varphi_1 - \varphi_2|_W$$

donc

$$|\varphi_1 - \varphi_2|_W \leq c(|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_V + |q_1 - q_2|_W). \quad (4.60)$$

Sachant que  $\mathbf{u}_{\zeta\eta} \in C^1(0, T; V)$  et  $q \in C(0, T; W)$ , l'estimation (4.60) nous donne  $\varphi_{\zeta\eta} \in C(0, T; W)$ .

Ce qui termine la preuve du Lemme 4.5. □

Maintenant, pour  $t \in [0, T]$ , nous considérons l'opérateur

$$\Lambda_{\zeta} : C(0, T; \mathcal{H}) \rightarrow C(0, T; \mathcal{H}),$$

défini par : pour chaque  $\boldsymbol{\eta} \in C(0, T; \mathcal{H})$

$$\Lambda_\zeta \boldsymbol{\eta}(t) = \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\zeta\boldsymbol{\eta}}(t))) + \int_0^t \mathcal{M}(t-s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\zeta\boldsymbol{\eta}}(s)) ds + \mathcal{E}^* \nabla \varphi_{\zeta\boldsymbol{\eta}}(t), \quad (4.61)$$

Ici, pour tout  $\boldsymbol{\eta} \in C(0, T; \mathcal{H})$ ;  $\mathbf{u}_{\zeta\boldsymbol{\eta}}$  et  $\varphi_{\zeta\boldsymbol{\eta}}$  représentent le champ des déplacements et le champ de potentiel électrique obtenus dans les Lemmes 4.4 et 4.5 respectivement. Nous avons le résultat suivant.

**Lemme 4.6.** *Il existe un élément unique  $\boldsymbol{\eta}_\zeta \in C(0, T; \mathcal{H})$  tel que  $\Lambda_\zeta \boldsymbol{\eta}_\zeta = \boldsymbol{\eta}_\zeta$ .*

**Preuve.** Soient  $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in C(0, T; \mathcal{H})$ . Nous utilisons les notations  $\mathbf{u}_{\zeta\boldsymbol{\eta}_i} = \mathbf{u}_i$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_{\zeta\boldsymbol{\eta}_i} = \mathbf{v}_i$ ,  $\varphi_{\zeta\boldsymbol{\eta}_i} = \varphi_i$  et  $\mathbf{g}_{\zeta\boldsymbol{\eta}_i} = \mathbf{g}_i$  pour  $i = 1, 2$ . En employant (4.61), nous avons

$$\begin{aligned} |\Lambda_\zeta \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda_\zeta \boldsymbol{\eta}_2(t)| &\leq |\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(t))) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(t)))| \\ &+ |\mathcal{E}^* \nabla \varphi_1(t) - \mathcal{E}^* \nabla \varphi_2(t)| + \int_0^t |\mathcal{M}(t-s)| |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(s)) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(s))| ds. \end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses (4.12), (4.14) et (4.16), nous obtenons

$$\begin{aligned} |\Lambda_\zeta \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda_\zeta \boldsymbol{\eta}_2(t)| &\leq L_{\mathcal{F}} |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t))| + c_{\mathcal{E}^*} |\nabla(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))| \\ &+ |\mathcal{M}|_{C(0, T; \mathcal{H}_\infty)} \int_0^t |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s))| ds, \end{aligned} \quad (4.62)$$

où  $c_{\mathcal{E}^*}$  est une constante dépendante à  $\mathcal{E}^*$ .

En mettant l'inégalité (4.62) à la puissance au carré et intégrons par rapport à  $\mathbf{x}$  avec l'utilisation de (1.7) et (1.12), nous trouvons

$$\begin{aligned} |\Lambda_\zeta \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda_\zeta \boldsymbol{\eta}_2(t)|_{\mathcal{H}}^2 &\leq c \left( |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds \right. \\ &\left. + |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W^2 \right). \end{aligned} \quad (4.63)$$

En outre, nous avons

$$\mathbf{u}_i(t) = \mathbf{u}_0 + \int_0^t \mathbf{v}_i(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Ainsi

$$|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 \leq \int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.64)$$

Pour le champ de potentiel électrique, de (4.59), nous avons

$$\begin{aligned} &(\mathbf{B} \nabla \varphi_1(t) - \mathbf{B} \nabla \varphi_2(t), \nabla(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)))_H \\ &= (\mathcal{E} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(t)) - \mathcal{E} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(t)), \nabla(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)))_H, \end{aligned}$$

nous utilisons les hypothèses (4.13) – (4.14) avec les définitions (1.7) et (1.13) pour obtenir

$$m_B |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W^2 \leq c_\varepsilon |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W,$$

donc

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W^2 \leq c |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2. \quad (4.65)$$

Nous combinons l'estimation (4.65) avec (4.63) et employons (4.64), nous trouvons

$$|\Lambda_\zeta \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda_\zeta \boldsymbol{\eta}_2(t)|_{\mathcal{H}}^2 \leq c \int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds. \quad (4.66)$$

De plus, en choisissant  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_1$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2$  dans (4.54), nous obtenons

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)))_{\mathcal{H}} \\ & \leq j(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{v}_2(t), \zeta(t)) - j(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{v}_1(t), \zeta(t)) \\ & (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t))_V - (\boldsymbol{\eta}_1(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)))_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

aussi pour  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_2$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ , nous avons

$$\begin{aligned} & (-\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)))_{\mathcal{H}} \\ & \leq j(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{v}_1(t), \zeta(t)) - j(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{v}_2(t), \zeta(t)) \\ & -(\mathbf{f}(t), \mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t))_V + (\boldsymbol{\eta}_2(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)))_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

En ajoutant les deux inégalités précédentes, il est facile de voir que

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t)) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)))_{\mathcal{H}} \quad (4.67) \\ & \leq j(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{v}_2(t), \zeta(t)) - j(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{v}_1(t), \zeta(t)) + j(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{v}_1(t), \zeta(t)) \\ & - j(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{v}_2(t), \zeta(t)) - (\boldsymbol{\eta}_1(t) - \boldsymbol{\eta}_2(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)))_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

En utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans (4.48), nous trouvons

$$\begin{aligned} & |j(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{v}_2(t), \zeta(t)) - j(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{v}_1(t), \zeta(t))| \quad (4.68) \\ & + |j(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{v}_1(t), \zeta(t)) - j(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{v}_2(t), \zeta(t))| \\ & \leq c |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V |\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)|_V. \end{aligned}$$



De (1.2), (1.7), (4.11), (4.67) – (4.68) et l'inégalité de Cahchy-Schwarz, il s'ensuit que

$$|\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)|_V \leq c (|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V + |\boldsymbol{\eta}_1(t) - \boldsymbol{\eta}_2(t)|_{\mathcal{H}}), \quad (4.69)$$

nous mettons (4.69) à la puissance deux et intégrons par rapport au temps, nous arrivons à

$$\int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds \leq c \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds + c \int_0^t |\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)|_{\mathcal{H}}^2 ds. \quad (4.70)$$

Nous combinons (4.64) avec (4.70), nous avons

$$|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 \leq c \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds + c \int_0^t |\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)|_{\mathcal{H}}^2 ds,$$

en appliquant le Lemme 2.19 de Granwall, nous déduisons que

$$|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 \leq c \int_0^t |\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)|_{\mathcal{H}}^2 ds. \quad (4.71)$$

Nous substituons (4.71) dans (4.70) nous trouvons

$$\int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds \leq c \int_0^t |\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)|_{\mathcal{H}}^2 ds. \quad (4.72)$$

En combinant (4.72) avec (4.66), nous déduisons que

$$|\Lambda_\zeta \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda_\zeta \boldsymbol{\eta}_2(t)|_{\mathcal{H}}^2 \leq c \int_0^t |\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)|_{\mathcal{H}}^2 ds.$$

En réitérant  $m$  fois l'inégalité précédente, nous obtenons

$$|\Lambda_\zeta^m \boldsymbol{\eta}_1 - \Lambda_\zeta^m \boldsymbol{\eta}_2|_{0,\mathcal{H}}^2 \leq \frac{(cT)^m}{m!} |\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2|_{0,\mathcal{H}}^2$$

nous déduisons que si  $m$  suffisamment grand, l'opérateur  $\Lambda_\zeta^m$  est un contractant sur l'espace de Banach  $C(0, T; \mathcal{H})$ , donc,  $\Lambda_\zeta^m$  possède un point fixe unique  $\boldsymbol{\eta}_\zeta \in C(0, T; \mathcal{H})$  et par conséquent  $\boldsymbol{\eta}_\zeta$  est le point fixe unique de  $\Lambda_\zeta$ .  $\square$

Soit  $\zeta \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$ . Dans la troisième étape nous considérons le problème variationnel suivant.

**Problem PV1 $_\zeta$ .** *Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u}_\zeta : [0, T] \rightarrow V$ , le champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}_\zeta : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ , le champ de potentiel électrique  $\varphi_\zeta : [0, T] \rightarrow W$  et le champ des déplacements électriques  $\mathbf{D}_\zeta : [0, T] \rightarrow H$  tels que pour tout  $t \in [0, T]$ ,*

$$\boldsymbol{\sigma}_\zeta(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_\zeta(t)) + \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\zeta(t))) + \int_0^t \mathcal{M}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\zeta(s))ds + \mathcal{E}^*\nabla\varphi_\zeta(t), \quad (4.73)$$

$$(\boldsymbol{\sigma}_\zeta(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\zeta(t)))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}_\zeta(t), \mathbf{v}, \zeta(t)) - j(\mathbf{u}_\zeta(t), \dot{\mathbf{u}}_\zeta(t), \zeta(t)) \quad (4.74)$$

$$\geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\zeta(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

$$\mathbf{D}_\zeta(t) = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\zeta(t)) - \mathbf{B}\nabla\varphi_\zeta(t), \quad (4.75)$$

$$(\mathbf{D}_\zeta(t), \nabla\phi)_H = -(q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, \quad (4.76)$$

$$\mathbf{u}_\zeta(0) = \mathbf{u}_0. \quad (4.77)$$

**Lemme 4.7.** *Le problème PV1 $_\zeta$  admet une solution unique  $\{\mathbf{u}_\zeta, \boldsymbol{\sigma}_\zeta, \varphi_\zeta, \mathbf{D}_\zeta\}$  qui satisfait (4.35) – (4.38).*

**Preuve.** Soit  $\boldsymbol{\eta}_\zeta \in C(0, T; \mathcal{H})$  le point fixe de  $\Lambda_\zeta$  qui est défini par (4.61), nous adoptons les notations  $\mathbf{u}_\zeta = \mathbf{u}_{\zeta\boldsymbol{\eta}_\zeta}$  et  $\varphi_\zeta = \varphi_{\zeta\boldsymbol{\eta}_\zeta}$  qui sont les solutions des problèmes PV1 $_{\zeta\boldsymbol{\eta}}$  et QV1 $_{\zeta\boldsymbol{\eta}}$  obtenues dans les Lemmes 4.4 et 4.5, respectivement, pour  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_\zeta$ .

Nous combinons alors l'égalité  $\Lambda_\zeta\boldsymbol{\eta}_\zeta = \boldsymbol{\eta}_\zeta$  avec (4.61), nous obtenons

$$\boldsymbol{\eta}_\zeta(t) = \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\zeta(t))) + \int_0^t \mathcal{M}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\zeta(s))ds + \mathcal{E}^*\nabla\varphi_\zeta(t).$$

Nous avons

$$\boldsymbol{\sigma}_\zeta(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_\zeta(t)) + \boldsymbol{\eta}_\zeta(t)$$

donc

$$\boldsymbol{\sigma}_\zeta(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_\zeta(t)) + \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\zeta(t))) + \int_0^t \mathcal{M}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\zeta(s))ds + \mathcal{E}^*\nabla\varphi_\zeta(t). \quad (4.78)$$

Nous posons

$$\mathbf{D}_\zeta(t) = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\zeta(t)) - \mathbf{B}\nabla\varphi_\zeta(t). \quad (4.79)$$

Soit  $t_1, t_2 \in [0, T]$ , d'après (1.7) – (1.12) et (4.79), nous déduisons que

$$|\mathbf{D}_\zeta(t_1) - \mathbf{D}_\zeta(t_2)|_H \leq c(|\varphi_\zeta(t_1) - \varphi_\zeta(t_2)|_W + |\mathbf{u}_\zeta(t_1) - \mathbf{u}_\zeta(t_2)|_V),$$

de la régularité de  $(\mathbf{u}_\zeta, \varphi_\zeta)$ , nous impliquons que

$$\mathbf{D}_\zeta \in C(0, T; H).$$

Nous combinons (4.59) pour  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_\zeta$  avec (4.79) nous obtenons

$$(\mathbf{D}_\zeta(t), \nabla\phi)_H = -(q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W,$$

Nous choisissons  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  dans l'égalité précédente, trouvons que

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_\zeta(t) = q_0(t) \quad \forall t \in [0, T].$$

D'après la régularité de  $q_0$ , nous voyons que

$$\mathbf{D}_\zeta \in C(0, T; \mathcal{W}).$$

En prenant  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_\zeta$  dans (4.54) – (4.55) et (4.59) avec les égalités (4.78) et (4.79), nous déduisons que  $\{\mathbf{u}_\zeta, \boldsymbol{\sigma}_\zeta, \varphi_\zeta, \mathbf{D}_\zeta\}$  satisfait (4.73) – (4.76). Ensuite, (4.77) et la régularité (4.35) – (4.38) viennent des Lemme 4.4, 4.5 et les hypothèses sur  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{E}$  et  $\mathbf{B}$ . Ce qui prouve la partie de l'existence du Lemme 4.7.

La partie de l'unicité du Lemme 4.7 est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur  $\Lambda$  défini par (4.61) et l'unicité des solutions des problèmes  $\text{PV1}_{\zeta\eta_\zeta}$  et  $\text{QV1}_{\zeta\eta_\zeta}$ .  $\square$

Nous considérons maintenant l'opérateur  $\mathcal{L} : C(0, T; L^2(\Gamma_3)) \rightarrow C(0, T; L^2(\Gamma_3))$  défini par

$$\mathcal{L}\zeta(t) = -k_0 v^* \int_0^t (\sigma_\zeta)_\nu(s) ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.80)$$

L'étape finale de la démonstration du Théorème 4.1 est le résultat suivant.

**Lemme 4.8.** *L'opérateur  $\mathcal{L}$  a un point fixe unique  $\zeta^* \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$ .*

**Preuve.** Soient  $\zeta_1, \zeta_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$  et  $(\mathbf{u}_{\zeta_i}, \boldsymbol{\sigma}_{\zeta_i}, \varphi_{\zeta_i}, \mathbf{D}_{\zeta_i})$  l'élément qui satisfait (4.73) – (4.76) et (4.77) pour  $\zeta = \zeta_i$ ,  $i = 1, 2$ . Nous utilisons les notations  $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{\zeta_i}$ ,  $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{u}}_{\zeta_i}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{\sigma}_{\zeta_i}$ ,  $\varphi_i = \varphi_{\zeta_i}$  et  $\mathbf{D}_{\zeta_i} = \mathbf{D}_i$ . En plus,  $c$  est une constante positive qui dépend à  $k_0$  et  $v^*$ .

Nous employons (4.73) et (4.74) pour  $\zeta(t) = \zeta_1(t)$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2(t)$ , nous avons

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)))_{\mathcal{H}} \\ & + \left( \int_0^t \mathcal{M}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(s))ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)) \right)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_1(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)))_{\mathcal{H}} \\ & + j(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{v}_1(t), \zeta_1(t)) - j(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{v}_2(t), \zeta_1(t)) \leq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t))_V. \end{aligned}$$

De même, pour  $\zeta(t) = \zeta_2(t)$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1(t)$ , nous voyons que

$$\begin{aligned} & (-\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)))_{\mathcal{H}} + (-\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)))_{\mathcal{H}} \\ & + \left( -\int_0^t \mathcal{M}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(s))ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)) \right)_{\mathcal{H}} + (-\mathcal{E}^*\nabla\varphi_2(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)))_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

$$+j(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{v}_2(t), \zeta_2(t)) - j(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{v}_1(t), \zeta_2(t)) \leq (-\mathbf{f}(t), \mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t))_V .$$

Nous additionnons les deux inégalités précédentes afin de voir que

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t)) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)))_{\mathcal{H}} \\ & \leq (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(t)) - \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)))_{\mathcal{H}} \\ & + \left( \int_0^t (\mathcal{M}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(s)) - \mathcal{M}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(s))) ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)) \right)_{\mathcal{H}} \\ & + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_2(t) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi_1(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)))_{\mathcal{H}} \\ & + j(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{v}_2(t), \zeta_1(t)) - j(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{v}_1(t), \zeta_1(t)) \\ & + j(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{v}_1(t), \zeta_2(t)) - j(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{v}_2(t), \zeta_2(t)). \end{aligned}$$

Nous utilisons (4.11) – (4.12), (4.14) – (4.16) les hypothèses sur  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $p_\nu$ ,  $p_\tau$  et  $\mathcal{M}$  avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, (1.7) et (1.13). Par des arguments similaires à ceux utilisés dans (4.48), nous obtenons

$$\begin{aligned} & m_{\mathcal{A}} |\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)|_V \tag{4.81} \\ & \leq (L_{\mathcal{F}} + (L_\nu + L_\tau) c_0^2) |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V + |\mathcal{M}|_{C(0,T;\mathcal{H}_\infty)} \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V ds \\ & \quad + c_{\mathcal{E}} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W + (L_\nu + L_\tau) c_0 |\zeta_1(t) - \zeta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)}. \end{aligned}$$

Nous appliquons (4.75) – (4.76) pour  $\zeta(t) = \zeta_1(t)$  puis pour  $\zeta(t) = \zeta_2(t)$  et prenons  $\phi = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$  après le processus de soustraction, nous trouvons

$$(\mathbf{B}\nabla\varphi_1(t) - \mathbf{B}\nabla\varphi_2(t), \nabla(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)))_H = (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(t)) - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(t)), \nabla(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)))_H.$$

En utilisant encore une fois l'hypothèse (4.13), la définition (1.12) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous voyons que

$$m_B |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W^2 \leq c_{\mathcal{E}} |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W ,$$

alors que

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W \leq c |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V . \tag{4.82}$$

En combinant (4.81) avec (4.82), il vient que

$$|\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)|_V \leq c \left( |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V ds + |\zeta_1(t) - \zeta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} \right) .$$

Nous élèvons au carré les deux côtés de la dernière inégalité et intégrons par rapport au temps, nous trouvons

$$\int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds \leq c \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds + c \int_0^t |\zeta_1(s) - \zeta_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds. \quad (4.83)$$

En outre, nous avons

$$\mathbf{u}_i(t) = \mathbf{u}_0 + \int_0^t \mathbf{v}_i(s) ds,$$

ainsi

$$|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 \leq c \int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds,$$

nous combinons cette inégalité avec (4.83), nous trouvons

$$|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 \leq c \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds + c \int_0^t |\zeta_1(s) - \zeta_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds,$$

en utilisant le Lemme 2.19 de Gronwall, nous obtenons

$$|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 \leq c \int_0^t |\zeta_1(s) - \zeta_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds. \quad (4.84)$$

Nous substituons cette inégalité dans (4.83), nous pouvons écrire

$$\int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds \leq c \int_0^t |\zeta_1(s) - \zeta_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds. \quad (4.85)$$

En autre part, pour  $i = 1, 2$ , nous avons

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_i) + \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_i)) + \int_0^t \mathcal{M}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_i(s))ds + \mathcal{E}^*\nabla\varphi_i,$$

en utilisant les hypothèses (4.11)–(4.12), (4.14), (4.16) et l'estimation (4.82), nous trouvons

$$|\boldsymbol{\sigma}_1(t) - \boldsymbol{\sigma}_2(t)|_{\mathcal{H}}^2 \leq c \left( |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds + |\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)|_V^2 \right).$$

Nous intégrons l'inégalité précédente par rapport au temps, nous trouvons

$$\int_0^t |\boldsymbol{\sigma}_1(s) - \boldsymbol{\sigma}_2(s)|_{\mathcal{H}}^2 ds \leq c \left( \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds \right).$$

Nous substituons (4.84) et (4.85) dans l'inégalité précédente pour trouver

$$\int_0^t |\boldsymbol{\sigma}_1(s) - \boldsymbol{\sigma}_2(s)|_{\mathcal{H}}^2 ds \leq c \int_0^t |\zeta_1(s) - \zeta_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds. \quad (4.86)$$

La définition de l'opérateur  $\mathcal{L}$  donné par (4.80),  $|\sigma_\nu| \leq |\sigma| \forall \sigma \in \mathbb{S}^d$  et l'estimation (4.86) nous donnent

$$|\mathcal{L}\zeta_1(t) - \mathcal{L}\zeta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq c \int_0^t |\zeta_1(s) - \zeta_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds.$$

En réitérant  $m$  fois l'inégalité précédente, nous obtenons

$$|\mathcal{L}^m \zeta_1 - \mathcal{L}^m \zeta_2|_{0, L^2(\Gamma_3)}^2 \leq \frac{(cT)^m}{m!} |\zeta_1 - \zeta_2|_{0, L^2(\Gamma_3)}^2.$$

Pour  $m$  assez grand l'opérateur  $\mathcal{L}^m$  est un contractant sur l'espace de Banach  $C(0, T; L^2(\Gamma_3))$ , donc  $\mathcal{L}$  a un point fixe unique  $\zeta^* \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$ .  $\square$

Maintenant, nous pouvons établir la démonstration du Théorème 4.1.

**Démonstration du Théorème 4.1.**

Soit  $\zeta^* \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$  le point fixe de l'opérateur  $\mathcal{L}$  donné par (4.80). Pour  $\zeta = \zeta^*$ , nous posons  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_{\zeta^*}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}_{\zeta^*}$ ,  $\varphi^* = \varphi_{\zeta^*}$  et  $\mathbf{D}^* = \mathbf{D}_{\zeta^*}$ . Nous déduisons que  $(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*, \varphi^*, \mathbf{D}^*)$  est la solution unique de PV1 $_{\zeta^*}$  qui satisfait (4.35) – (4.38). En outre pour tout  $t \in [0, T]$ , nous avons

$$\mathcal{L}\zeta^*(t) = \zeta^*(t),$$

donc, en combinant la dernière égalité avec (4.80) afin de voir que

$$\zeta^*(t) = -k_0 v^* \int_0^t \sigma_\nu^*(s) ds,$$

alors que

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}^*(t) &= -k_0 v^* \sigma_\nu^*(t) \\ &= k_0 v^* p_\nu(u_\nu^* - g - \zeta^*), \end{aligned}$$

avec

$$\zeta^*(0) = 0.$$

Des hypothèses sur  $p_\nu$  et la régularité de  $\mathbf{u}^*$  et  $\zeta^*$ , nous déduisons que

$$\zeta^* \in C^1(0, T; L^2(\Gamma_3)).$$

Nous concluons que  $\zeta^*$  est une solution unique de (4.33) avec  $\zeta^*(0) = 0$  et satisfait la régularité (4.39).

Ce qui termine la démonstration du Théorème 4.1.  $\square$

## 4.4 Formulation variationnelle approchée

Dans cette section, nous introduisons un schéma numérique discrète du Problème PV1. Partout ci-dessous, nous supposons que les conditions (4.11) – (4.21) sont vérifiées. Ainsi, il résulte du Théorème 4.1 que le Problème PV1 admet une unique solution. Plus précisément, nous nous intéressons à la résolution du Problème PV1 sur un intervalle de temps fini  $[0, T]$ , avec  $T > 0$  arbitraire mais fixé. Ainsi, soit  $N$ , un entier positif; nous définissons la taille du pas de temps  $k = \frac{T}{N}$  et nous considérons la discrétisation temporelle uniforme

$$t_n = nk, \quad 0 \leq n \leq N,$$

où  $N$  est un entier suffisamment grand. Pour une fonction continue  $v(t)$  à valeurs dans un espace fonctionnel, nous écrivons  $v_j = v(t_j)$ ,  $0 \leq j \leq N$ . Pour la discrétisation spatiale, nous considérons un domaine polygonal  $\Omega$ .

Pour la discrétisation des intégrales du Problème PV1, nous utilisons la méthode des rectangles

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} v(s) ds = kv_j.$$

Soient  $\mathcal{H}^h$  et  $B^h$  les espaces des éléments finis des constantes par morceaux. Les espaces  $\mathcal{H}$  et  $L^2(\Gamma_3)$  sont approximés par  $\mathcal{H}^h$  et  $B^h$ , respectivement.

Les espaces  $V$  et  $W$  sont approximés respectivement par les espaces des éléments finis suivants :

$$V^h = \left\{ \mathbf{v}^h \in [C(\bar{\Omega})]^d \mid \mathbf{v}^h|_K \in [P_1(K)]^d \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}^h = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\},$$

$$W^h = \left\{ \phi^h \in C(\bar{\Omega}) \mid \phi^h|_K \in P_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \phi^h = 0 \text{ sur } \Gamma_a \right\},$$

où  $\mathcal{T}_h$  est un élément issu de la triangularisation de  $\bar{\Omega}$ ,  $P_1(K)$  est l'espace des polynômes de degré plus petit ou égal à un sur  $K$  et  $h$  désigne le paramètre de discrétisation spatiale qui est défini comme

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(K),$$

où  $\text{diam}(K) = \max \{|x - y|; x, y \in K\}$ .

Pour tout  $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{H}$ , nous notons  $\mathcal{P}_{\mathcal{H}^h} \boldsymbol{\tau}$  sa projection orthogonale des éléments finis sur  $\mathcal{H}^h$ ,

$$(\mathcal{P}_{\mathcal{H}^h} \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}^h)_{\mathcal{H}} = (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}^h)_{\mathcal{H}} \quad \forall \boldsymbol{\tau}^h \in \mathcal{H}^h.$$

Il est commode d'introduire le champ de vitesse  $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{u}}(t)$  donc  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 + \int_0^t \mathbf{v}(s)ds$ ,  $t \in [0, T]$ . Il résulte du Théorème 4.1 que  $\mathbf{v} \in C(0, T; V)$ , et pour tout  $t \in [0, T]$ , nous avons

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(t)) + \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{M}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))ds + \mathcal{E}^*\nabla\varphi(t), \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} & (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{v}(t)))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}, \zeta(t)) - j(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t), \zeta(t)) \\ & \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, \end{aligned} \quad (4.88)$$

Soit  $\mathbf{u}_0^h \in V^h$  une approximation par des éléments finis de  $\mathbf{u}_0$ .

Nous considérons maintenant le problème variationnel approché suivant.

**Problem PV1<sup>hk</sup>.** *Trouver un champ des vitesses discret  $\mathbf{v}^{hk} = \{\mathbf{v}_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset V^h$ , un champ des contraintes discret  $\boldsymbol{\sigma}^{hk} = \{\boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset \mathcal{H}^h$ , un champ de potentiel électrique discret  $\varphi^{hk} = \{\varphi_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset W^h$  et une fonction d'usure discrète  $\zeta^{hk} = \{\zeta_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset B^h$  tels que*

$$\boldsymbol{\sigma}_0^h = \mathcal{P}_{\mathcal{H}^h}\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0^h) + \mathcal{P}_{\mathcal{H}^h}\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0^h) + \mathcal{P}_{\mathcal{H}^h}\mathcal{E}^*\nabla\varphi_0^h, \quad (4.89)$$

$$(\boldsymbol{\sigma}_0^h, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \mathbf{v}_0^h))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}_0^h, \mathbf{v}^h, 0) - j(\mathbf{u}_0^h, \mathbf{v}_0^h, 0) \quad (4.90)$$

$$\geq (\mathbf{f}_0, \mathbf{v}^h - \mathbf{v}_0^h)_V \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h,$$

$$(\mathbf{B}\nabla\varphi_0^h, \nabla\phi^h)_H - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0^h), \nabla\phi^h)_H \quad (4.91)$$

$$= (q_0, \phi^h)_W \quad \forall \phi^h \in W^h,$$

et pour  $n \geq 1$ ,

$$\boldsymbol{\sigma}_n^{hk} = \mathcal{P}_{\mathcal{H}^h}\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_n^{hk}) + \mathcal{P}_{\mathcal{H}^h}\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}) + \mathcal{P}_{\mathcal{H}^h}\mathcal{E}^*\nabla\varphi_n^{hk} + k \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{P}_{\mathcal{H}^h}(\mathcal{R}_n)_j^{hk} \quad (4.92)$$

$$(\boldsymbol{\sigma}_n^{hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \mathbf{v}_n^{hk}))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}, \mathbf{v}^h, \zeta_n^{hk}) - j(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}, \mathbf{v}_n^{hk}, \zeta_n^{hk}) \quad (4.93)$$

$$\geq (\mathbf{f}_n, \mathbf{v}^h - \mathbf{v}_n^{hk})_V \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h,$$

$$(\mathbf{B}\nabla\varphi_n^{hk}, \nabla\phi^h)_H - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}), \nabla\phi^h)_H \quad (4.94)$$

$$= (q_n, \phi^h)_W \quad \forall \phi^h \in W^h,$$

$$\zeta_n^{hk} = k k_0 v^* \sum_{j=0}^{n-1} p_{\nu} (u_{\nu j}^{hk} - g - \zeta_j^{hk}), \quad (4.95)$$



Ici, nous avons utilisé les notations suivantes

$$\mathbf{u}_0^{hk} = \mathbf{u}_0^h, \mathbf{v}_0^{hk} = \mathbf{v}_0^h, \boldsymbol{\sigma}_0^{hk} = \boldsymbol{\sigma}_0^h, \varphi_0^{hk} = \varphi_0^h \text{ et } \zeta_0^{hk} = \zeta_0^h = \zeta_0 = 0.$$

Nous utilisons le champ des déplacements discret suivant

$$\mathbf{u}_n^{hk} = \mathbf{u}_0^h + k \sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j^{hk} \quad n \geq 1, \quad (4.96)$$

Nous utilisons aussi les notations

$$\begin{cases} (\mathcal{R}_n)_j^{hk} = \mathcal{M}(t_n - t_j) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j^{hk}), \\ (\mathcal{R}_n)(s) = \mathcal{M}(t_n - s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \\ (\mathcal{R}_n)_j = \mathcal{M}(t_n - t_j) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j). \end{cases}$$

Maintenant, nous annonçons le résultat d'existence et d'unicité suivant.

**Théorème 4.10.** *Supposons que les conditions énoncées dans le Théorème 4.1 soient satisfaites. Alors le problème  $PV1^{hk}$  a une solution unique.*

**Preuve.** Nous montrons d'abord que (4.89)–(4.91) détermine de façon unique  $\boldsymbol{\sigma}_0^h \in \mathcal{H}^h$ ,  $\mathbf{v}_0^h \in V^h$  et  $\varphi_0^h \in W^h$ . D'un analogue discret du Lemme 4.5, il s'ensuit que (4.91) admet une solution unique  $\varphi_0^h \in W^h$ . En combinant maintenant (4.89) et (4.90), nous obtenons une équation variationnelle elliptique qui admet une solution unique  $\mathbf{v}_0^h \in V^h$ .  $\boldsymbol{\sigma}_0^h \in \mathcal{H}^h$  est alors calculé à partir de (4.89). Ensuite, nous montrons qu'avec  $\{(\boldsymbol{\sigma}_j^{hk}, \mathbf{v}_j^{hk}, \varphi_j^{hk}, \zeta_j^{hk})\}_{j \leq n-1} \subset \mathcal{H}^h \times V^h \times W^h \times B^h$  connu, (4.92)–(4.95) détermine de manière unique  $(\boldsymbol{\sigma}_n^{hk}, \mathbf{v}_n^{hk}, \varphi_n^{hk}, \zeta_n^{hk}) \subset \mathcal{H}^h \times V^h \times W^h \times B^h$ . Étant donné  $\{(\mathbf{u}_j^{hk}, \zeta_j^{hk})\}_{j \leq n-1} \in V^h \times B^h$ , un analogue discret du Lemme 4.5 montre que (4.94) admet une solution unique  $\varphi_n^{hk} \in W^h$  et  $\zeta_n^{hk} \in B^h$  est calculé à partir de (4.95). En combinant (4.92) et (4.93), nous obtenons

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_n^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \mathbf{v}_n^{hk}))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}, \mathbf{v}^h, \zeta_n^{hk}) - j(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}, \mathbf{v}_n^{hk}, \zeta_n^{hk}) \\ \geq (\mathbf{r}_n, \mathbf{v}^h - \mathbf{v}_n^{hk})_V \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h, \end{aligned} \quad (4.97)$$

où

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_n, \mathbf{v}^h)_V = & (\mathbf{f}_n, \mathbf{v}^h)_V - (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}) + \mathcal{E}^* \nabla \varphi_n^{hk} \\ & + k \sum_{j=0}^{n-1} (\mathcal{R}_n)_j^{hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Par un résultat standard sur les inéquation variationnelles elliptiques, il existe un unique  $\mathbf{v}_n^{hk} \in V^h$  satisfaisant (4.97). Enfin, nous calculons  $\boldsymbol{\sigma}_n^{hk}$  à partir de (4.92).  $\square$

Nous passons maintenant à l'analyse de l'erreur entre les solutions des Problèmes PV1 et PV1<sup>hk</sup>.

## 4.5 Estimation d'erreur

Cette section est consacré à la dérivation des estimations d'erreur pour la solution discrète. Nous supposons les hypothèses de régularité de la solution suivantes :

$$(\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi) \in C(0, T; V \times \mathcal{H}_1 \times W), \quad (\mathbf{u}, \zeta) \in C^1(0, T; V \times L^2(\Gamma_3)) \quad (4.99)$$

$$(\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi) \in C(0, T; H^2(\Omega)^d \times H^1(\Omega)^{d \times d} \times H^2(\Omega)), \quad (4.100)$$

$$\mathbf{v} \in C(0, T; H^2(\Gamma_3)^d), \quad \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \in C(0, T; L^2(\Gamma)^d), \quad (4.101)$$

$$\mathbf{u}_0 \in H^2(\Omega)^d. \quad (4.102)$$

Dans ce qui suit,  $c$  désigne une constante positive générique dont la valeur peut changer d'une occurrence à l'autre, mais est indépendante des paramètres de discrétisation  $h$  et  $k$ .

Premièrement, nous faisons une estimation d'erreur sur le potentiel électrique.

Nous combinons (4.31) et (4.32), nous avons pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} & (\mathbf{B} \nabla \varphi(t), \nabla \phi)_H - (\mathcal{E} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \nabla \phi)_H \\ & = (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, \end{aligned} \quad (4.103)$$

en appliquant (4.103) au temps  $t = t_n$  et  $\phi = \phi^h$ , nous obtenons pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} & (\mathbf{B} \nabla \varphi_n, \nabla \phi^h)_H - (\mathcal{E} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n), \nabla \phi^h)_H \\ & = (q_n, \phi^h)_W \quad \forall \phi^h \in W^h, \end{aligned} \quad (4.104)$$

nous soustrayons (4.94) de (4.104), pour tout  $\phi^h \in W^h$ , nous voyons que

$$(\mathbf{B} \nabla \varphi_n - \mathbf{B} \nabla \varphi_n^{hk}, \nabla \phi^h)_H - (\mathcal{E} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n) - \mathcal{E} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}), \nabla \phi^h)_H = 0,$$

donc, nous pouvons écrire

$$(\mathbf{B}\nabla\varphi_n - \mathbf{B}\nabla\varphi_n^{hk}, \nabla(\phi^h - \varphi_n^{hk}))_H - (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_n) - \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}), \nabla(\phi^h - \varphi_n^{hk}))_H = 0,$$

alors que, en utilisant l'écriture  $\phi^h = \phi^h + \varphi_n - \varphi_n$ , nous voyons que

$$\begin{aligned} & (\mathbf{B}\nabla\varphi_n - \mathbf{B}\nabla\varphi_n^{hk}, \nabla(\varphi_n - \varphi_n^{hk}))_H - (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_n) - \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}), \nabla(\varphi_n - \varphi_n^{hk}))_H \\ &= (\mathbf{B}\nabla\varphi_n - \mathbf{B}\nabla\varphi_n^{hk}, \nabla(\varphi_n - \phi^h))_H - (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_n) - \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}), \nabla(\varphi_n - \phi^h))_H. \end{aligned}$$

En utilisant (4.13) pour voir que

$$\begin{aligned} m_B |\varphi_n - \varphi_n^{hk}|_W^2 &\leq (\mathbf{B}\nabla\varphi_n - \mathbf{B}\nabla\varphi_n^{hk}, \nabla(\varphi_n - \varphi_n^{hk}))_H \\ &= (\mathbf{B}\nabla\varphi_n - \mathbf{B}\nabla\varphi_n^{hk}, \nabla(\varphi_n - \phi^h))_H \\ &\quad + (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_n) - \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}), \nabla(\varphi_n - \varphi_n^{hk}))_H \\ &\quad - (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_n) - \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}), \nabla(\varphi_n - \phi^h))_H, \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité suivante

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2 \quad \forall \epsilon > 0, \quad (4.105)$$

nous obtenons

$$|\varphi_n - \varphi_n^{hk}|_W^2 \leq c \left( |\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}^{hk}|_V^2 + |\varphi_n - \phi^h|_W^2 \right). \quad (4.106)$$

De (4.103) au temps  $t = 0$  avec  $\phi = \phi^h$ , nous avons

$$\begin{aligned} & (\mathbf{B}\nabla\varphi_0, \nabla\phi^h)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_0), \nabla\phi^h)_H \\ &= (q_0, \phi^h)_W \quad \forall \phi^h \in W^h, \end{aligned}$$

nous soustrayons cette égalité de (4.91) pour obtenir

$$(\mathbf{B}\nabla\varphi_0 - \mathbf{B}\nabla\varphi_0^h, \nabla\phi^h)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_0) - \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_0^h), \nabla\phi^h)_H = 0,$$

alors que, nous pouvons écrire

$$(\mathbf{B}\nabla\varphi_0 - \mathbf{B}\nabla\varphi_0^h, \nabla(\phi^h - \varphi_0^h))_H - (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_0) - \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_0^h), \nabla(\phi^h - \varphi_0^h))_H = 0,$$

nous utilisons l'écriture  $\phi^h = \phi^h - \varphi_0 + \varphi_0$  pour constater

$$\begin{aligned} & (\mathbf{B}\nabla\varphi_0 - \mathbf{B}\nabla\varphi_0^h, \nabla(\varphi_0 - \varphi_0^h))_H - (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_0) - \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_0^h), \nabla(\varphi_0 - \varphi_0^h))_H \\ &= (\mathbf{B}\nabla\varphi_0 - \mathbf{B}\nabla\varphi_0^h, \nabla(\varphi_0 - \phi^h))_H - (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_0) - \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_0^h), \nabla(\varphi_0 - \phi^h))_H. \end{aligned}$$

En employant (4.13) pour voir que

$$\begin{aligned} m_B |\varphi_0 - \varphi_0^h|_W^2 &\leq (\mathbf{B}\nabla\varphi_0 - \mathbf{B}\nabla\varphi_0^h, \nabla(\varphi_0 - \varphi_0^h))_H \\ &= (\mathbf{B}\nabla\varphi_0 - \mathbf{B}\nabla\varphi_0^h, \nabla(\varphi_0 - \phi^h))_H \\ &\quad + (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_0) - \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_0^h), \nabla(\varphi_0 - \varphi_0^h))_H \\ &\quad - (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_0) - \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_0^h), \nabla(\varphi_0 - \phi^h))_H, \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (4.105), nous trouvons

$$|\varphi_0 - \varphi_0^h|_W^2 \leq c \left( |\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h|_V^2 + |\varphi_0 - \phi^h|_W^2 \right). \quad (4.107)$$

Dans ce qui suit, nous procédons à l'estimation des erreurs sur le champ de déplacements.

Nous énonçons maintenant deux relations que nous allons utiliser dans l'estimation d'erreur ( voir [57] )

$$|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}|_V^2 \leq ck^2 + |\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h|_V^2 + ck \sum_{j=1}^n |\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_j^{hk}|_V^2, \quad (4.108)$$

$$|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}^{hk}|_V^2 \leq ck^2 + |\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h|_V^2 + ck \sum_{j=0}^{n-1} |\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_j^{hk}|_V^2. \quad (4.109)$$

Nous notons pour tout  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \theta_n^{hk}(\mathcal{R}_n) &= \int_0^{t_n} (\mathcal{R}_n)(s) ds - \sum_{j=0}^{n-1} k (\mathcal{R}_n)_j^{hk} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left[ (\mathcal{R}_n)(s) - (\mathcal{R}_n)_j \right] ds \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n-1} k \left[ (\mathcal{R}_n)_j - (\mathcal{R}_n)_j^{hk} \right], \end{aligned}$$

alors que

$$\theta_n^{hk}(\mathcal{R}_n) = I_n + I_n^{hk}, \quad (4.110)$$

où

$$I_n = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} [(\mathcal{R}_n)(s) - (\mathcal{R}_n)_j] ds, \quad I_n^{hk} = \sum_{j=0}^{n-1} k [(\mathcal{R}_n)_j - (\mathcal{R}_n)_j^{hk}].$$

Nous avons

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} [\mathcal{M}(t_n - s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) - \mathcal{M}(t_n - t_j)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j)] ds \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} [\mathcal{M}(t_n - s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) - \mathcal{M}(t_n - s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j)] ds \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} [\mathcal{M}(t_n - s) - \mathcal{M}(t_n - t_j)] \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j) ds. \end{aligned}$$

Nous employons l'hypothèse (4.16), (4.99) et (1.2), nous obtenons

$$|I_n|_{\mathcal{H}} \leq c \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} [|\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_j|_V + |\mathcal{M}(t_n - s) - \mathcal{M}(t_n - t_j)|_{\mathcal{H}_\infty}] ds.$$

De (4.99) et (4.16) nous voyons que cette somme peut être bornée par  $ck$  où la constante  $c$  est proportionnelle à  $|\dot{\mathbf{u}}|_{C(0,T;V)} + |\dot{\mathcal{M}}|_{C(0,T;\mathcal{H}_\infty)}$ . Donc

$$|I_n|_{\mathcal{H}}^2 \leq ck^2. \quad (4.111)$$

Aussi, nous avons

$$I_n^{hk} = \sum_{j=0}^{n-1} k [\mathcal{M}(t_n - t_j)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j) - \mathcal{M}(t_n - t_j)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j^{hk})],$$

de même, de (4.16) et (1.2), nous trouvons

$$|I_n^{hk}|_{\mathcal{H}} \leq ck \sum_{j=0}^{n-1} |\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}|_V. \quad (4.112)$$

Nous rassemblons (4.110) – (4.112) pour voir que

$$|\theta_n^{hk}(\mathcal{R}_n)|_{\mathcal{H}}^2 \leq ck^2 + ck \sum_{j=0}^{n-1} |\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}|_V^2. \quad (4.113)$$

En outre, nous appliquons (4.87) au temps  $t = t_n$  afin de voir que

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_n) + \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n) + \int_0^{t_n} \mathcal{M}(t_n - s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) ds + \mathcal{E}^* \nabla \varphi_n. \quad (4.114)$$

En utilisant (4.114) et (4.92), nous pouvons écrire pour tout  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk} &= (I - \mathcal{P}_{\mathcal{H}^h}) \boldsymbol{\sigma}_n + \mathcal{P}_{\mathcal{H}^h} \boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk} \\ &= (I - \mathcal{P}_{\mathcal{H}^h}) \boldsymbol{\sigma}_n + \mathcal{P}_{\mathcal{H}^h} \left[ (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_n) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_n^{hk})) + (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n) - \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{n-1}^{hk})) \right. \\ &\quad \left. + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_n - \mathcal{E}^* \nabla \varphi_n^{hk}) + \boldsymbol{\theta}_n^{hk}(\mathcal{R}_n) \right]. \end{aligned}$$

Ici, nous avons utilisé le symbole  $I$  pour l'application d'identité sur  $\mathcal{H}$ . En utilisant les hypothèses sur les opérateurs  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{E}$ , ainsi que l'inégalité  $|\mathcal{P}_{\mathcal{H}^h} \boldsymbol{\tau}|_{\mathcal{H}} \leq |\boldsymbol{\tau}|_{\mathcal{H}}$ , nous avons

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}|_{\mathcal{H}}^2 &\leq c \left[ |(I - \mathcal{P}_{\mathcal{H}^h}) \boldsymbol{\sigma}_n|_{\mathcal{H}}^2 + |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n^{hk}|_V^2 \right] \\ &\quad + c \left[ |\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}^{hk}|_V^2 + |\varphi_n - \varphi_n^{hk}|_W^2 + |\boldsymbol{\theta}_n^{hk}(\mathcal{R}_n)|_{\mathcal{H}}^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.115)$$

De même, pour  $n = 0$ , en utilisant (4.87) au temps  $t = 0$  et (4.89), nous avons

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_0^h &= (I - \mathcal{P}_{\mathcal{H}^h}) \boldsymbol{\sigma}_0 + \mathcal{P}_{\mathcal{H}^h} \boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_0^h \\ &= (I - \mathcal{P}_{\mathcal{H}^h}) \boldsymbol{\sigma}_0 + \mathcal{P}_{\mathcal{H}^h} \left[ (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0^h)) + (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0) - \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0^h)) \right. \\ &\quad \left. + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_0 - \mathcal{E}^* \nabla \varphi_0^h) \right]. \end{aligned}$$

et d'où

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_0^h|_{\mathcal{H}}^2 &\leq c \left[ |(I - \mathcal{P}_{\mathcal{H}^h}) \boldsymbol{\sigma}_0|_{\mathcal{H}}^2 + |\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_0^h|_V^2 \right] \\ &\quad + c \left[ |\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h|_V^2 + |\varphi_0 - \varphi_0^h|_W^2 \right] \end{aligned} \quad (4.116)$$

Nous combinons (4.87) et (4.88), en prenant  $t = t_n$ , pour tout  $\mathbf{v} \in V$  et  $n \geq 1$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} &\left( \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_n) + \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n) + \int_0^{t_n} (\mathcal{R}_n)(s) ds + \mathcal{E}^* \nabla \varphi_n, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_n) \right)_{\mathcal{H}} \\ &\quad + j(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}, \zeta_n) - j(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n, \zeta_n) \geq (\mathbf{f}_n, \mathbf{v} - \mathbf{v}_n)_V. \end{aligned} \quad (4.117)$$

En combinant (4.92) et (4.93) afin d'écrire pour tout  $\mathbf{v}^h \in V^h$  et  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} &(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_n^{hk}) + \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}) + \mathcal{E}^* \nabla \varphi_n^{hk} + k \sum_{j=0}^{n-1} (\mathcal{R}_n)_j^{hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \mathbf{v}_n^{hk}))_{\mathcal{H}} \\ &\quad + j(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}, \mathbf{v}^h, \zeta_n^{hk}) - j(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}, \mathbf{v}_n^{hk}, \zeta_n^{hk}) \geq (\mathbf{f}_n, \mathbf{v}^h - \mathbf{v}_n^{hk})_V. \end{aligned} \quad (4.118)$$

De (4.11) l'hypothèse sur  $\mathcal{A}$ , nous avons pour tout  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{A}} |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n^{hk}|_V^2 &\leq (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_n) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_n^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n^{hk}))_{\mathcal{H}} \\ &= (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_n), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n^{hk}))_{\mathcal{H}} \\ &\quad - (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_n^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n^{hk}))_{\mathcal{H}} \\ &\quad + (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_n^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_n^{hk} - \mathbf{v}_n))_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Nous utilisons (4.117) avec  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_n^{hk}$  pour estimer le premier terme et (4.118) pour estimer le troisième terme, nous ajoutons  $(\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}} - (\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}}$  au deuxième côté, après quelques opérations algébriques élémentaires, nous obtenons

$$\begin{aligned} &m_{\mathcal{A}} |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n^{hk}|_V^2 \tag{4.119} \\ &\leq (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_n) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_n^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n) - \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}) + \theta_n^{hk}(\mathcal{R}_n) \\ &\quad + \mathcal{E}^* \nabla \varphi_n - \mathcal{E}^* \nabla \varphi_n^{hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}} - (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n) - \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}) + \theta_n^{hk}(\mathcal{R}_n) \\ &\quad + \mathcal{E}^* \nabla \varphi_n - \mathcal{E}^* \nabla \varphi_n^{hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n^{hk}))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}, \mathbf{v}^h, \zeta_n^{hk}) - j(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}, \mathbf{v}_n, \zeta_n^{hk}) \\ &\quad + j(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n^{hk}, \zeta_n) - j(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n, \zeta_n) + j(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}, \mathbf{v}_n, \zeta_n^{hk}) - j(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}, \mathbf{v}_n^{hk}, \zeta_n^{hk}) + \mathcal{R}_{1,n}(\mathbf{v}^h), \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{R}_{1,n}(\mathbf{v}^h) = -(\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}} + (\mathbf{f}_n, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}^h)_V. \tag{4.120}$$

De (4.25) la définition de  $j$ , nous avons pour tout  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} &|j(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n^{hk}, \zeta_n) - j(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n, \zeta_n) + j(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}, \mathbf{v}_n, \zeta_n^{hk}) - j(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}, \mathbf{v}_n^{hk}, \zeta_n^{hk})| \\ &= \left| \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_{n\nu} - g - \zeta_n) v_{n\nu}^{hk} da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_{n\nu} - g - \zeta_n) |\mathbf{v}_{n\tau}^{hk} - \mathbf{v}^*| da \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_{n\nu} - g - \zeta_n) v_{n\nu} da - \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_{n\nu} - g - \zeta_n) |\mathbf{v}_{n\tau} - \mathbf{v}^*| da \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_{n-1\nu}^{hk} - g - \zeta_n^{hk}) v_{n\nu} da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_{n-1\nu}^{hk} - g - \zeta_n^{hk}) |\mathbf{v}_{n\tau} - \mathbf{v}^*| da \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_{n-1\nu}^{hk} - g - \zeta_n^{hk}) v_{n\nu}^{hk} da - \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_{n-1\nu}^{hk} - g - \zeta_n^{hk}) |\mathbf{v}_{n\tau}^{hk} - \mathbf{v}^*| da \right| \\ &= \left| \int_{\Gamma_3} [p_\nu(u_{n\nu} - g - \zeta_n) - p_\nu(u_{n-1\nu}^{hk} - g - \zeta_n^{hk})] [v_{n\nu}^{hk} - v_{n\nu}] da \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\Gamma_3} \left[ p_\tau(u_{n\nu} - g - \zeta_n) - p_\tau(u_{n-1\nu}^{hk} - g - \zeta_n^{hk}) \right] \left[ |\mathbf{v}_{n\tau}^{hk} - \mathbf{v}^*| - |\mathbf{v}_{n\tau} - \mathbf{v}^*| \right] da \\
 & \leq \int_{\Gamma_3} \left| p_\nu(u_{n\nu} - g - \zeta_n) - p_\nu(u_{n-1\nu}^{hk} - g - \zeta_n^{hk}) \right| |v_{n\nu}^{hk} - v_{n\nu}| da \\
 & \quad + \int_{\Gamma_3} \left| p_\tau(u_{n\nu} - g - \zeta_n) - p_\tau(u_{n-1\nu}^{hk} - g - \zeta_n^{hk}) \right| |\mathbf{v}_{n\tau}^{hk} - \mathbf{v}_{n\tau}| da
 \end{aligned}$$

De (4.15) et l'inégalité (1.8) avec l'inégalité  $|u_r| \leq |\mathbf{u}|$  ( $r = \nu, \tau$ )  $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ , nous trouvons pour tout  $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
 & |j(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n^{hk}, \zeta_n) - j(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n, \zeta_n) + j(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}, \mathbf{v}_n, \zeta_n^{hk}) - j(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}, \mathbf{v}_n^{hk}, \zeta_n^{hk})| \quad (4.121) \\
 & \leq (L_\nu + L_\tau) c_0^2 |\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}^{hk}|_V |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n^{hk}|_V \\
 & \quad + (L_\nu + L_\tau) c_0 |\zeta_n - \zeta_n^{hk}|_{L^2(\Gamma_3)} |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n^{hk}|_V.
 \end{aligned}$$

De même, nous avons pour tout  $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
 & |j(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}, \mathbf{v}^h, \zeta_n^{hk}) - j(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}, \mathbf{v}_n, \zeta_n^{hk})| \\
 & = \left| \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_{n-1\nu}^{hk} - g - \zeta_n^{hk}) v_\nu^h da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_{n-1\nu}^{hk} - g - \zeta_n^{hk}) |\mathbf{v}_\tau^h - \mathbf{v}^*| da \right. \\
 & \quad \left. - \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_{n-1\nu}^{hk} - g - \zeta_n^{hk}) v_{n\nu} da - \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_{n-1\nu}^{hk} - g - \zeta_n^{hk}) |\mathbf{v}_{n\tau} - \mathbf{v}^*| da \right| \\
 & \leq \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_{n-1\nu}^{hk} - g - \zeta_n^{hk}) |v_\nu^h - v_{n\nu}| da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_{n-1\nu}^{hk} - g - \zeta_n^{hk}) |\mathbf{v}_\tau^h - \mathbf{v}_{n\tau}| da
 \end{aligned}$$

En employant (4.15) et (1.8) afin de déduire que

$$|j(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}, \mathbf{v}^h, \zeta_n^{hk}) - j(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}, \mathbf{v}_n, \zeta_n^{hk})| \leq (m_\nu + m_\tau) c_0 |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}^h|_V^2. \quad (4.122)$$

Nous substituons (4.121) – (4.122) dans (4.119) et en utilisant les hypothèses sur  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{E}$ , l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité (4.105), nous obtenons pour tout  $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n^{hk}|_V^2 & \leq c \left( |\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}^{hk}|_V^2 + |\varphi_n - \varphi_n^{hk}|_W^2 + |\zeta_n - \zeta_n^{hk}|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \right) \quad (4.123) \\
 & \quad + c \left( |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}^h|_V^2 + |\theta_n^{hk}(\mathcal{R}_n)|_{\mathcal{H}}^2 \right) + |\mathcal{R}_{1,n}(\mathbf{v}^h)|.
 \end{aligned}$$

De même, nous appliquons (4.87) – (4.88) au  $t = 0$  avec la condition initiale  $\zeta_0 = 0$ , pour tout  $\mathbf{v} \in V$ , nous trouvons

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0) + \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0) + \mathcal{E}^*\nabla\varphi_0, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0))_{\mathcal{H}} \quad (4.124)$$



$$+j(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}, 0) - j(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, 0) \geq (\mathbf{f}_0, \mathbf{v} - \mathbf{v}_0)_V.$$

En utilisant (4.89) – (4.90) avec  $\zeta_0^h = 0$  afin de voir que pour tout  $\mathbf{v}^h \in V^h$

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0^h) + \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0^h) + \mathcal{E}^*\nabla\varphi_0^h, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \mathbf{v}_0^h))_{\mathcal{H}} \quad (4.125)$$

$$+j(\mathbf{u}_0^h, \mathbf{v}^h, 0) - j(\mathbf{u}_0^h, \mathbf{v}_0^h, 0) \geq (\mathbf{f}_0, \mathbf{v}^h - \mathbf{v}_0^h)_V.$$

Nous employons (4.11), nous avons

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{A}} |\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_0^h|_V^2 &\leq (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0^h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_0^{hk}))_{\mathcal{H}} \\ &= (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_0^h))_{\mathcal{H}} \\ &\quad - (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0^h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_0^h))_{\mathcal{H}} \\ &\quad + (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0^h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0^h - \mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

En utilisant (4.124) avec  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0^h$  pour estimer le premier terme et (4.125) pour estimer le troisième terme, et en additionnant  $(\boldsymbol{\sigma}_0, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}} - (\boldsymbol{\sigma}_0, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}}$  au second côté, nous obtenons

$$\begin{aligned} &m_{\mathcal{A}} |\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_0^h|_V^2 \quad (4.126) \\ &\leq (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0^h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0) - \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0^{hk})) \\ &\quad + \mathcal{E}^*\nabla\varphi_0 - \mathcal{E}^*\nabla\varphi_0^h, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}^h))_{\mathcal{H}} - (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0) - \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0^h) \\ &\quad + \mathcal{E}^*\nabla\varphi_0 - \mathcal{E}^*\nabla\varphi_0^{hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_0^h))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}_0^h, \mathbf{v}^h, 0) - j(\mathbf{u}_0^h, \mathbf{v}_0, 0) \\ &\quad + j(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0^h, 0) - j(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, 0) + j(\mathbf{u}_0^h, \mathbf{v}_0, 0) - j(\mathbf{u}_0^h, \mathbf{v}_0^h, 0) + \mathcal{R}_{1,0}(\mathbf{v}^h). \end{aligned}$$

De (4.25) et par le même argument que nous avons utilisé dans (4.121), nous trouvons

$$\begin{aligned} &|j(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0^h, 0) - j(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, 0) + j(\mathbf{u}_0^h, \mathbf{v}_0, 0) - j(\mathbf{u}_0^h, \mathbf{v}_0^h, 0)| \quad (4.127) \\ &\leq (L_{\nu} + L_{\tau}) c_0^2 |\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h|_V |\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_0^h|_V. \end{aligned}$$

De même, En employant un argument similaire utilisé dans (4.122) afin de voir que

$$|j(\mathbf{u}_0^h, \mathbf{v}^h, 0) - j(\mathbf{u}_0^h, \mathbf{v}_0, 0)| \leq (m_{\nu} + m_{\tau}) c_0 |\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}^h|_V^2. \quad (4.128)$$

Nous substituons (4.127) – (4.128) dans (4.126) et en utilisant (4.11) – (4.12), l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité (4.105), nous obtenons

$$|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_0^h|_V^2 \leq c \left( |\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h|_V^2 + |\varphi_0 - \varphi_0^h|_W^2 + |\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}^h|_V^2 \right) + |\mathcal{R}_{1,0}(\mathbf{v}^h)|. \quad (4.129)$$

En combinant (4.107) et (4.116) avec (4.129), il est facile de voir que

$$\begin{aligned} & |\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_0^h|_{\mathcal{H}}^2 + |\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_0^h|_V^2 + |\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h|_V^2 + |\varphi_0 - \varphi_0^h|_W^2 \\ & \leq c \left( |\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h|_V^2 + |\varphi_0 - \varphi_0^h|_W^2 + |\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_0^h|_V^2 + |(I - \mathcal{P}_{\mathcal{H}^h}) \boldsymbol{\sigma}_0|_{\mathcal{H}}^2 \right) + |\mathcal{R}_{1,0}(\mathbf{v}^h)|. \end{aligned} \quad (4.130)$$

D'autre part, pour la fonction d'usure, nous employons (4.33) au temps  $t = t_n$ , nous obtenons pour tout  $n \geq 1$

$$\zeta_n = k_0 v^* \int_0^{t_n} p_\nu (u_\nu(s) - g - \zeta(s)) ds, \quad (4.131)$$

nous soustrayons (4.95) de (4.131) pour constater que

$$\zeta_n - \zeta_n^{hk} = k_0 v^* \left[ \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (p_\nu (u_\nu(s) - g - \zeta(s)) - p_\nu (u_{\nu_j}^{hk} - g - \zeta_j^{hk})) ds \right],$$

en utilisant (4.15), l'inégalité  $|u_\nu| \leq |\mathbf{u}| \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$  et l'inégalité (1.8), nous obtenons

$$\begin{aligned} |\zeta_n - \zeta_n^{hk}|_{L^2(\Gamma_3)} & \leq c \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left[ |u_\nu(s) - u_{\nu_j}^{hk}|_{L^2(\Gamma_3)} + |\zeta(s) - \zeta_j^{hk}|_{L^2(\Gamma_3)} \right] ds \\ & \leq c \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left[ |\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_j^{hk}|_{L^2(\Gamma_3)^d} + |\zeta(s) - \zeta_j^{hk}|_{L^2(\Gamma_3)} \right] ds \\ & \leq c \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left[ |\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_j^{hk}|_V + |\zeta(s) - \zeta_j^{hk}|_{L^2(\Gamma_3)} \right] ds. \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |\zeta_n - \zeta_n^{hk}|_{L^2(\Gamma_3)} & \leq c \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left[ |\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_j|_V + |\zeta(s) - \zeta_j|_{L^2(\Gamma_3)} \right] ds \\ & \quad + ck \sum_{j=0}^{n-1} \left[ |\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}|_V + |\zeta_j - \zeta_j^{hk}|_{L^2(\Gamma_3)} \right], \end{aligned}$$

la première somme peut être bornée par  $ck$  où la constante  $c$  est proportionnelle à  $|\dot{\mathbf{u}}|_{C(0,T;V)} + |\dot{\zeta}|_{C(0,T;L^2(\Gamma_3))}$ . Dans ce qui suit, nous admettons que  $c$  est ce type de constante dépendante de la solution. Ainsi

$$|\zeta_n - \zeta_n^{hk}|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq ck^2 + ck \sum_{j=0}^{n-1} |\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}|_V^2 + ck \sum_{j=0}^{n-1} |\zeta_j - \zeta_j^{hk}|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \quad (4.132)$$

En additionnant (4.106), (4.108)–(4.109), (4.113), (4.115), (4.123) et (4.132) afin d'obtenir pour tout  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} & |\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}|_{\mathcal{H}}^2 + |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n^{hk}|_V^2 + |\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}|_V^2 + |\varphi_n - \varphi_n^{hk}|_W^2 + |\zeta_n - \zeta_n^{hk}|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\ & \leq ck^2 + c|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h|_V^2 + c \left[ |(I - \mathcal{P}_{\mathcal{H}^h}) \boldsymbol{\sigma}_n|_{\mathcal{H}}^2 + |\varphi_n - \phi^h|_W^2 + |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}^h|_V^2 \right] + |\mathcal{R}_{1,n}(\mathbf{v}^h)| \\ & + ck \sum_{j=0}^{n-1} \left[ |\boldsymbol{\sigma}_j - \boldsymbol{\sigma}_j^{hk}|_{\mathcal{H}}^2 + |\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_j^{hk}|_V^2 + |\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}|_V^2 + |\varphi_j - \varphi_j^{hk}|_W^2 + |\zeta_j - \zeta_j^{hk}|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \right]. \end{aligned}$$

De cette inégalité et (4.130), en appliquant le Lemme 2.21 de Gronwall afin de voir que

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq n \leq N} \left\{ \begin{aligned} & |\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}|_{\mathcal{H}}^2 + |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n^{hk}|_V^2 + |\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}|_V^2 \\ & + |\varphi_n - \varphi_n^{hk}|_W^2 + |\zeta_n - \zeta_n^{hk}|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.133) \\ & \leq ck^2 + c|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h|_V^2 + c \max_{0 \leq n \leq N} \left[ |(I - \mathcal{P}_{\mathcal{H}^h}) \boldsymbol{\sigma}_n|_{\mathcal{H}}^2 + \inf_{\phi^h \in W^h} |\varphi_n - \phi^h|_W^2 \right. \\ & \quad \left. + \inf_{\mathbf{v}^h \in V^h} \left[ |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}^h|_V^2 + |\mathcal{R}_{1,n}(\mathbf{v}^h)| \right] \right]. \end{aligned}$$

Pour trouver une borne de  $\mathcal{R}_{1,n}(\mathbf{v}^h)$  défini en (4.120), nous intégrons par parties le premier terme afin d'obtenir

$$\mathcal{R}_{1,n}(\mathbf{v}^h) = \int_{\Omega} \text{Div} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}^h) dx - \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu})_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}^h) da + (\mathbf{f}_n, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}^h)_V.$$

En utilisant (4.22) et nous appliquons (4.3) et (4.6) au temps  $t = t_n$  afin de voir que pour tout  $n \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{1,n}(\mathbf{v}^h) & = - \int_{\Omega} \mathbf{f}_{0n} \cdot (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}^h) dx - \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_{2n} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}^h) da \\ & \quad - \int_{\Gamma_3} (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu})_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}^h) da + \int_{\Omega} \mathbf{f}_{0n} \cdot (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}^h) dx \\ & \quad + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_{2n} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}^h) da \\ & = - \int_{\Gamma_3} (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu})_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}^h) da, \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous voyons que

$$|\mathcal{R}_{1,n}(\mathbf{v}^h)| \leq |(\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu})_n|_{L^2(\Gamma_3)^d} |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}^h|_{L^2(\Gamma_3)^d}.$$

De (4.101), nous déduisons que

$$|\mathcal{R}_{1,n}(\mathbf{v}^h)| \leq c |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}^h|_{L^2(\Gamma_3)^d},$$

En combinant l'estimation précédente avec (4.133), nous trouvons

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq n \leq N} \left[ |\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}|_{\mathcal{H}} + |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n^{hk}|_V + |\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}|_V + |\varphi_n - \varphi_n^{hk}|_W + |\zeta_n - \zeta_n^{hk}|_{L^2(\Gamma_3)} \right] \\ & \leq ck + c \left\{ |\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h|_V + \max_{0 \leq n \leq N} |(I - \mathcal{P}_{\mathcal{H}^h}) \boldsymbol{\sigma}_n|_{\mathcal{H}} + \max_{0 \leq n \leq N} \inf_{\phi^h \in W^h} |\varphi_n - \phi^h|_W \right. \\ & \quad \left. + \max_{0 \leq n \leq N} \inf_{\mathbf{v}^h \in V^h} \left( |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}^h|_V + |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}^h|_{L^2(\Gamma_3)^d}^{\frac{1}{2}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Sous les hypothèses (4.100) et (4.102), nous pouvons appliquer la théorie standard de l'interpolation par élément fini (voir par exemple [7, 8, 12, 57]) afin de voir que

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h|_V & \leq ch |\mathbf{u}_0|_{H^2(\Omega)^d}, \\ \max_{0 \leq n \leq N} |\boldsymbol{\sigma}_n - \mathcal{P}_{\mathcal{H}^h} \boldsymbol{\sigma}_n|_{\mathcal{H}} & \leq ch |\boldsymbol{\sigma}|_{C(0,T;H^1(\Omega)^{d \times d})}, \\ \max_{0 \leq n \leq N} \inf_{\mathbf{v}^h \in V^h} |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}^h|_V & \leq ch |\mathbf{v}|_{C(0,T;H^2(\Omega)^d)}, \\ \max_{0 \leq n \leq N} \inf_{\mathbf{v}^h \in V^h} |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}^h|_{L^2(\Gamma_3)^d} & \leq ch^2 |\mathbf{v}|_{C(0,T;H^2(\Gamma_3)^d)}, \\ \max_{0 \leq n \leq N} \inf_{\phi^h \in W^h} |\varphi_n - \phi^h|_W & \leq ch |\varphi|_{C(0,T;H^2(\Omega))}. \end{aligned}$$

En conclusion, nous avons montré le résultat suivant.

**Théorème 4.11.** *Supposons que  $k$  est suffisamment petit. Alors, sous les hypothèses de régularité (4.99) – (4.102), nous avons l'estimation d'erreur suivante*

$$\max_{0 \leq n \leq N} \left[ |\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}|_{\mathcal{H}} + |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n^{hk}|_V + |\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}|_V + |\varphi_n - \varphi_n^{hk}|_W + |\zeta_n - \zeta_n^{hk}|_{L^2(\Gamma_3)} \right] \leq c(h + k),$$

où  $c$  est une constante dépendante d'une certaine norme de la solution.

Cette estimation d'erreur optimale achève cette section et ce chapitre.

# Chapitre 5

## Problème électro-viscoélastique avec endommagement et usure

Dans ce chapitre, nous traitons un problème de contact dans un processus quasi-statique avec frottement entre un corps de loi constitutive électro-viscoélastique avec mémoire longue et endommagement, et une fondation déformable, mobile et électriquement conductrice. L'endommagement causé par les déformations élastiques du matériau est modélisé par une variable interne du corps appelée champ d'endommagement. Nous prenons en considération l'usure des surfaces de contact. La fonction d'usure, satisfaisant la loi d'Archard.

Le problème est formulé par un système contenant d'équations et d'inéquations aux dérivées partielles, la loi de comportement du matériau avec mémoire longue et endommagement, l'équation de mouvement du corps, l'équation de conservation de la charge électrique, une inclusion du type parabolique modélisant le champ d'endommagement, une équation différentielle de la loi d'Archard modélisant le champ d'usure et les conditions aux limites auxquelles il est soumis.

Ce chapitre comporte trois sections. Dans la première section, nous présentons le problème mécanique, puis nous indiquons les hypothèses sur les données. Dans la deuxième section, nous décrivons la formulation variationnelle du problème mécanique. Enfin, dans la troisième section, nous étudions l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème mécanique. Les techniques employées sont basées sur les résultats des inéquations variationnelles et la théorie des opérateurs monotones, suivi par les arguments du point fixe.

## 5.1 Formulation mécanique du problème

Nous nous plaçons dans le cadre physique de la FIG 3.1.2. Nous considérons que le corps est électro-viscoélastique avec mémoire longue et endommagement, plus exactement nous utilisons une loi de comportement de la forme (3.5). En ce qui concerne le contact, nous modélisons par une compliance normale avec frottement et usure. Nous notons par  $K$  l'ensemble des endommagements admissibles

$$K = \{\xi \in H^1(\Omega) / 0 \leq \xi \leq 1 \text{ p.p. dans } \Omega\}.$$

Pour ce problème nous présentons la formulation classique, qui peut s'énoncer de la façon suivante.

**Problème P2.** *Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ , le champ d'endommagement  $\beta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , le champ de potentiel électrique  $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , le champ des déplacements électriques  $\mathbf{D} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  et la fonction d'usure  $\zeta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , tels que*

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \beta) + \int_0^t \mathcal{M}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))ds + \mathcal{E}^*\nabla\varphi \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.1)$$

$$\mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathbf{B}\nabla\varphi \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.2)$$

$$\dot{\beta} - k \Delta \beta + \partial\varphi_K(\beta) \ni S(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \beta) \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.3)$$

$$\text{Div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.4)$$

$$\text{div}\mathbf{D} = q_0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.5)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (5.6)$$

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (5.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sigma_\nu = p_\nu, \\ |\sigma_\tau| \leq \mu p_\nu, \\ \sigma_\tau = -\mu p_\nu \frac{(\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*)}{|\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*|} \text{ si } \dot{\mathbf{u}}_\tau \neq \mathbf{v}^*, \\ \dot{\zeta} = k_1 \mu p_\nu R^*(|\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*|). \end{array} \right. \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma \times (0, T), \quad (5.9)$$

$$\varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_a \times (0, T), \quad (5.10)$$

$$\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = q_2 \text{ sur } \Gamma_b \times (0, T), \quad (5.11)$$

$$\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = \psi(u_\nu - g - \zeta) \phi_L(\varphi - \varphi_0) \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (5.12)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \beta(0) = \beta_0, \zeta(0) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (5.13)$$

avec  $\mu = \mu(\zeta, |\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*|)$  et  $p_\nu = p_\nu(u_\nu - g - \zeta)$ .

Les équations (5.1) et (5.2) représentent la loi de comportement électro-viscoélastique non linéaire avec mémoire longue et endommagement. L'évolution du champ d'endommagement est modélisée par l'inclusion du type parabolique donnée par la relation (5.3) où  $S$  est la fonction source de l'endommagement. L'équation (5.4) représente l'équation du mouvement, la relation (5.5) représente l'équation de conservation de la charge, tandis que les conditions (5.6) et (5.7) sont respectivement, des conditions aux limites de déplacement-traction. Les conditions (5.8) représentent les conditions aux limites de contact de frottement avec compliance normale et usure, la relation (5.9) représente la condition de Newmann, où  $\frac{\partial \beta}{\partial \boldsymbol{\nu}}$  représente la dérivé normale de  $\beta$ . Les équations (5.10) – (5.12) sont les conditions aux limites électriques et pour finir (5.13) représente les conditions initiales.

Ici et ci-dessous, afin de simplifier la notation, nous ne signalons pas explicitement la dépendance des différentes fonctions de la variable spatiale  $\mathbf{x}$ .

Pour l'étude du problème mécanique (5.1) – (5.13), nous introduisons les espaces de Hilbert  $H$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $H_1$  et  $\mathcal{H}_1$  donnés par (1.1) munis des produits scalaires donnés par (1.2). Tout au long de ce chapitre, nous avons besoins de l'espaces  $V$ ,  $W$  et  $\mathcal{W}$  définis par (1.4) et (1.9) – (1.10) munis des produits scalaires donnés par (1.6) et (1.12), respectivement. Nous considérons les hypothèses suivantes : L'opérateur de viscosité  $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)| \leq L_{\mathcal{A}} |\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2| \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad (\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m_{\mathcal{A}} |\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2|^2 \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ est Lebesgue} \\ \quad \text{mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \text{ appartient à } \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (5.14)$$

L'opérateur d'élasticité  $\mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1, r_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2, r_2)| \leq L_{\mathcal{F}} (|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2| + |r_1 - r_2|) \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, r) \text{ est Lebesgue} \\ \quad \text{mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d \text{ et } r \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{0}, 0) \text{ appartient à } \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (5.15)$$

Le tenseur diélectrique  $\mathbf{B} = (b_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{E} = (b_{ij}(x)E_j) \\ \quad \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) } b_{ij} = b_{ji}, b_{ij} \in L^\infty(\Omega). \\ \text{(c) Il existe } m_B > 0 \text{ telle que} \\ \quad \mathbf{B}\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \geq m_B |\mathbf{E}|^2 \\ \quad \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right. \quad (5.16)$$

Le tenseur piézoélectrique  $\mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{E}(\mathbf{x})\boldsymbol{\tau} = (e_{ijk}(\mathbf{x})\tau_{jk}) \\ \quad \forall \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) } e_{ijk} = e_{ikj} \in L^\infty(\Omega). \end{array} \right. \quad (5.17)$$

La fonction source d'endommagement  $S : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_S > 0 \text{ telle que} \\ \quad |S(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1, r_1) - S(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2, r_2)| \leq L_S (|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2| + |r_1 - r_2|) \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R} \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) Pour tout } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d \text{ et } r \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \rightarrow S(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, r) \\ \quad \text{est Lebesgue mesurable sur } \Omega. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \rightarrow S(\mathbf{x}, \mathbf{0}, 0) \text{ appartient à } L^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (5.18)$$



La fonction de compliance normale  $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_\nu > 0 \text{ telle que} \\ \quad |p_\nu(\mathbf{x}, r_1) - p_\nu(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_\nu |r_1 - r_2| \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \rightarrow p_\nu(\mathbf{x}, r) \text{ est Lebesgue} \\ \quad \text{mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) } p_\nu(\mathbf{x}, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(d) Il existe } p_\nu^* > 0 \text{ telle que} \\ \quad p_\nu(\mathbf{x}, r) \leq p_\nu^* \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (5.19)$$

Le coefficient de frottement  $\mu : \Gamma_3 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_\mu > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mu(\mathbf{x}, a_1, b_1) - \mu(\mathbf{x}, a_2, b_2)| \leq L_\mu (|a_1 - a_2| + |b_1 - b_2|) \\ \quad \forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \rightarrow \mu(\mathbf{x}, a, b) \text{ est Lebesgue} \\ \quad \text{mesurable sur } \Gamma_3, \forall a, b \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) Il existe } \mu^* > 0 \text{ telle que} \\ \quad \mu(\mathbf{x}, a, b) \leq \mu^* \forall a, b \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (5.20)$$

La fonction de conductivité électrique surfacique  $\psi : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_\psi > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\psi(\mathbf{x}, r_1) - \psi(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_\psi |r_1 - r_2| \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(b) Il existe } N_\psi > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\psi(\mathbf{x}, r)| \leq N_\psi \forall r \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \rightarrow \psi(\mathbf{x}, r) \text{ est Lebesgue} \\ \quad \text{mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ \text{(d) } \psi(\mathbf{x}, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0. \end{array} \right. \quad (5.21)$$

Le tenseur de relaxation  $\mathcal{M}$  satisfait

$$\mathcal{M} \in C(0, T; \mathcal{H}_\infty). \quad (5.22)$$

Les forces volumiques  $\mathbf{f}_0$  et les tractions surfaciques  $\mathbf{f}_2$  ont la régularité

$$\mathbf{f}_0 \in C(0, T; H), \quad \mathbf{f}_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_2)^d), \quad (5.23)$$

De même, la densité de charge volumique  $q_0$  et surfacique  $q_2$  satisfont

$$q_0 \in C(0, T; L^2(\Omega)), \quad q_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_b)). \quad (5.24)$$

Finalement, la fonction d'écart  $g$ , le potentiel donné de la fondation  $\varphi_0$ , le champ initial des déplacements  $\mathbf{u}_0$  et le champ initial d'endommagement  $\beta_0$  vérifient les conditions

$$g \in L^2(\Gamma_3), \quad g \geq 0 \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \quad \varphi_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad \mathbf{u}_0 \in V, \quad \beta_0 \in K. \quad (5.25)$$

Nous énonçons maintenant quelques définitions que nous allons utiliser dans la suite de ce chapitre.

Tout d'abord, nous définissons la forme bilinéaire  $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$a(\xi, \vartheta) = k \int_{\Omega} \nabla \xi \cdot \nabla \vartheta dx. \quad (5.26)$$

Puis, nous définissons la fonction  $\mathbf{f} : [0, T] \rightarrow V$  par

$$(\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0(t) \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot \mathbf{v} da, \quad (5.27)$$

et la fonction  $q : [0, T] \rightarrow W$  par

$$(q(t), \phi)_W = \int_{\Omega} q_0(t) \phi dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t) \phi da. \quad (5.28)$$

Les conditions (5.23) et (5.24) impliquent

$$\mathbf{f} \in C(0, T; V), \quad q \in C(0, T; W). \quad (5.29)$$

Finalement, nous définissons l'application  $\gamma : V \times W \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow W$  par

$$(\gamma(\mathbf{u}, \varphi, \zeta), \phi)_W = \int_{\Gamma_3} \psi(u_\nu - g - \zeta) \phi_L(\varphi - \varphi_0) \phi da, \quad (5.30)$$

et la fonctionnelle  $j : V \times V \times V \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$j(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \zeta) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - g - \zeta) w_\nu da \quad (5.31)$$

$$+ \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu (u_\nu - g - \zeta) |\mathbf{w}_\tau - \mathbf{v}^*| da,$$

pour tout  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ,  $\zeta \in L^2(\Gamma_3)$ ,  $\varphi, \phi \in W$  et  $t \in [0, T]$ ,  $\mu = \mu(\zeta, |\mathbf{v}_\tau - \mathbf{v}^*|)$ .

La fonctionnelle  $j$  satisfait

$$\begin{cases} \text{pour tout } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \text{ et } \zeta \in L^2(\Gamma_3) : \mathbf{w} \rightarrow j(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \zeta) \\ \text{est propre, convexe et semicontinue-inférieurement sur } V. \end{cases} \quad (5.32)$$

## 5.2 Formulation variationnelle

Dans cette section, nous allons établir la formulation variationnelle du problème P2.

Nous supposons dans ce qui suit que  $\mathbf{u}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfaisant (5.1), (5.4) et (5.7) – (5.8). Soit  $\mathbf{v} \in V$ . Nous utilisons la formule de Green (1.3) et l'équation d'équilibre (5.4) pour obtenir

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) dx - \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) dx = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) da,$$

Nous divisons l'intégrale de surface  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$ . Puisque  $\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$  sur  $\Gamma_1$ ,  $\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2$  sur  $\Gamma_2$ , en tenant compte de (5.27), nous déduisons que

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}))_{\mathcal{H}} = (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}})_V + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) da. \quad (5.33)$$

Sur  $\Gamma_3$ , nous avons

$$\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) = \sigma_\nu (v - \dot{u})_\nu + \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}})_\tau,$$

nous utilisant la condition de contact (5.8) afin de voir que

$$\sigma_\nu (v - \dot{u})_\nu = -p_\nu (u_\nu - h - \zeta) v_\nu + p_\nu (u_\nu - h - \zeta) \dot{u}_\nu.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}})_\tau &= \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{v}^* + \mathbf{v}^* - \dot{\mathbf{u}}_\tau) \\ &= \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{v}^*) + \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\mathbf{v}^* - \dot{\mathbf{u}}_\tau), \end{aligned}$$

encore une fois, de (5.8), nous avons

$$|\boldsymbol{\sigma}_\tau| \leq \mu p_\nu (u_\nu - g - \zeta),$$

et comme

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{v}^*) \geq -|\boldsymbol{\sigma}_\tau| |\mathbf{v}_\tau - \mathbf{v}^*|,$$

donc, nous pouvons écrire

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{v}^*) \geq -\mu p_\nu (u_\nu - g - \zeta) |\mathbf{v}_\tau - \mathbf{v}^*|.$$

D'autre part, de (5.8), nous voyons que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\mathbf{v}^* - \dot{\mathbf{u}}_\tau) &= |\boldsymbol{\sigma}_\tau| |\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*| \\ &= \mu p_\nu (u_\nu - g - \zeta) |\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*|. \end{aligned}$$

Alors que, de ce qui précède, nous avons sur  $\Gamma_3$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) &\geq -p_\nu (u_\nu - g - \zeta) v_\nu + p_\nu (u_\nu - g - \zeta) \dot{u}_\nu \\ &\quad - \mu p_\nu (u_\nu - g - \zeta) |\mathbf{v}_\tau - \mathbf{v}^*| + \mu p_\nu (u_\nu - g - \zeta) |\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*| \\ &= [p_\nu (u_\nu - g - \zeta) \dot{u}_\nu + \mu p_\nu (u_\nu - g - \zeta) |\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*|] \\ &\quad - [p_\nu (u_\nu - g - \zeta) v_\nu + \mu p_\nu (u_\nu - g - \zeta) |\mathbf{v}_\tau - \mathbf{v}^*|]. \end{aligned}$$

Nous utilisons (5.31) et (5.33) afin de déduire que

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}, \zeta) - j(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}, \zeta) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}})_V. \quad (5.34)$$

En outre, Soient  $\varphi$  et  $\mathbf{D}$  des fonctions suffisamment régulières qui satisfaisant (5.2), (5.5) et (5.11) – (5.12). Soit  $\phi \in W$ . Nous employons la formule de Green (1.15) et l'équation d'équilibre (5.5) pour écrire

$$\int_{\Omega} \mathbf{D} \cdot \nabla \phi dx + \int_{\Omega} q_0 \phi dx = \int_{\Gamma} \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} \phi da.$$

Nous divisons l'intégrale de surface  $\Gamma_a$ ,  $\Gamma_b$  et  $\Gamma_3$ . Puisque  $\phi = 0$  sur  $\Gamma_a$ ,  $\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = q_2$  sur  $\Gamma_b$ ,  $\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = \psi(u_\nu - h - \zeta) \phi_L(\varphi - \varphi_0)$  sur  $\Gamma_3$ , en tenant compte de (5.28), nous trouvons

$$(\mathbf{D}, \nabla \phi)_H + (q, \phi)_W = \int_{\Gamma_3} \psi(u_\nu - g - \zeta) \phi_L(\varphi - \varphi_0) \phi da,$$

nous utilisons (5.30) pour voir que

$$(\mathbf{D}, \nabla \phi)_H = -(q, \phi)_W + (\gamma(\mathbf{u}, \varphi, \zeta), \phi)_W. \quad (5.35)$$

Enfin, soit  $\beta \in K$  et pour tout  $\xi \in K$ . De (2.1) la définition de  $\partial\Psi_K(\beta)$  le sous-différentiel de la fonction indicatrice  $\Psi_K$  et de (5.3), nous obtenons

$$\left( \dot{\beta}, \xi - \beta \right)_{L^2(\Omega)} - k(\Delta\beta, \xi - \beta)_{L^2(\Omega)} \geq (S(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \beta), \xi - \beta)_{L^2(\Omega)}$$

En utilisant la formule de Green avec (5.9), nous trouvons

$$\begin{aligned} (\Delta\beta, \xi - \beta)_{L^2(\Omega)} + (\nabla\beta, \nabla(\xi - \beta))_H &= \int_{\Gamma} \underbrace{\nabla\beta \cdot \boldsymbol{\nu}}_{=\frac{\partial\beta}{\partial\nu}} (\xi - \beta) da \\ &= \int_{\Gamma} \underbrace{\frac{\partial\beta}{\partial\nu}}_{=0} (\xi - \beta) da \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc

$$(\Delta\beta, \xi - \beta)_{L^2(\Omega)} = -(\nabla\beta, \nabla(\xi - \beta))_H,$$

alors que

$$\left( \dot{\beta}, \xi - \beta \right)_{L^2(\Omega)} + k(\nabla\beta, \nabla(\xi - \beta))_H \geq (S(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \beta), \xi - \beta)_{L^2(\Omega)}.$$

Nous employons (5.26) la définition de la forme bilinéaire  $a$  afin d'écrire

$$\left( \dot{\beta}, \xi - \beta \right)_{L^2(\Omega)} + a(\beta, \xi - \beta) \geq (S(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \beta), \xi - \beta)_{L^2(\Omega)} \quad (5.36)$$

De (5.1), (5.2), (5.8), (5.13) et (5.34) – (5.36), nous obtenons la formulation variationnelle suivante du problème P2.

**Problème PV2.** *Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$ , le champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma} : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ , le champ de potentiel électrique  $\varphi : [0, T] \rightarrow W$ , le champ des déplacements électriques  $\mathbf{D} : [0, T] \rightarrow \mathcal{W}$ , le champ d'endommagement  $\beta : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$  et la fonction d'usure  $\zeta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$  tels que*

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \beta(t)) + \int_0^t \mathcal{M}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))ds + \boldsymbol{\varepsilon}^*\nabla\varphi(t), \quad (5.37)$$

$$(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v}, \zeta(t)) - j(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t), \dot{\mathbf{u}}(t), \zeta(t)) \quad (5.38)$$

$$\geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

$$\beta(t) \in K, \quad (\dot{\beta}(t), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\beta(t), \xi - \beta(t)) \quad (5.39)$$

$$\geq (S(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \beta(t)), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K,$$

$$\mathbf{D}(t) = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) - \mathbf{B}\nabla\varphi(t), \quad (5.40)$$

$$(\mathbf{D}(t), \nabla\phi)_H = -(q(t), \phi)_W + (\gamma(\mathbf{u}(t), \varphi(t), \zeta(t)), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, \quad (5.41)$$

$$\dot{\zeta}(t) = k_1\mu(\zeta(t), |\dot{\mathbf{u}}_\tau(t) - \mathbf{v}^*|)p_\nu(u_\nu(t) - g - \zeta(t))R^*(|\dot{\mathbf{u}}_\tau(t) - \mathbf{v}^*|), \quad (5.42)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \beta(0) = \beta_0, \zeta(0) = 0, \quad (5.43)$$

pour tout  $t \in [0, T]$ .

L'élément  $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \mathbf{D}, \beta, \zeta\}$  qui satisfait (5.37) – (5.43) est appelé solution faible du Problème de contact P2.

La solvabilité de ce système fera l'objet de la section suivante.

### 5.3 Existence et unicité de la solution

Cette section est destinée à présenter un résultat sur l'existence et l'unicité du Problème PV2 suivant.

**Théorème 5.1.** *Supposons que les hypothèses (5.14) – (5.25) et (5.32) sont satisfaites. Alors, si  $c_0^2 p_\nu^* L_\mu < m_A$  et  $N_\psi < \frac{m_B}{c_0^2}$ , le problème PV2 admet une solution unique  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \mathbf{D}, \beta, \zeta)$  ayant la régularité*

$$\mathbf{u} \in C^1(0, T; V), \quad (5.44)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \in C(0, T; \mathcal{H}_1), \quad (5.45)$$

$$\varphi \in C(0, T; W), \quad (5.46)$$

$$\mathbf{D} \in C(0, T; \mathcal{W}), \quad (5.47)$$

$$\beta \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (5.48)$$

$$\zeta \in C^1(0, T; L^2(\Gamma_3)). \quad (5.49)$$

Ici,  $c_0$  et  $\tilde{c}_0$  sont les constantes qui définies dans (1.8) et (1.14), respectivement.

Nous concluons de ce qui précède que le Problème P2 admet une solution faible unique  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \mathbf{D}, \beta, \zeta)$ , à condition que les hypothèses du Théorème 5.1 sont satisfaites.

La démonstration du Théorème 5.1 sera faite en plusieurs étapes, elle est basée sur les résultats des inéquations variationnelles, les opérateurs monotones et les arguments du point fixe. Nous supposons dans ce qui suit que les hypothèses (5.14) – (5.25) sont vérifiées,  $c$  désigne une constante positive qui dépend de  $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathbf{B}, p_\nu, \psi, \mu, S$  et  $T$  dont la valeur peut changer d'un endroit à un autre.

Dans la première étape, nous supposons que les fonctions  $\zeta \in C(0, T; L^2(\Gamma_3)), \boldsymbol{\eta} \in C(0, T; \mathcal{H}), \mathbf{g} \in C(0, T; V)$  et  $\mathbf{w} \in C(0, T; V)$  sont données et nous proposons le problème intermédiaire suivant.

**Problème PV2 $_{\zeta\eta\mathbf{g}\mathbf{w}}$ .** Trouver le champ des vitesses  $\mathbf{v}_{\zeta\eta\mathbf{g}\mathbf{w}} : [0, T] \rightarrow V$  et le champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}_{\zeta\eta\mathbf{g}\mathbf{w}} : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$  tels que, pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\boldsymbol{\sigma}_{\zeta\eta\mathbf{g}\mathbf{w}}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_{\zeta\eta\mathbf{g}\mathbf{w}}(t)) + \boldsymbol{\eta}(t), \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} & (\boldsymbol{\sigma}_{\zeta\eta\mathbf{g}\mathbf{w}}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\zeta\eta\mathbf{g}\mathbf{w}}(t)))_{\mathcal{H}} \\ & + j(\mathbf{g}(t), \mathbf{w}(t), \mathbf{v}, \zeta(t)) - j(\mathbf{g}(t), \mathbf{w}(t), \mathbf{v}_{\zeta\eta\mathbf{g}\mathbf{w}}(t), \zeta(t)) \\ & \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\zeta\eta\mathbf{g}\mathbf{w}}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (5.51)$$

**Lemme 5.2.** Le problème PV2 $_{\zeta\eta\mathbf{g}\mathbf{w}}$  admet une solution unique tel que

$$\mathbf{v}_{\zeta\eta\mathbf{g}\mathbf{w}} \in C(0, T; V), \quad \boldsymbol{\sigma}_{\zeta\eta\mathbf{g}\mathbf{w}} \in C(0, T; \mathcal{H}_1). \quad (5.52)$$

**Preuve.** Nous définissons l'opérateur  $A : V \rightarrow V$  tel que

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \quad (5.53)$$

En utilisant (1.2), l'hypothèse (5.14) et (1.7), pour tout  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  et  $\forall \mathbf{w} \in V$ , nous avons

$$\begin{aligned} (A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{w})_V &= (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}))_{\mathcal{H}} \\ &\leq L_{\mathcal{A}} |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})|_{\mathcal{H}} |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})|_{\mathcal{H}} \\ &\leq L_{\mathcal{A}} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|_V |\mathbf{w}|_V. \end{aligned}$$

Donc

$$|A\mathbf{u} - A\mathbf{v}|_V \leq L_{\mathcal{A}} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|_V,$$

et, nous avons

$$\begin{aligned}
 (A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_V &= (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \\
 &\geq m_{\mathcal{A}} |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})|_{\mathcal{H}}^2 \\
 &\geq m_{\mathcal{A}} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|_V^2,
 \end{aligned}$$

c'est à dire que  $A$  est un opérateur lipschitzien et fortement monotone sur  $V$ .

Nous utilisons le théorème de représentation de Riesz pour définir un élément  $\mathbf{F} \in C(0, T; V)$  par

$$(\mathbf{F}(t), \mathbf{v})_V = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V - (\boldsymbol{\eta}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}}. \quad (5.54)$$

Puisque l'opérateur  $A$  est de Lipschitz et fortement monotone sur  $V$  avec la régularité (5.32), nous concluons d'après un résultat standard sur les inéquations variationnelles elliptiques de deuxième espèce ( Théorème 2.15 ) qu'il existe une fonction unique  $\mathbf{v}_{\zeta\eta gw}(t) \in V$  qui satisfait

$$\begin{aligned}
 (A\mathbf{v}_{\zeta\eta gw}(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\zeta\eta gw}(t))_V & \quad (5.55) \\
 + j(\mathbf{g}(t), \mathbf{w}(t), \mathbf{v}, \zeta(t)) - j(\mathbf{g}(t), \mathbf{w}(t), \mathbf{v}_{\zeta\eta gw}(t), \zeta(t)) \\
 &\geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\zeta\eta gw}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.
 \end{aligned}$$

En combinant (5.50) et (5.53) – (5.55), nous déduisons que  $\mathbf{v}_{\zeta\eta gw}$  est une solution unique de  $PV2_{\zeta\eta gw}$ .

Nous utilisons l'équation (5.50), l'hypothèse (5.14), la régularité de  $\boldsymbol{\eta}$  et les propriétés du tenseur de déformations à obtenir que  $\boldsymbol{\sigma}_{\zeta\eta gw}(t) \in \mathcal{H}$ . Puisque  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\zeta\eta gw}(t) \pm \boldsymbol{\Phi}$  satisfait (5.51), où  $\boldsymbol{\Phi} \in \mathcal{D}(\Omega)^d$  est arbitraire, en utilisant la définition (5.31), nous trouvons

$$Div \boldsymbol{\sigma}_{\zeta\eta gw}(t) + \mathbf{f}_0(t) = 0. \quad (5.56)$$

Avec l'hypothèse (5.23) sur la régularité de  $\mathbf{f}_0$ , nous voyons que

$$Div \boldsymbol{\sigma}_{\zeta\eta gw}(t) \in H.$$

Alors que

$$\boldsymbol{\sigma}_{\zeta\eta gw}(t) \in \mathcal{H}_1.$$



Dans la suite, nous montrons que

$$\mathbf{v}_{\zeta\eta gw} \in C(0, T; V), \quad \boldsymbol{\sigma}_{\zeta\eta gw} \in C(0, T; \mathcal{H}_1).$$

Soit  $t_1, t_2 \in [0, T]$  et pour simplifier les notations nous posons  $\mathbf{v}_{\zeta\eta gw}(t_i) = \mathbf{v}_i$ ,  $\mathbf{g}(t_i) = \mathbf{g}_i$ ,  $\mathbf{w}(t_i) = \mathbf{w}_i$ ,  $\boldsymbol{\eta}(t_i) = \boldsymbol{\eta}_i$ ,  $\zeta(t_i) = \zeta_i$ ,  $\mathbf{f}(t_i) = \mathbf{f}_i$  et  $\boldsymbol{\sigma}_{\zeta\eta gw}(t_i) = \boldsymbol{\sigma}_i$  pour  $i = 1, 2$ .

En appliquant (5.54) – (5.55) pour  $t = t_1$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} (A\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_V &\leq j(\mathbf{g}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2, \zeta_1) - j(\mathbf{g}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_1, \zeta_1) \\ &\quad + (\mathbf{f}_1, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_V - (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2))_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

et, pour  $t = t_2$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ , nous avons

$$\begin{aligned} (-A\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_V &\leq j(\mathbf{g}_2, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_1, \zeta_2) - j(\mathbf{g}_2, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_2, \zeta_2) \\ &\quad - (\mathbf{f}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_V + (\boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2))_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Nous additionnons les deux inégalités précédentes, nous trouvons

$$\begin{aligned} (A\mathbf{v}_1 - A\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_V & \tag{5.57} \\ &\leq j(\mathbf{g}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2, \zeta_1) - j(\mathbf{g}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_1, \zeta_1) + j(\mathbf{g}_2, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_1, \zeta_2) - j(\mathbf{g}_2, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_2, \zeta_2) \\ &\quad + (\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_V + (\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2))_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

En utilisant (5.53), (1.2), (5.14), (5.57) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{A}} |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V^2 &\leq |j(\mathbf{g}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_1, \zeta_1) - j(\mathbf{g}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2, \zeta_1) \\ &\quad + j(\mathbf{g}_2, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_2, \zeta_2) - j(\mathbf{g}_2, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_1, \zeta_2)| \\ &\quad + (|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2|_V + |\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2|_{\mathcal{H}}) |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V. \end{aligned} \tag{5.58}$$

De (5.31), nous avons

$$\begin{aligned} &|j(\mathbf{g}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_1, \zeta_1) - j(\mathbf{g}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2, \zeta_1) + j(\mathbf{g}_2, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_2, \zeta_2) - j(\mathbf{g}_2, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_1, \zeta_2)| \\ &= \left| \int_{\Gamma_3} p_\nu (g_{1\nu} - g - \zeta_1) v_{1\nu} da - \int_{\Gamma_3} p_\nu (g_{1\nu} - g - \zeta_1) v_{2\nu} da \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma_3} \mu(\zeta_1, |\mathbf{w}_{1\tau} - \mathbf{v}^*|) p_\nu (g_{1\nu} - g - \zeta_1) |\mathbf{v}_{1\tau} - \mathbf{v}^*| da \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Gamma_3} \mu(\zeta_1, |\mathbf{w}_{1\tau} - \mathbf{v}^*|) p_\nu(g_{1\nu} - g - \zeta_1) |\mathbf{v}_{2\tau} - \mathbf{v}^*| da \\
 & + \int_{\Gamma_3} p_\nu(g_{2\nu} - g - \zeta_2) v_{2\nu} da - \int_{\Gamma_3} p_\nu(g_{2\nu} - g - \zeta_2) v_{1\nu} da \\
 & + \int_{\Gamma_3} \mu(\zeta_2, |\mathbf{w}_{2\tau} - \mathbf{v}^*|) p_\nu(g_{2\nu} - g - \zeta_2) |\mathbf{v}_{2\tau} - \mathbf{v}^*| da \\
 & - \int_{\Gamma_3} \mu(\zeta_2, |\mathbf{w}_{2\tau} - \mathbf{v}^*|) p_\nu(g_{2\nu} - g - \zeta_2) |\mathbf{v}_{1\tau} - \mathbf{v}^*| da \\
 & \leq \int_{\Gamma_3} |p_\nu(g_{1\nu} - g - \zeta_1) - p_\nu(g_{2\nu} - g - \zeta_2)| |v_{1\nu} - v_{2\nu}| da \\
 & \quad + \int_{\Gamma_3} |(\mu(\zeta_1, |\mathbf{w}_{1\tau} - \mathbf{v}^*|) p_\nu(g_{1\nu} - g - \zeta_1) \\
 & \quad - \mu(\zeta_2, |\mathbf{w}_{2\tau} - \mathbf{v}^*|) p_\nu(g_{2\nu} - g - \zeta_2))| (|\mathbf{v}_{1\tau} - \mathbf{v}^*| - |\mathbf{v}_{2\tau} - \mathbf{v}^*|) da.
 \end{aligned}$$

En utilisant l'écriture  $a = a - b + b$  et l'inégalité  $\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & |j(\mathbf{g}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_1, \zeta_1) - j(\mathbf{g}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2, \zeta_1) + j(\mathbf{g}_2, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_2, \zeta_2) - j(\mathbf{g}_2, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_1, \zeta_2)| \\
 & \leq \int_{\Gamma_3} |p_\nu(g_{1\nu} - g - \zeta_1) - p_\nu(g_{2\nu} - g - \zeta_2)| |v_{1\nu} - v_{2\nu}| da \\
 & + \int_{\Gamma_3} |\mu(\zeta_1, |\mathbf{w}_{1\tau} - \mathbf{v}^*|) - \mu(\zeta_2, |\mathbf{w}_{2\tau} - \mathbf{v}^*|)| p_\nu(g_{1\nu} - g - \zeta_1) |\mathbf{v}_{1\tau} - \mathbf{v}_{2\tau}| da \\
 & + \int_{\Gamma_3} |p_\nu(g_{1\nu} - g - \zeta_1) - p_\nu(g_{2\nu} - g - \zeta_2)| \mu(\zeta_2, |\mathbf{w}_{2\tau} - \mathbf{v}^*|) |\mathbf{v}_{1\tau} - \mathbf{v}_{2\tau}| da.
 \end{aligned}$$

Des hypothèses (5.19) – (5.20),  $|u_r| \leq \|\mathbf{u}\|$  ( $r = \nu, \tau$ ), l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (1.8), nous avons

$$\begin{aligned}
 & |j(\mathbf{g}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_1, \zeta_1) - j(\mathbf{g}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2, \zeta_1) + j(\mathbf{g}_2, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_2, \zeta_2) - j(\mathbf{g}_2, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_1, \zeta_2)| \quad (5.59) \\
 & \leq L_\nu (1 + \mu^*) c_0^2 |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|_V |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V + L_\mu p_\nu^* c_0^2 |\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2|_V |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V \\
 & \quad + (L_\nu + L_\mu p_\nu^* + L_\nu \mu^*) c_0 |\zeta_1 - \zeta_2|_{L^2(\Gamma_3)} |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V.
 \end{aligned}$$

En combinant (5.58) avec (5.59), nous trouvons

$$\begin{aligned}
 & m_{\mathcal{A}} |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V \quad (5.60) \\
 & \leq L_\nu (1 + \mu^*) c_0^2 |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|_V + L_\mu p_\nu^* c_0^2 |\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2|_V \\
 & \quad + (L_\nu + L_\mu p_\nu^* + L_\nu \mu^*) c_0 |\zeta_1 - \zeta_2|_{L^2(\Gamma_3)}
 \end{aligned}$$

$$+ |\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2|_V + |\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2|_{\mathcal{H}},$$

d'après la régularité de  $(\mathbf{g}, \mathbf{w}, \zeta, \mathbf{f}, \boldsymbol{\eta})$ , nous pouvons écrire

$$\mathbf{v}_{\zeta\eta g w} \in C(0, T; V).$$

D'autre part, nous prenons  $t = t_1$  puis  $t = t_2$  dans (5.50) et utilisons (5.14), nous obtenons

$$|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2|_{\mathcal{H}} \leq c(|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V + |\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2|_{\mathcal{H}}).$$

De (5.56), nous avons

$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma}_{\zeta\eta g w}(t_i) + \mathbf{f}_0(t_i) = 0,$$

donc, de la régularité de  $(\mathbf{v}_{\zeta\eta g w}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{f}_0)$  et les deux relations précédentes, nous concluons que

$$\boldsymbol{\sigma}_{\zeta\eta g w} \in C(0, T; \mathcal{H}_1).$$

Ce qui termine la preuve du Lemme 5.2. □

Soient  $\zeta \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$ ,  $\boldsymbol{\eta} \in C(0, T; \mathcal{H})$  et  $\mathbf{g} \in C(0, T; V)$  sont données. Nous définissons maintenant l'opérateur  $\Lambda_{\zeta\eta g} : C(0, T; V) \rightarrow C(0, T; V)$  par

$$\Lambda_{\zeta\eta g} \mathbf{w} = \mathbf{v}_{\zeta\eta g w}, \tag{5.61}$$

où  $\mathbf{v}_{\zeta\eta g w}$  est la solution unique du problème PV2 $_{\zeta\eta g w}$ .

**Lemme 5.3.** *L'opérateur  $\Lambda_{\zeta\eta g}$  a un point fixe unique  $\mathbf{w}_{\zeta\eta g} \in C(0, T; V)$ .*

**Preuve.** Soit  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in C(0, T; V)$ . Nous notons  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{\zeta\eta g w_i}$  pour  $i = 1, 2$ . De (5.61) nous avons pour tout  $t \in [0, T]$

$$|\Lambda_{\zeta\eta g} \mathbf{w}_1(t) - \Lambda_{\zeta\eta g} \mathbf{w}_2(t)|_V = |\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)|_V.$$

En employant (5.60), nous obtenons

$$|\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)|_V \leq \frac{L_{\mu} p_{\nu}^* c_0^2}{m_{\mathcal{A}}} |\mathbf{w}_1(t) - \mathbf{w}_2(t)|_V,$$

donc

$$|\Lambda_{\zeta\eta g} \mathbf{w}_1(t) - \Lambda_{\zeta\eta g} \mathbf{w}_2(t)|_V \leq \frac{L_{\mu} p_{\nu}^* c_0^2}{m_{\mathcal{A}}} |\mathbf{w}_1(t) - \mathbf{w}_2(t)|_V,$$

d'où

$$|\Lambda_{\zeta\eta g} \mathbf{w}_1 - \Lambda_{\zeta\eta g} \mathbf{w}_2|_{0, V} \leq \frac{L_{\mu} p_{\nu}^* c_0^2}{m_{\mathcal{A}}} |\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2|_{0, V}.$$

Puisque  $L_\mu p_\nu^* c_0^2 < m_{\mathcal{A}}$  alors que  $\Lambda_{\zeta\eta g}$  est un opérateur contractant sur l'espace de Banach  $C(0, T; V)$ , donc il a un point fixe unique  $\mathbf{w}_{\zeta\eta g} \in C(0, T; V)$ .  $\square$

Dans la suite, soient  $\mathbf{w}_{\zeta\eta g}$  le point fixe garantié par le Lemme 5.3 et  $\mathbf{v}_{\zeta\eta g}$  la fonction définie par

$$\mathbf{v}_{\zeta\eta g} = \mathbf{v}_{\zeta\eta g \mathbf{w}_{\zeta\eta g}}. \quad (5.62)$$

Puisque  $\mathbf{w}_{\zeta\eta g}$  est le point fixe de  $\Lambda_{\zeta\eta g}$ , donc

$$\Lambda_{\zeta\eta g} \mathbf{w}_{\zeta\eta g} = \mathbf{w}_{\zeta\eta g}. \quad (5.63)$$

Nous combinons (5.61) – (5.62) avec (5.63), nous pouvons écrire

$$\mathbf{w}_{\zeta\eta g} = \mathbf{v}_{\zeta\eta g}. \quad (5.64)$$

Nous choisissons  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{\zeta\eta g}$  dans (5.55) et utilisons (5.62) et (5.64), nous voyons que  $\mathbf{v}_{\zeta\eta g}$  satisfait

$$\begin{aligned} & (A\mathbf{v}_{\zeta\eta g}(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\zeta\eta g}(t))_V \\ & + j(\mathbf{g}(t), \mathbf{v}_{\zeta\eta g}(t), \mathbf{v}, \zeta(t)) - j(\mathbf{g}(t), \mathbf{v}_{\zeta\eta g}(t), \mathbf{v}_{\zeta\eta g}(t), \zeta(t)) \\ & \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\zeta\eta g}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Nous définissons maintenant la fonction  $\mathbf{u}_{\zeta\eta g} : C(0, T; V) \rightarrow C(0, T; V)$  par

$$\mathbf{u}_{\zeta\eta g}(t) = \mathbf{u}_0 + \int_0^t \mathbf{v}_{\zeta\eta g}(s) ds \quad \forall t \in [0, T], \quad (5.66)$$

et l'opérateur  $\Lambda_{\zeta\eta} : C(0, T; V) \rightarrow C(0, T; V)$  par

$$\Lambda_{\zeta\eta} \mathbf{g} = \mathbf{u}_{\zeta\eta g}. \quad (5.67)$$

Nous avons sur l'opérateur  $\Lambda_{\zeta\eta}$  le résultat suivant.

**Lemme 5.4.** *l'opérateur  $\Lambda_{\zeta\eta}$  admet un point fixe unique  $\mathbf{g}_{\zeta\eta} \in C(0, T; V)$ .*

**Preuve.** Soient  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in C(0, T; V)$  et  $\boldsymbol{\eta} \in C(0, T; \mathcal{H})$ . Nous utilisons les notations  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{\zeta\eta g_i}$  et  $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{\zeta\eta g_i}$  pour  $i = 1, 2$ . En utilisant (5.60) et (5.64), nous trouvons

$$(m_{\mathcal{A}} - p_\nu^* L_\mu c_0^2) |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V \leq c_0^2 L_\nu (1 + \mu^*) |\mathbf{g}_1(s) - \mathbf{g}_2(s)|_V \quad \forall s \in [0, T]. \quad (5.68)$$

Nous intégrons l'inégalité précédente par rapport à  $t$ , employons (5.66) – (5.68) et comme  $p_\nu^* L_\mu c_0^2 < m_{\mathcal{A}}$ , nous obtenons

$$|\Lambda_{\zeta\eta}\mathbf{g}_1(t) - \Lambda_{\zeta\eta}\mathbf{g}_2(t)|_V \leq \frac{c_0^2 L_\nu (1 + \mu^*)}{(m_{\mathcal{A}} - p_\nu^* L_\mu c_0^2)} \int_0^t |\mathbf{g}_1(s) - \mathbf{g}_2(s)|_V ds \quad \forall t \in [0, T],$$

donc

$$|\Lambda_{\zeta\eta}\mathbf{g}_1(t) - \Lambda_{\zeta\eta}\mathbf{g}_2(t)|_V \leq c \int_0^t |\mathbf{g}_1(s) - \mathbf{g}_2(s)|_V ds \quad \forall t \in [0, T].$$

En réitérant  $m$  fois l'inégalité précédente, nous obtenons

$$|\Lambda_{\zeta\eta}^m \mathbf{g}_1 - \Lambda_{\zeta\eta}^m \mathbf{g}_2|_{0,V} \leq \frac{(cT)^m}{m!} |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|_{0,V}$$

Nous déduisons que pour  $m$  suffisamment grand, l'opérateur  $\Lambda_{\zeta\eta}^m$  est un contractant sur l'espace de Banach  $C(0, T; V)$ , donc,  $\Lambda_{\zeta\eta}^m$  possède un point fixe unique  $\mathbf{g}_{\zeta\eta} \in C(0, T; V)$  et par conséquent  $\mathbf{g}_{\zeta\eta}$  est le point fixe unique de  $\Lambda_{\zeta\eta}$ .  $\square$

Maintenant nous considérons le problème variationnel suivant.

**Problem PV2 $_{\zeta\eta}$**  . Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u}_{\zeta\eta} : [0, T] \rightarrow V$  tel que pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$(\mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_{\zeta\eta}(t)), \varepsilon(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_{\zeta\eta}(t)))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}_{\zeta\eta}(t), \dot{\mathbf{u}}_{\zeta\eta}(t), \mathbf{v}, \zeta(t)) - j(\mathbf{u}_{\zeta\eta}(t), \dot{\mathbf{u}}_{\zeta\eta}(t), \dot{\mathbf{u}}_{\zeta\eta}(t), \zeta(t)) \quad (5.69)$$

$$+(\boldsymbol{\eta}(t), \varepsilon(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_{\zeta\eta}(t)))_{\mathcal{H}} \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_{\zeta\eta}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

$$\mathbf{u}_{\zeta\eta}(0) = \mathbf{u}_0. \quad (5.70)$$

Pour le problem PV2 $_{\zeta\eta}$  nous avons le résultat suivant.

**Lemme 5.5.** *Le problème PV2 $_{\zeta\eta}$  admet une solution unique  $\mathbf{u}_{\zeta\eta}$  qui satisfait la régularité (5.44).*

**Preuve.** Soient  $\zeta \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$  et  $\boldsymbol{\eta} \in C(0, T; \mathcal{H})$ , nous notons par  $\mathbf{g}_{\zeta\eta} \in C(0, T; V)$  le point fixe garantié par le Lemme 5.4 et soient  $\mathbf{v}_{\zeta\eta}$  et  $\mathbf{u}_{\zeta\eta}$  les fonctions définies par

$$\mathbf{v}_{\zeta\eta} = \mathbf{v}_{\zeta\eta\mathbf{g}_{\zeta\eta}} \text{ et } \mathbf{u}_{\zeta\eta} = \mathbf{u}_{\zeta\eta\mathbf{g}_{\zeta\eta}}. \quad (5.71)$$

Comme  $\mathbf{g}_{\zeta\eta}$  est le point fixe de  $\Lambda_{\zeta\eta}$ , donc

$$\Lambda_{\zeta\eta}\mathbf{g}_{\zeta\eta} = \mathbf{g}_{\zeta\eta}, \quad (5.72)$$

nous combinons (5.67) la définition de  $\Lambda_{\zeta\eta}$  avec (5.71) – (5.72), nous avons

$$\mathbf{g}_{\zeta\eta} = \mathbf{u}_{\zeta\eta} \quad (5.73)$$

nous prenons  $\mathbf{g} = \mathbf{g}_{\zeta\eta}$  dans (5.66) la définition de  $\mathbf{u}_{\zeta\eta\mathbf{g}}$  et utilisons (5.71) afin d'écrire

$$\dot{\mathbf{u}}_{\zeta\eta} = \mathbf{v}_{\zeta\eta}. \quad (5.74)$$

pour  $\mathbf{g} = \mathbf{g}_{\zeta\eta}$ , nous combinons (5.53) – (5.54), (5.65), (5.71), (5.73) et (5.74), nous trouvons que  $\mathbf{u}_{\zeta\eta}$  est une solution unique de  $\text{PV}2_{\zeta\eta}$ , en plus, de (5.74) et la régularité de  $\mathbf{v}_{\zeta\eta}$ , nous déduisons que  $\mathbf{u}_{\zeta\eta} \in C^1(0, T; V)$ .  $\square$

Dans la deuxième étape, nous considérons  $\zeta \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$  et  $\boldsymbol{\eta} \in C(0, T; \mathcal{H})$ , nous utilisons le champ des déplacements  $\mathbf{u}_{\zeta\eta}$  la solution unique de  $\text{PV}2_{\zeta\eta}$ .

Nous considérons le problème variationnel suivant.

**Problème QV2 $_{\zeta\eta}$ .** *Trouver le champ de potentiel électrique  $\varphi_{\zeta\eta} : [0, T] \rightarrow W$  tel que pour tout  $t \in [0, T]$*

$$\begin{aligned} & (\mathbf{B}\nabla\varphi_{\zeta\eta}(t), \nabla\phi)_H - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\zeta\eta}(t)), \nabla\phi)_H + (\gamma(\mathbf{u}_{\zeta\eta}(t), \varphi_{\zeta\eta}(t), \zeta(t)), \phi)_W \\ & = (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, \end{aligned} \quad (5.75)$$

Nous avons le résultat suivant.

**Lemme 5.6.** *QV2 $_{\zeta\eta}$  a une solution unique  $\varphi_{\zeta\eta}$  qui satisfait la régularité (5.46). En plus, si  $\varphi_{\zeta\eta_1}$  et  $\varphi_{\zeta\eta_2}$  vérifient (5.74) correspondant à  $\boldsymbol{\eta}_1$  et  $\boldsymbol{\eta}_2 \in C(0, T; \mathcal{H})$ , respectivement, il existe  $c > 0$  telle que*

$$|\varphi_{\zeta\eta_1}(t) - \varphi_{\zeta\eta_2}(t)|_W \leq c |\mathbf{u}_{\zeta\eta_1}(t) - \mathbf{u}_{\zeta\eta_2}(t)|_V \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.76)$$

**Preuve.** Soit  $t \in [0, T]$ . Nous utilisons le théorème de représentation de Riesz pour définir l'opérateur  $A_{\zeta\eta}(t) : W \rightarrow W$  par

$$\begin{aligned} (A_{\zeta\eta}(t)\varphi, \phi)_W &= (\mathbf{B}\nabla\varphi, \nabla\phi)_H - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\zeta\eta}(t)), \nabla\phi)_H \\ &+ (\gamma(\mathbf{u}_{\zeta\eta}(t), \varphi, \zeta(t)), \phi)_W \quad \forall \varphi, \phi \in W. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Soit  $\varphi_1, \varphi_2 \in W$ . Nous appliquons (5.77) pour  $\varphi = \varphi_1$ , nous obtenons

$$(A_{\zeta\eta}(t)\varphi_1, \phi)_W = (\mathbf{B}\nabla\varphi_1, \nabla\phi)_H - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\zeta\eta}(t)), \nabla\phi)_H$$

$$+(\gamma(\mathbf{u}_{\zeta\eta}(t), \varphi_1, \zeta(t)), \phi)_W \quad \forall \phi \in W,$$

de même, pour  $\varphi = \varphi_2$ , nous avons

$$\begin{aligned} (A_{\zeta\eta}(t)\varphi_2, \phi)_W &= (\mathbf{B}\nabla\varphi_2, \nabla\phi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_{\zeta\eta}(t)), \nabla\phi)_H \\ &+(\gamma(\mathbf{u}_{\zeta\eta}(t), \varphi_2, \zeta(t)), \phi)_W \quad \forall \phi \in W. \end{aligned}$$

Nous faisons une soustraction afin d'obtenir

$$\begin{aligned} (A_{\zeta\eta}(t)\varphi_1 - A_{\zeta\eta}(t)\varphi_2, \phi)_W &= (\mathbf{B}\nabla\varphi_1 - \mathbf{B}\nabla\varphi_2, \nabla\phi)_H \\ &+(\gamma(\mathbf{u}_{\zeta\eta}(t), \varphi_1, \zeta(t)) - \gamma(\mathbf{u}_{\zeta\eta}(t), \varphi_2, \zeta(t)), \phi)_W, \quad \forall \phi \in W. \end{aligned} \tag{5.78}$$

Nous substituons  $\phi$  par  $\varphi_1 - \varphi_2$  dans l'égalité (5.78) pour voir que

$$\begin{aligned} (A_{\zeta\eta}(t)\varphi_1 - A_{\zeta\eta}(t)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W &= (\mathbf{B}\nabla\varphi_1 - \mathbf{B}\nabla\varphi_2, \nabla(\varphi_1 - \varphi_2))_H \\ &+(\gamma(\mathbf{u}_{\zeta\eta}(t), \varphi_1, \zeta(t)) - \gamma(\mathbf{u}_{\zeta\eta}(t), \varphi_2, \zeta(t)), \varphi_1 - \varphi_2)_W. \end{aligned}$$

L'hypothèse (5.16) sur  $\mathbf{B}$  et (5.30) la définition de  $\gamma$  impliquent

$$\begin{aligned} (A_{\zeta\eta}(t)\varphi_1 - A_{\zeta\eta}(t)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W &\geq m_B |\varphi_1 - \varphi_2|_W^2 \\ &+ \int_{\Gamma_3} \psi(u_{\zeta\eta\nu}(t) - g - \zeta(t)) (\phi_L(\varphi_1 - \varphi_0) - \phi_L(\varphi_2 - \varphi_0)) (\varphi_1 - \varphi_2) da. \end{aligned}$$

D'après (3.25) la définition de  $\phi_L$  et l'hypothèse (5.21) sur  $\psi$ , nous déduisons que  $\phi_L$  est monotone et  $\psi$  est positive, donc

$$(A_{\zeta\eta}(t)\varphi_1 - A_{\zeta\eta}(t)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W \geq m_B |\varphi_1 - \varphi_2|_W^2, \tag{5.79}$$

D'autre part, nous utilisons (3.24) avec (5.77), (5.16), (5.30) et (5.21), nous trouvons

$$\begin{aligned} (A_{\zeta\eta}(t)\varphi_1 - A_{\zeta\eta}(t)\varphi_2, \phi)_W &\leq c_B |\varphi_1 - \varphi_2|_W |\phi|_W \\ &+ \int_{\Gamma_3} N_\psi |\varphi_1 - \varphi_2| |\phi| da \quad \forall \phi \in W, \end{aligned}$$

grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (1.14), nous obtenons

$$(A_{\zeta\eta}(t)\varphi_1 - A_{\zeta\eta}(t)\varphi_2, \phi)_W \leq (c_B + N_\psi \tilde{c}_0^2) |\varphi_1 - \varphi_2|_W |\phi|_W.$$

donc

$$|A_{\zeta_\eta}(t)\varphi_1 - A_{\zeta_\eta}(t)\varphi_2|_W \leq (c_B + N_\psi a_0^2) |\varphi_1 - \varphi_2|_W, \quad (5.80)$$

de (5.79) et (5.80) nous déduisons que  $A_{\zeta_\eta}$  est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz sur  $W$ , alors, d'après la proposition 2.4, qu'il existe un élément unique  $\varphi_{\zeta_\eta}(t) \in W$  tel que

$$A_{\zeta_\eta}(t)\varphi_{\zeta_\eta}(t) = q(t). \quad (5.81)$$

en combinant (5.77) avec (5.81), nous concluons que  $\varphi_{\zeta_\eta}$  est une solution unique de  $\text{QV}2_{\zeta_\eta}$ .

Dans la suite, nous vérifions que  $\varphi_{\zeta_\eta} \in C(0, T; W)$ . Pour  $t_1, t_2 \in [0, T]$  nous adoptons les notations suivantes  $\varphi_{\zeta_\eta}(t_i) = \varphi_i$ ,  $u_{\zeta_\eta\nu}(t_i) = u_{\nu i}$ ,  $\mathbf{u}_{\zeta_\eta}(t_i) = \mathbf{u}_i$ ,  $\zeta(t_i) = \zeta_i$  et  $q(t_i) = q_i$ , ( $i = 1, 2$ ).

En utilisant (5.75) pour  $t = t_1$ , nous obtenons

$$(\mathbf{B}\nabla\varphi_1 - \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_1), \nabla\phi)_H + (\gamma(\mathbf{u}_1, \varphi_1, \zeta_1), \phi)_W = (q_1, \phi)_W \quad \forall \phi \in W,$$

de même, pour  $t = t_2$ , nous avons

$$(\mathbf{B}\nabla\varphi_2 - \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_2), \nabla\phi)_H + (\gamma(\mathbf{u}_2, \varphi_2, \zeta_2), \phi)_W = (q_2, \phi)_W \quad \forall \phi \in W,$$

Nous faisons une soustraction et substituons  $\phi$  par  $\varphi_1 - \varphi_2$  pour obtenir

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}\nabla\varphi_1 - \mathbf{B}\nabla\varphi_2, \nabla(\varphi_1 - \varphi_2))_H &= (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_1) - \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_2), \nabla(\varphi_1 - \varphi_2))_H \\ &+ (\gamma(\mathbf{u}_2, \varphi_2, \zeta_2) - \gamma(\mathbf{u}_1, \varphi_1, \zeta_1), \varphi_1 - \varphi_2)_W + (q_1 - q_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W \end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses (5.16) – (5.17), la définition (5.30) de  $\gamma$ , (1.13) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous arrivons à

$$\begin{aligned} m_B |\varphi_1 - \varphi_2|_W^2 &\leq c_\mathcal{E} |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_V |\varphi_1 - \varphi_2|_W + |q_1 - q_2|_W |\varphi_1 - \varphi_2|_W \quad (5.82) \\ &+ \int_{\Gamma_3} |\psi(u_{1\nu} - g - \zeta_1)\phi_L(\varphi_1 - \varphi_0) - \psi(u_{2\nu} - g - \zeta_2)\phi_L(\varphi_2 - \varphi_0)| |\varphi_1 - \varphi_2| da \end{aligned}$$

où  $c_\mathcal{E}$  est une constante positive dépend au tenseur piézoélectrique  $\mathcal{E}$ .

nous utilisons maintenant  $|\psi(u_i - h - \zeta_i)| \leq N_\psi$ ,  $|\phi_L(\varphi_i - \varphi_0)| \leq L$ , la Lipschicité de la fonction  $\psi$  et  $\phi_L$ , l'écriture  $a = a - b + b$  et (1.14), nous avons

$$\int_{\Gamma_3} |\psi(u_{1\nu} - g - \zeta_1)\phi_L(\varphi_1 - \varphi_0) - \psi(u_{2\nu} - g - \zeta_2)\phi_L(\varphi_2 - \varphi_0)| |\varphi_1 - \varphi_2| da$$



$$\begin{aligned}
 &\leq N_\psi \int_{\Gamma_3} |\varphi_1 - \varphi_2|^2 da + L_\psi L \int_{\Gamma_3} |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2| |\varphi_1 - \varphi_2| da + L_\psi L \int_{\Gamma_3} |\zeta_1 - \zeta_2| |\varphi_1 - \varphi_2| da \\
 &\leq N_\psi \tilde{c}_0^2 |\varphi_1 - \varphi_2|_W^2 + L_\psi L \tilde{c}_0 c_0 |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_V |\varphi_1 - \varphi_2|_W + L_\psi L \tilde{c}_0 |\zeta_1 - \zeta_2|_{L^2(\Gamma_3)} |\varphi_1 - \varphi_2|_W.
 \end{aligned}$$

En combinant l'inégalité précédente avec (5.82), nous avons

$$\begin{aligned}
 m_B |\varphi_1 - \varphi_2|_W &\leq (c_\mathcal{E} + L_\psi L \tilde{c}_0 c_0) |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_V \\
 &+ |q_1 - q_2|_W + N_\psi \tilde{c}_0^2 |\varphi_1 - \varphi_2|_W + L_\psi L \tilde{c}_0 |\zeta_1 - \zeta_2|_{L^2(\Gamma_3)}.
 \end{aligned} \tag{5.83}$$

Sous la condition  $N_\psi < \frac{m_B}{a_0^2}$  qui est cité au Théorème 5.1, l'inégalité (5.83) devient

$$|\varphi_1 - \varphi_2|_W \leq c(|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_V + |q_1 - q_2|_W + |\zeta_1 - \zeta_2|_{L^2(\Gamma_3)}). \tag{5.84}$$

Puisque  $\mathbf{u} \in C^1(0, T; V)$ ,  $\zeta \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$  et  $q \in C(0, T; W)$ , l'estimation (5.84) nous donne

$$\varphi_{\zeta\eta} \in C(0, T; W).$$

En outre, soit  $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in C(0, T; \mathcal{H})$  et nous utilisons les notations  $\varphi_{\zeta\eta_i}(t) = \varphi_i(t)$  et  $\mathbf{u}_{\zeta\eta_i}(t) = \mathbf{u}_i(t)$  pour  $i = 1, 2$ . L'utilisation des arguments similaires à ceux utilisés dans la démonstration de (5.83) donne

$$\begin{aligned}
 m_B |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W &\leq (c_\mathcal{E} + L_\psi L \tilde{c}_0 c_0) |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V \\
 &+ N_\psi \tilde{c}_0^2 |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W \quad \forall t \in [0, T],
 \end{aligned}$$

puisque  $N_\psi < \frac{m_B}{\tilde{c}_0^2}$  l'inégalité précédente devient

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W \leq c |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V \quad \forall t \in [0, T].$$

Ce qui termine la preuve du Lemme 5.6. □

Dans la troisième étape, nous considérons  $\lambda \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$  une fonction donnée et pour le champ d'endommagement nous avons le problème variationnel suivant.

**Problème PV2 $_\lambda$ .** *Trouver le champ d'endommagement  $\beta_\lambda : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$  tel que*

$$\begin{aligned}
 \beta_\lambda(t) &\in K, \quad (\dot{\beta}_\lambda(t), \xi - \beta_\lambda(t))_{L^2(\Omega)} + a(\beta_\lambda(t), \xi - \beta_\lambda(t)) \\
 &\geq (\lambda(t), \xi - \beta_\lambda(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K, \text{ p.p. } t \in (0, T),
 \end{aligned} \tag{5.85}$$

$$\beta_\lambda(0) = \beta_0. \quad (5.86)$$

Pour ce problème nous avons le résultat suivant.

**Lemme 5.7.** *Le problème  $PV2_\lambda$  admet une solution unique  $\beta_\lambda$  qui satisfait*

$$\beta_\lambda \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (5.87)$$

**Preuve.** L'application d'inclusion de  $(H^1(\Omega), |\cdot|_{H^1(\Omega)})$  dans  $(L^2(\Omega), |\cdot|_{L^2(\Omega)})$  est continue et à image dense. Notant par  $(H^1(\Omega))'$  l'espace dual de  $H^1(\Omega)$  et identifiant le dual de  $L^2(\Omega)$  avec lui-même, nous pouvons écrire le triplet de Gelfand

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset (H^1(\Omega))'.$$

Nous utilisons la notation  $(\cdot, \cdot)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)}$  pour désigner le produit de dualité entre  $(H^1(\Omega))'$  et  $H^1(\Omega)$ , nous avons

$$(\beta, \xi)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)} = (\beta, \xi)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \beta \in L^2(\Omega), \quad \xi \in H^1(\Omega).$$

Nous savons que l'ensemble des endommagements admissibles  $K$  est un sous-ensemble non vide, fermé et convexe dans  $H^1(\Omega)$ . Ainsi, le champ d'endommagement initial  $\beta_0 \in K$ . Maintenant, en utilisant la définition (5.26) de la forme bilinéaire  $a$ , pour tout  $\xi, \vartheta \in H^1(\Omega)$ , nous avons

$$a(\xi, \vartheta) = a(\vartheta, \xi),$$

et aussi

$$\begin{aligned} a(\xi, \vartheta) &\leq k |\nabla \xi|_H |\nabla \vartheta|_H \\ &\leq k |\xi|_{H^1(\Omega)} |\vartheta|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

donc,  $a$  est symétrique et continue. Ainsi, pour tout  $\xi \in H^1(\Omega)$ , nous avons

$$a(\xi, \xi) = k |\nabla \xi|_H^2,$$

alors que

$$a(\xi, \xi) + (k+1) |\xi|_{L^2(\Omega)}^2 \geq k \left( |\nabla \xi|_H^2 + |\xi|_{L^2(\Omega)}^2 \right),$$

et d'où

$$a(\xi, \xi) + c_0 |\xi|_{L^2(\Omega)}^2 \geq c_1 |\xi|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \text{avec } c_0 = k+1 \text{ et } c_1 = k.$$

Nous remarquons que toutes les conditions du Théorème 2.18 sont vérifiées. Ce qui conclut la preuve du Lemme 5.7.  $\square$

Maintenant, pour  $t \in [0, T]$ , nous considérons l'opérateur

$$\Lambda_\zeta : C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega)) \rightarrow C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega)),$$

défini pour chaque  $(\boldsymbol{\eta}, \lambda) \in C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$  par

$$\Lambda_\zeta(\boldsymbol{\eta}, \lambda)(t) = (\Lambda_\zeta^{(1)}(\boldsymbol{\eta}, \lambda)(t), \Lambda_\zeta^{(2)}(\boldsymbol{\eta}, \lambda)(t)) \in \mathcal{H} \times L^2(\Omega), \quad (5.88)$$

avec

$$\begin{aligned} \Lambda_\zeta^{(1)}(\boldsymbol{\eta}, \lambda)(t) &= \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\zeta\boldsymbol{\eta}}(t)), \beta_\lambda(t)) + \int_0^t \mathcal{M}(t-s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\zeta\boldsymbol{\eta}}(s)) ds \\ &\quad + \mathcal{E}^* \nabla \varphi_{\zeta\boldsymbol{\eta}}(t), \end{aligned} \quad (5.89)$$

$$\Lambda_\zeta^{(2)}(\boldsymbol{\eta}, \lambda)(t) = S(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\zeta\boldsymbol{\eta}}(t)), \beta_\lambda(t)). \quad (5.90)$$

Ici, pour tout  $(\boldsymbol{\eta}, \lambda) \in C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$ ;  $\mathbf{u}_{\zeta\boldsymbol{\eta}}$ ,  $\varphi_{\zeta\boldsymbol{\eta}}$  et  $\beta_\lambda$  représentent le champ des déplacements, le champ de potentiel électrique et le champ d'endommagement obtenus dans les Lemmes 5.5, 5.6 et 5.7 respectivement. Nous avons le résultat suivant.

**Lemme 5.8.** *Il existe un élément unique  $(\boldsymbol{\eta}_\zeta, \lambda_\zeta) \in C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$  tel que*

$$\Lambda_\zeta(\boldsymbol{\eta}_\zeta, \lambda_\zeta) = (\boldsymbol{\eta}_\zeta, \lambda_\zeta).$$

**Preuve.** Soient  $(\boldsymbol{\eta}_1, \lambda_1)$  et  $(\boldsymbol{\eta}_2, \lambda_2) \in C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$ . Nous utilisons les notations  $\mathbf{u}_{\zeta\boldsymbol{\eta}_i} = \mathbf{u}_i$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_{\zeta\boldsymbol{\eta}_i} = \mathbf{v}_{\zeta\boldsymbol{\eta}_i} = \mathbf{v}_i$ ,  $\varphi_{\zeta\boldsymbol{\eta}_i} = \varphi_i$  et  $\beta_{\lambda_i} = \beta_i$  pour  $i = 1, 2$ . En employant (5.89), les hypothèses (5.15), (5.17), (5.22), (1.2), (1.7) et (1.13) nous avons pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} &\left| \Lambda_\zeta^{(1)}(\boldsymbol{\eta}_1, \lambda_1)(t) - \Lambda_\zeta^{(1)}(\boldsymbol{\eta}_2, \lambda_2)(t) \right|_{\mathcal{H}}^2 \leq c(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 \\ &\quad + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds + |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W^2). \end{aligned} \quad (5.91)$$

En outre, nous employons (5.69) pour  $\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\eta}_1(t)$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2(t)$  afin d'écrire

$$\begin{aligned} &(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)))_{\mathcal{H}} \leq j(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_2(t), \zeta(t)) \\ &\quad - j(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_1(t), \zeta(t)) - (\boldsymbol{\eta}_1(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t))_V, \end{aligned}$$

puis, pour  $\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\eta}_2(t)$  et  $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1(t)$  afin d'avoir

$$(-\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_2(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_1(t) - \boldsymbol{v}_2(t)))_{\mathcal{H}} \leq j(\boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{v}_2(t), \boldsymbol{v}_1(t), \zeta(t))$$

$$-j(\boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{v}_2(t), \boldsymbol{v}_2(t), \zeta(t)) + (\boldsymbol{\eta}_2(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_1(t) - \boldsymbol{v}_2(t)))_{\mathcal{H}} - (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}_1(t) - \boldsymbol{v}_2(t))_V,$$

nous additionnons les deux inégalités précédentes afin d'obtenir

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_1(t)) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_2(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_1(t) - \boldsymbol{v}_2(t)))_{\mathcal{H}} \\ & \leq j(\boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{v}_1(t), \boldsymbol{v}_2(t), \zeta(t)) - j(\boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{v}_1(t), \boldsymbol{v}_1(t), \zeta(t)) \\ & \quad + j(\boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{v}_2(t), \boldsymbol{v}_1(t), \zeta(t)) - j(\boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{v}_2(t), \boldsymbol{v}_2(t), \zeta(t)) \\ & \quad + (\boldsymbol{\eta}_2(t) - \boldsymbol{\eta}_1(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_1(t) - \boldsymbol{v}_2(t)))_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

De (1.2), (1.7), (5.14) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\begin{aligned} & m_{\mathcal{A}} |\boldsymbol{v}_1(t) - \boldsymbol{v}_2(t)|_V^2 \tag{5.92} \\ & \leq |\boldsymbol{\eta}_1(t) - \boldsymbol{\eta}_2(t)|_{\mathcal{H}} |\boldsymbol{v}_1(t) - \boldsymbol{v}_2(t)|_V \\ & \quad |j(\boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{v}_1(t), \boldsymbol{v}_2(t), \zeta(t)) - j(\boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{v}_1(t), \boldsymbol{v}_1(t), \zeta(t))| \\ & \quad + |j(\boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{v}_2(t), \boldsymbol{v}_1(t), \zeta(t)) - j(\boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{v}_2(t), \boldsymbol{v}_2(t), \zeta(t))|. \end{aligned}$$

Maintenant, nous utilisons des arguments similaires à ceux utilisés dans la démonstration de (5.59) pour voir que

$$\begin{aligned} & |j(\boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{v}_1(t), \boldsymbol{v}_2(t), \zeta(t)) - j(\boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{v}_1(t), \boldsymbol{v}_1(t), \zeta(t))| \tag{5.93} \\ & \quad + |j(\boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{v}_2(t), \boldsymbol{v}_2(t), \zeta(t)) - j(\boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{v}_2(t), \boldsymbol{v}_1(t), \zeta(t))| \\ & \leq L_{\nu}(1 + \mu^*)c_0^2 |\boldsymbol{u}_1(t) - \boldsymbol{u}_2(t)|_V |\boldsymbol{v}_1(t) - \boldsymbol{v}_2(t)|_V + L_{\mu}p_{\nu}^*c_0^2 |\boldsymbol{v}_1(t) - \boldsymbol{v}_2(t)|_V^2 \end{aligned}$$

nous combinons (5.92) avec (5.93), nous obtenons

$$\begin{aligned} & (m_{\mathcal{A}} - p_{\nu}^*L_{\mu}c_0^2) |\boldsymbol{v}_1(t) - \boldsymbol{v}_2(t)|_V^2 \tag{5.94} \\ & \leq c_0^2L_{\nu}(1 + \mu^*) |\boldsymbol{u}_1(t) - \boldsymbol{u}_2(t)|_V |\boldsymbol{v}_1(t) - \boldsymbol{v}_2(t)|_V \\ & \quad + |\boldsymbol{\eta}_1(t) - \boldsymbol{\eta}_2(t)|_{\mathcal{H}} |\boldsymbol{v}_1(t) - \boldsymbol{v}_2(t)|_V. \end{aligned}$$

Puisque  $m_{\mathcal{A}} > p_{\nu}^* L_{\mu} c_0^2$ , l'inégalité (5.94) devient

$$|\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)|_V \leq c(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V + |\boldsymbol{\eta}_1(t) - \boldsymbol{\eta}_2(t)|_{\mathcal{H}}).$$

Nous mettons cette inégalité au carré et intégrons par rapport au temps, nous avons

$$\int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds \leq c \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds + c \int_0^t |\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)|_{\mathcal{H}}^2 ds. \quad (5.95)$$

Nous savons que

$$\mathbf{u}_i(t) = \mathbf{u}_i(0) + \int_0^t \mathbf{v}_i(s) ds \quad i = 1, 2,$$

et, nous avons

$$\mathbf{u}_1(0) = \mathbf{u}_2(0) = \mathbf{u}_0,$$

donc

$$|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 \leq c \int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.96)$$

Nous combinons (5.95) avec (5.96) pour obtenir

$$|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 \leq c \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds + c \int_0^t |\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)|_{\mathcal{H}}^2 ds, \quad (5.97)$$

en appliquant le Lemme 2.19 de Gronwall, nous déduisons que

$$|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 \leq c \int_0^t |\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)|_{\mathcal{H}}^2 ds, \quad (5.98)$$

de (5.95) et (5.98), trouvons

$$\int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds \leq c \int_0^t |\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)|_{\mathcal{H}}^2 ds. \quad (5.99)$$

En autre part, de (5.85), nous déduisons que

$$\begin{aligned} & (\dot{\beta}_1(t) - \dot{\beta}_2(t), \beta_1(t) - \beta_2(t))_{L^2(\Omega)} + a(\beta_1(t) - \beta_2(t), \beta_1(t) - \beta_2(t)) \\ & \leq (\lambda_1(t) - \lambda_2(t), \beta_1(t) - \beta_2(t))_{L^2(\Omega)}, \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

En intégrant l'inégalité précédente par rapport au temps avec les conditions initiales

$$\beta_1(0) = \beta_0 \text{ et } \beta_2(0) = \beta_0$$

et en utilisant l'inégalité

$$a(\beta_1(t) - \beta_2(t), \beta_1(t) - \beta_2(t)) \geq 0$$

nous obtenons

$$\frac{1}{2} |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t (\lambda_1(s) - \lambda_2(s), \beta_1(s) - \beta_2(s))_{L^2(\Omega)} ds.$$

Puisque  $2ab \leq a^2 + b^2$ , il vient alors que

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t |\lambda_1(s) - \lambda_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \int_0^t |\beta_1(s) - \beta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds.$$

Nous utilisons le Lemme 2.19 de Gronwall dans l'inégalité précédente, pour trouver

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \int_0^t |\lambda_1(s) - \lambda_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds. \quad (5.100)$$

Pour le champ de potentiel électrique, de (5.84), nous avons

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W^2 \leq c |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2, \quad (5.101)$$

de l'inégalité précédente et (5.98), nous avons

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W^2 \leq c \int_0^t |\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)|_{\mathcal{H}}^2 ds$$

Nous combinons (5.91), (5.98), (5.100) et la dernière estimation afin de trouver

$$\begin{aligned} \left| \Lambda_{\zeta}^{(1)}(\boldsymbol{\eta}_1, \lambda_1)(t) - \Lambda_{\zeta}^{(1)}(\boldsymbol{\eta}_2, \lambda_2)(t) \right|_{\mathcal{H}}^2 &\leq c \left( \int_0^t |\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)|_{\mathcal{H}}^2 ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t |\lambda_1(s) - \lambda_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right). \end{aligned} \quad (5.102)$$

Maintenant, nous utilisons (5.90) avec l'hypothèse (5.18), nous voyons que

$$\begin{aligned} \left| \Lambda_{\zeta}^{(2)}(\boldsymbol{\eta}_1, \lambda_1)(t) - \Lambda_{\zeta}^{(2)}(\boldsymbol{\eta}_2, \lambda_2)(t) \right|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq c (|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 \\ &\quad + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2), \end{aligned}$$

d'après (5.98) et (5.100), l'inégalité précédente devient

$$\begin{aligned} \left| \Lambda_{\zeta}^{(2)}(\boldsymbol{\eta}_1, \lambda_1)(t) - \Lambda_{\zeta}^{(2)}(\boldsymbol{\eta}_2, \lambda_2)(t) \right|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq c \left( \int_0^t |\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)|_{\mathcal{H}}^2 ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t |\lambda_1(s) - \lambda_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right). \end{aligned} \quad (5.103)$$

Et comme

$$\begin{aligned} |\Lambda_\zeta(\boldsymbol{\eta}_1, \lambda_1)(t) - \Lambda_\zeta(\boldsymbol{\eta}_2, \lambda_2)(t)|_{\mathcal{H} \times L^2(\Omega)}^2 &= \left| \Lambda_\zeta^{(1)}(\boldsymbol{\eta}_1, \lambda_1)(t) - \Lambda_\zeta^{(1)}(\boldsymbol{\eta}_2, \lambda_2)(t) \right|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\quad + \left| \Lambda_\zeta^{(2)}(\boldsymbol{\eta}_1, \lambda_1)(t) - \Lambda_\zeta^{(2)}(\boldsymbol{\eta}_2, \lambda_2)(t) \right|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Alors que, de (5.102) et (5.103), nous avons

$$|\Lambda_\zeta(\boldsymbol{\eta}_1, \lambda_1)(t) - \Lambda_\zeta(\boldsymbol{\eta}_2, \lambda_2)(t)|_{\mathcal{H} \times L^2(\Omega)}^2 \leq c \left( \int_0^t |\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)|_{\mathcal{H}}^2 ds + \int_0^t |\lambda_1(s) - \lambda_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right),$$

donc

$$|\Lambda_\zeta(\boldsymbol{\eta}_1, \lambda_1)(t) - \Lambda_\zeta(\boldsymbol{\eta}_2, \lambda_2)(t)|_{\mathcal{H} \times L^2(\Omega)}^2 \leq c \int_0^t |(\boldsymbol{\eta}_1, \lambda_1)(s) - (\boldsymbol{\eta}_2, \lambda_2)(s)|_{\mathcal{H} \times L^2(\Omega)}^2 ds$$

En réitérant  $m$  fois l'inégalité précédente, nous obtenons

$$|\Lambda_\zeta^m(\boldsymbol{\eta}_1, \lambda_1) - \Lambda_\zeta^m(\boldsymbol{\eta}_2, \lambda_2)|_{0, \mathcal{H} \times L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{(cT)^m}{m!} |(\boldsymbol{\eta}_1, \lambda_1) - (\boldsymbol{\eta}_2, \lambda_2)|_{0, \mathcal{H} \times L^2(\Omega)}^2$$

nous déduisons que si  $m$  suffisamment grand, l'opérateur  $\Lambda_\zeta^m$  est un contractant sur l'espace de Banach  $C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$ , donc,  $\Lambda_\zeta^m$  possède un point fixe unique  $(\boldsymbol{\eta}_\zeta, \lambda_\zeta) \in C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$  et par conséquent  $(\boldsymbol{\eta}_\zeta, \lambda_\zeta)$  est le point fixe unique de  $\Lambda_\zeta$ .  $\square$

Soit  $\zeta \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$ . Dans la quatrième étape, nous considérons le problème variationnel suivant.

**Problème PV2 $_\zeta$ .** *Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u}_\zeta : [0, T] \rightarrow V$ , le champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}_\zeta : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ , le champ de potentiel électrique  $\varphi_\zeta : [0, T] \rightarrow W$ , le champ des déplacements électriques  $\mathbf{D}_\zeta : [0, T] \rightarrow H$  et le champ d'endommagement  $\beta_\zeta : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$  tels que pour tout  $t \in [0, T]$ ,*

$$\boldsymbol{\sigma}_\zeta(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_\zeta(t)) + \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\zeta(t)), \beta_\zeta(t)) + \int_0^t \mathcal{M}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\zeta(s))ds + \mathcal{E}^*\nabla\varphi_\zeta(t), \quad (5.104)$$

$$(\boldsymbol{\sigma}_\zeta(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\zeta(t)))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}_\zeta(t), \dot{\mathbf{u}}_\zeta(t), \mathbf{v}, \zeta(t)) \quad (5.105)$$

$$-j(\mathbf{u}_\zeta(t), \dot{\mathbf{u}}_\zeta(t), \dot{\mathbf{u}}_\zeta(t), \zeta(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\zeta(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

$$\mathbf{D}_\zeta(t) = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\zeta(t)) - \mathbf{B}\nabla\varphi_\zeta(t), \quad (5.106)$$

$$(\mathbf{D}_\zeta(t), \nabla\phi)_H = (\gamma(\mathbf{u}_\zeta(t), \varphi_\zeta(t), \zeta(t)), \phi)_W - (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, \quad (5.107)$$

$$\beta_\zeta(t) \in K \quad \forall t \in [0, T], \quad (\dot{\beta}_\zeta(t), \xi - \beta_\zeta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\beta_\zeta(t), \xi - \beta_\zeta(t)) \quad (5.108)$$

$$\geq (S(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\zeta(t)), \beta_\zeta(t)), \xi - \beta_\zeta(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K,$$

$$\mathbf{u}_\zeta(0) = \mathbf{u}_0, \quad \beta_\zeta(0) = \beta_0. \quad (5.109)$$

**Lemme 5.9.** *Le problème PV2 $_\zeta$  admet une solution unique  $(\mathbf{u}_\zeta, \boldsymbol{\sigma}_\zeta, \varphi_\zeta, \mathbf{D}_\zeta, \beta_\zeta)$  qui satisfait (5.44) – (5.48).*

**Preuve.** Soit  $(\boldsymbol{\eta}_\zeta, \lambda_\zeta) \in C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$  le point fixe de  $\Lambda$  qui est défini par (5.88) – (5.90), nous adoptons les notations  $\mathbf{u}_\zeta = \mathbf{u}_{\zeta\boldsymbol{\eta}_\zeta}$ ,  $\varphi_\zeta = \varphi_{\zeta\boldsymbol{\eta}_\zeta}$  et  $\beta_\zeta = \beta_{\lambda_\zeta}$  qui sont les solutions des problèmes PV2 $_{\zeta\boldsymbol{\eta}}$ , QV2 $_{\zeta\boldsymbol{\eta}}$  et PV2 $_\lambda$  obtenues dans les Lemmes 5.5, 5.6 et 5.7 respectivement pour  $(\boldsymbol{\eta}, \lambda) = (\boldsymbol{\eta}_\zeta, \lambda_\zeta)$ .

Nous posons pour tout  $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_\zeta(t) &= \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_\zeta(t)) + \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\zeta(t)), \beta_\zeta(t)) + \int_0^t \mathcal{M}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\zeta(s))ds \\ &\quad + \mathcal{E}^*\nabla\varphi_\zeta(t) \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (5.110)$$

$$\mathbf{D}_\zeta(t) = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\zeta(t)) - \mathbf{B}\nabla\varphi_\zeta(t) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.111)$$

Nous montrons que  $(\mathbf{u}_\zeta, \boldsymbol{\sigma}_\zeta, \varphi_\zeta, \mathbf{D}_\zeta, \beta_\zeta)$  satisfaisant (5.104) – (5.109) et la régularité (5.44) – (5.48). En effet, nous écrivons (5.69) pour  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_\zeta$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_\zeta(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\zeta(t))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}_\zeta(t), \dot{\mathbf{u}}_\zeta(t), \mathbf{v}, \zeta(t)) - j(\mathbf{u}_\zeta(t), \dot{\mathbf{u}}_\zeta(t), \dot{\mathbf{u}}_\zeta(t), \zeta(t)) \\ + (\boldsymbol{\eta}_\zeta(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\zeta(t))_{\mathcal{H}}) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\zeta(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, \end{aligned} \quad (5.112)$$

En outre, nous écrivons (5.85) pour  $\lambda = \lambda_\zeta$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \beta_\zeta(t) \in K, \quad (\dot{\beta}_\zeta(t), \xi - \beta_\zeta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\beta_\zeta(t), \xi - \beta_\zeta(t)) \\ \geq (\lambda_\zeta(t), \xi - \beta_\zeta(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K, \quad p.p. \quad t \in (0, T), \end{aligned} \quad (5.113)$$

Nous combinons les égalités  $\Lambda_\zeta^{(1)}(\boldsymbol{\eta}_\zeta(t), \lambda_\zeta(t)) = \boldsymbol{\eta}_\zeta(t)$  et  $\Lambda_\zeta^{(2)}(\boldsymbol{\eta}_\zeta(t), \lambda_\zeta(t)) = \lambda_\zeta(t)$  avec (5.89) et (5.90) afin de voir que

$$\boldsymbol{\eta}_\zeta(t) = \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\zeta(t)), \beta_\zeta(t)) + \int_0^t \mathcal{M}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\zeta(s))ds + \mathcal{E}^*\nabla\varphi_\zeta(t), \quad (5.114)$$

$$\lambda_\zeta(t) = S(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\zeta(t)), \beta_\zeta(t)). \quad (5.115)$$

Nous combinons (5.110), (5.112) avec (5.114), nous avons

$$(\boldsymbol{\sigma}_\zeta(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\zeta(t))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}_\zeta(t), \dot{\mathbf{u}}_\zeta(t), \mathbf{v}, \zeta(t)) - j(\mathbf{u}_\zeta(t), \dot{\mathbf{u}}_\zeta(t), \dot{\mathbf{u}}_\zeta(t), \zeta(t)) \quad (5.116)$$



$$\geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\zeta(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in (0, T)$$

De même, en combinant (5.113) avec (5.115), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \beta_\zeta(t) \in K, (\dot{\beta}_\zeta(t), \xi - \beta_\zeta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\beta_\zeta(t), \xi - \beta_\zeta(t)) \\ & \geq (S(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\zeta(t)), \beta_\zeta(t)), \xi - \beta_\zeta(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K, \text{ p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (5.117)$$

Nous écrivons (5.75) pour  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_\zeta$ , et utilisons (5.111), nous pouvons écrire

$$(\mathbf{D}_\zeta(t), \nabla \phi)_H = (\gamma(\mathbf{u}_\zeta(t), \varphi_\zeta(t), \zeta(t)), \phi)_W - (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, t \in (0, T) \quad (5.118)$$

Soit  $t_1, t_2 \in [0, T]$ , d'après (1.8) – (1.12) et (5.111), nous déduisons que

$$|\mathbf{D}_\zeta(t_1) - \mathbf{D}_\zeta(t_2)|_H \leq c (|\varphi_\zeta(t_1) - \varphi_\zeta(t_2)|_W + |\mathbf{u}_\zeta(t_1) - \mathbf{u}_\zeta(t_2)|_V),$$

de la régularité de  $(\mathbf{u}_\zeta, \varphi_\zeta)$ , nous impliquons que

$$\mathbf{D}_\zeta \in C(0, T; H).$$

Nous choisissons  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  dans (5.118), trouvons que

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_\zeta(t) = q_0(t) \quad \forall t \in [0, T].$$

D'après la régularité de  $q_0$ , nous voyons que

$$\mathbf{D}_\zeta \in C(0, T; \mathcal{W}).$$

Maintenant, de (5.110) – (5.111) et (5.116) – (5.118) avec les conditions initiales (5.70), (5.86) et d'après les Lemmes 5.5, 5.6 et 5.7, nous concluons que  $(\mathbf{u}_\zeta, \boldsymbol{\sigma}_\zeta, \varphi_\zeta, \mathbf{D}_\zeta, \beta_\zeta)$  est une solution de PV2 $_\zeta$ , l'unicité de cette solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur  $\Lambda$ .  $\square$

Nous considérons maintenant l'opérateur  $\mathcal{T} : C(0, T; L^2(\Gamma_3)) \rightarrow C(0, T; L^2(\Gamma_3))$  défini par

$$\mathcal{T}\zeta(t) = k_1 \int_0^t \mu(\zeta, |\dot{\mathbf{u}}_{\zeta\tau} - \mathbf{v}^*|) p_\nu(u_{\zeta\nu} - g - \zeta) R^*(|\dot{\mathbf{u}}_{\zeta\tau} - \mathbf{v}^*|) ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.119)$$

L'étape finale de la démonstration du Théorème 5.1 est le résultat suivant.

**Lemme 5.10.** *L'opérateur  $\mathcal{T}$  a un point fixe unique  $\zeta^* \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$ .*

**Preuve.** Soit  $\zeta_1, \zeta_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$  et  $(\mathbf{u}_{\zeta_i}, \boldsymbol{\sigma}_{\zeta_i}, \varphi_{\zeta_i}, \mathbf{D}_{\zeta_i}, \beta_{\zeta_i})$  l'élément qui satisfait (5.104) – (5.109) pour  $\zeta = \zeta_i$ ,  $i = 1, 2$ , nous utilisons les notations  $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{\zeta_i}$ ,  $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{u}}_{\zeta_i}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{\sigma}_{\zeta_i}$ ,  $\beta_i = \beta_{\zeta_i}$ ,  $\varphi_i = \varphi_{\zeta_i}$  et  $\mathbf{D}_i = \mathbf{D}_{\zeta_i}$ . Nous utilisons (5.104) avec (5.105) pour  $\zeta(t) = \zeta_1(t)$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2(t)$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(t)), \beta_1(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)))_{\mathcal{H}} \\ & \left( \int_0^t \mathcal{M}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(s))ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)) \right)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_1(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)))_{\mathcal{H}} \\ & + j(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_1(t), \zeta_1(t)) - j(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_2(t), \zeta_1(t)) \\ & \leq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, \end{aligned}$$

de même, pour  $\zeta(t) = \zeta_2(t)$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1(t)$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} & (-\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)))_{\mathcal{H}} + (-\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(t)), \beta_2(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)))_{\mathcal{H}} \\ & \left( -\int_0^t \mathcal{M}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(s))ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)) \right)_{\mathcal{H}} + (-\mathcal{E}^*\nabla\varphi_2(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)))_{\mathcal{H}} \\ & + j(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{v}_2(t), \mathbf{v}_2(t), \zeta_2(t)) - j(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{v}_2(t), \mathbf{v}_1(t), \zeta_2(t)) \\ & \leq (-\mathbf{f}(t), \mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, \end{aligned}$$

Nous ajoutons les deux inégalités précédentes afin de voir que

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t)) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)))_{\mathcal{H}} \\ & + (\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(t)), \beta_1(t)) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(t)), \beta_2(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)))_{\mathcal{H}} \\ & + \left( \int_0^t \mathcal{M}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(s))ds - \int_0^t \mathcal{M}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(s))ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)) \right)_{\mathcal{H}} \\ & + j(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_1(t), \zeta_1(t)) - j(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_2(t), \zeta_1(t)) \\ & + j(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{v}_2(t), \mathbf{v}_2(t), \zeta_2(t)) - j(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{v}_2(t), \mathbf{v}_1(t), \zeta_2(t)) \\ & + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_1(t) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi_2(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)))_{\mathcal{H}} \leq 0. \end{aligned}$$

Nous employons (1.2), les hypothèses (5.14) – (5.15), (5.17) et (5.22), nous trouvons

$$\begin{aligned} & m_{\mathcal{A}} |\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)|_V^2 \\ & \leq c \left[ |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V + |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)} \right] |\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)|_V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +c \left( \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V ds \right) |\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)|_V \\
 & + |j(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_1(t), \zeta_1(t)) - j(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_2(t), \zeta_1(t))| \\
 & + |j(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{v}_2(t), \mathbf{v}_2(t), \zeta_2(t)) - j(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{v}_2(t), \mathbf{v}_1(t), \zeta_2(t))|.
 \end{aligned}$$

En utilisant (5.31). Des arguments similaires à ceux utilisés dans la démonstration de (5.59) montrent que

$$\begin{aligned}
 & |j(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_1(t), \zeta_1(t)) - j(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_2(t), \zeta_1(t))| \\
 & + |j(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{v}_2(t), \mathbf{v}_2(t), \zeta_2(t)) - j(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{v}_2(t), \mathbf{v}_1(t), \zeta_2(t))| \\
 & \leq L_\nu (1 + \mu^*) c_0^2 |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V |\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)|_V + L_\mu p_\nu^* c_0^2 |\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)|_V^2 \\
 & + (L_\mu + L_\mu p_\nu^* + L_\nu \mu^*) c_0 |\zeta_1(t) - \zeta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} |\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)|_V.
 \end{aligned}$$

Nous combinons les deux inégalités précédentes et (5.101) avec la condition  $L_\mu p_\nu^* c_0^2 < m_A$  pour obtenir

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)|_V^2 & \leq c \left( |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds \right. \\
 & \left. |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + |\zeta_1(t) - \zeta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \right). \quad (5.120)
 \end{aligned}$$

De (5.115), nous avons

$$|\lambda_1(t) - \lambda_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \left( |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \right),$$

Nous intégrons par rapport au temps et utilisons (5.100) avec le Lemme 2.19 de Gronwall, nous obtenons

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds$$

En intégrant (5.120) par rapport au temps avec l'inégalité précédente, nous voyons que

$$\int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds \leq c \left( \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |\zeta_1(s) - \zeta_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds \right). \quad (5.121)$$

Puisque, nous avons

$$\mathbf{u}_i(t) = \mathbf{u}_i(0) + \int_0^t \mathbf{v}_i(s) ds \quad i = 1, 2,$$

et comme

$$\mathbf{u}_1(0) = \mathbf{u}_2(0) = \mathbf{u}_0,$$

donc

$$|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 \leq c \int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds.$$

Nous combinons cette inégalité avec (5.121), nous trouvons

$$|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 \leq c \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds + c \int_0^t |\zeta_1(s) - \zeta_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds,$$

en appliquant le Lemme 2.19 de Gronwall, nous avons

$$|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 \leq c \int_0^t |\zeta_1(s) - \zeta_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds. \quad (5.122)$$

En intégrant cette inégalité par rapport au temps et nous combinons ce résultat avec (5.121)

afin de voir que

$$\int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds \leq c \int_0^t |\zeta_1(s) - \zeta_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds. \quad (5.123)$$

En autre part, comme pour  $i = 1, 2$

$$\mathcal{T}\zeta_i(t) = k_1 \int_0^t \mu(\zeta_i(s), |\mathbf{v}_{i\tau}(s) - \mathbf{v}^*|) p_\nu(u_{i\nu}(s) - g - \zeta_i(s)) R^*(|\mathbf{v}_{i\tau}(s) - \mathbf{v}^*|) ds,$$

en utilisant les hypothèses (5.19) – (5.20), la définition de  $R^*$  et l'écriture  $a = a - b + b$ , nous avons pour tout  $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} & |\mathcal{T}\zeta_1(t) - \mathcal{T}\zeta_2(t)| \\ & \leq k_1 p_\nu^* R \int_0^t |\mu(\zeta_1(s), |\mathbf{v}_{1\tau}(s) - \mathbf{v}^*|) - \mu(\zeta_2(s), |\mathbf{v}_{2\tau}(s) - \mathbf{v}^*|)| ds \\ & \quad + k_1 \mu^* R \int_0^t |p_\nu(u_{1\nu}(s) - g - \zeta_1(s)) - p_\nu(u_{2\nu}(s) - g - \zeta_2(s))| ds \\ & \quad + k_1 \mu^* p_\nu^* \int_0^t |R^*(|\mathbf{v}_{1\tau}(s) - \mathbf{v}^*|) - R^*(|\mathbf{v}_{2\tau}(s) - \mathbf{v}^*|)| ds \end{aligned}$$

donc, d'après les propriétés de  $R^*$ , les hypothèses sur  $\mu$  et  $p_\nu$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} & |\mathcal{T}\zeta_1(t) - \mathcal{T}\zeta_2(t)| \\ & \leq c \int_0^t [|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)| + |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)| + |\zeta_1(s) - \zeta_2(s)|] ds. \end{aligned}$$

En mettant cette inégalité à la puissance deux puis nous intégrons par rapport à  $\mathbf{x}$  sur  $\Gamma_3$  et utilisons (1.8), nous voyons que

$$|\mathcal{T}\zeta_1(t) - \mathcal{T}\zeta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)}^2$$

$$\leq c \int_0^t \left[ |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 + |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 + |\zeta_1(s) - \zeta_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \right] ds,$$

en combinant cette estimation avec (5.122) – (5.123), nous déduisons que

$$|\mathcal{T}\zeta_1(t) - \mathcal{T}\zeta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq c \int_0^t |\zeta_1(s) - \zeta_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds.$$

En réitérant  $m$  fois l'inégalité précédente, nous obtenons

$$|\mathcal{T}^m \zeta_1 - \mathcal{T}^m \zeta_2|_{0,L^2(\Gamma_3)}^2 \leq \frac{(cT)^m}{m!} |\zeta_1 - \zeta_2|_{0,L^2(\Gamma_3)}^2.$$

Pour  $m$  assez grand l'opérateur  $\mathcal{T}^m$  est un contractant sur l'espace de Banach  $C(0, T; L^2(\Gamma_3))$ , donc  $\mathcal{T}$  a un point fixe unique  $\zeta^* \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$ .  $\square$

Maintenant, nous passons à la démonstration du Théorème 5.1.

### Démonstration du Théorème 5.1.

**Existence.** Soit  $\zeta^* \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$  le point fixe de l'opérateur  $\mathcal{T}$  donné par (5.119). Pour  $\zeta = \zeta^*$ , nous posons  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_{\zeta^*}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}_{\zeta^*}$ ,  $\beta^* = \beta_{\zeta^*}$ ,  $\varphi^* = \varphi_{\zeta^*}$  et  $\mathbf{D}^* = \mathbf{D}_{\zeta^*}$ , d'après le Lemme 5.9, nous déduisons que  $(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*, \varphi^*, \mathbf{D}^*, \beta^*)$  est la solution unique de PV2 $_{\zeta}$  qui satisfait (5.44) – (5.48). En autre part, d'après (5.119) la définition de l'opérateur  $\mathcal{T}$  et puisque  $\mathcal{T}\zeta^*(t) = \zeta^*(t)$ , nous avons

$$\zeta^*(t) = k_1 \int_0^t \mu(\zeta^*, |\dot{\mathbf{u}}_{\tau}^* - \mathbf{v}^*|) p_{\nu}(u_{\nu}^* - g - \zeta^*) R^*(|\dot{\mathbf{u}}_{\tau}^* - \mathbf{v}^*|) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors que

$$\dot{\zeta}^*(t) = k_1 \mu(\zeta^*, |\dot{\mathbf{u}}_{\tau}^* - \mathbf{v}^*|) p_{\nu}(u_{\nu}^* - g - \zeta^*) R^*(|\dot{\mathbf{u}}_{\tau}^* - \mathbf{v}^*|) \quad \forall t \in [0, T] \quad (5.124)$$

avec

$$\zeta^*(0) = 0. \quad (5.125)$$

De la régularité de  $\mu$ ,  $p_{\nu}$ ,  $R^*$ ,  $\mathbf{u}^*$  et  $\zeta^*$ , nous déduisons que

$$\zeta^* \in C^1(0, T; L^2(\Gamma_3)). \quad (5.126)$$

Nous concluons de (5.124) – (5.126) que  $(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*, \varphi^*, \mathbf{D}^*, \beta^*, \zeta^*)$  est une solution de PV2 qui satisfait (5.44) – (5.49).

**Unicité.** L'unicité de la solution  $(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*, \varphi^*, \mathbf{D}^*, \beta^*, \zeta^*)$  est une conséquence de l'unicité des points fixes de l'opérateur  $\Lambda$  et  $\mathcal{T}$  qui sont définis par (5.88) – (5.90) et (5.119) respectivement.  $\square$

## Chapitre 6

# Problème électro-élasto-viscoplastique avec une variable interne d'état et adhésion

Nous considérons dans ce chapitre un problème de contact avec frottement, compliance normale et adhésion dans un processus quasi-statique entre un corps électro-élasto-viscoplastique avec mémoire longue et une variable interne d'état, et une fondation déformable et électriquement conductrice. Le processus d'adhésion sur la surface de contact est modélisé par une variable interne de surface appelée champ d'adhésion.

Le problème est formulé par un système d'équations et d'inéquations aux dérivées partielles contenant la loi de comportement du matériau, l'équation de mouvement du corps, l'équation de conservation de la charge électrique, une équation d'évolution modélisant le champ de variable interne d'état, une équation différentielle modélisant le champ d'adhésion et les conditions aux limites auxquelles il est soumis.

Ce chapitre est divisé en trois sections. Dans la première section, nous présentons le problème mécanique, puis nous indiquons les hypothèses sur les données. Dans la deuxième section, nous décrivons la formulation variationnelle du problème mécanique. Enfin, dans la troisième section, nous étudions l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème mécanique. Les techniques employées sont basées sur les résultats des inéquations variationnelles elliptique, des équations d'évolution et les arguments de point fixe.

## 6.1 Formulation mécanique du problème

Dans cette section. Nous nous plaçons dans le cadre physique de la FIG 3.1.2, à supposer que  $\mathbf{v}^* = \mathbf{0}$ . Nous considérons que le corps est électro-élasto-viscoplastique avec une variable interne d'état, plus exactement nous utilisons une loi de comportement de la forme (3.6). En ce qui concerne le contact, nous modélisons par une compliance normale avec frottement et adhésion.

Sous ces considérations, le problème mécanique que nous étudions est le suivant.

**Problème P3.** *Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ , le champ de potentiel électrique  $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , le champ des déplacements électriques  $\mathbf{D} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le champ de variable interne d'état  $\mathbf{k} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  et le champ d'adhésion  $\alpha : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tels que*

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \mathcal{E}^*\nabla\varphi \quad (6.1)$$

$$+ \int_0^t \mathcal{G}(t-s, \boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(s)) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \mathbf{k}(s)) ds \text{ dans } \Omega \times (0, T),$$

$$\mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathbf{B}\nabla\varphi \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (6.2)$$

$$\dot{\mathbf{k}} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma} - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \mathbf{k}) \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (6.3)$$

$$\text{Div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (6.4)$$

$$\text{div}\mathbf{D} = q_0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (6.5)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (6.6)$$

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (6.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g) - \gamma_\nu \alpha^2 R_\nu(u_\nu) \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \alpha^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)| \leq p_\tau(u_\nu - g) \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \alpha^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)| < p_\tau(u_\nu - g) \Rightarrow \dot{\mathbf{u}}_\tau = 0 \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \alpha^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)| = p_\tau(u_\nu - g) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \\ \text{telle que } \boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \alpha^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau) = -\lambda \dot{\mathbf{u}}_\tau \\ \dot{\alpha} = -(\alpha [\gamma_\nu (R_\nu(u_\nu))^2 + \gamma_\tau |\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)|^2] - \varepsilon_a)_+ \end{array} \right. \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (6.8)$$

$$\varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_a \times (0, T), \quad (6.9)$$

$$\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\nu} = q_2 \text{ sur } \Gamma_b \times (0, T), \quad (6.10)$$

$$\mathbf{D}\cdot\nu = \psi(u_\nu - g)\phi_L(\varphi - \varphi_0) \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (6.11)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \mathbf{k}(0) = \mathbf{k}_0 \text{ dans } \Omega, \quad (6.12)$$

$$\alpha(0) = \alpha_0 \text{ sur } \Gamma_3. \quad (6.13)$$

Les équations (6.1) – (6.2) représentent la loi de comportement du corps électro-elasto-viscoplastique à mémoire longue avec une variable interne d'état. La variable interne d'état est modélisée par l'équation d'évolution (6.3). La relation (6.4) représente l'équation du mouvement et (6.5) représente l'équation de conservation de la charge électrique, tandis que les conditions (6.6) et (6.7) sont respectivement, des conditions aux limites de déplacement-traction. Les conditions (6.8) représentent les conditions aux limites de contact avec compliance normale, frottement et adhésion. Les équations (6.9) et (6.11) sont les conditions aux limites électriques et pour finir (6.12) et (6.13) représentent les conditions initiales.

Afin de simplifier la notation, nous ne signalons pas explicitement la dépendance des différentes fonctions de la variable spatiale  $\mathbf{x}$ .

Pour l'étude du problème mécanique (6.1) – (6.13), nous introduisons les espaces de Hilbert  $H$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $H_1$  et  $\mathcal{H}_1$  donnés par (1.1) munis des produits scalaires donnés par (1.2). Tout au long de ce chapitre, nous avons besoins de l'espaces  $V$ ,  $W$  et  $\mathcal{W}$  définis par (1.4) et (1.9) – (1.10) munis des produits scalaires donnés par (1.6) et (1.12), respectivement.

D'autre part, pour le champ d'adhésion, nous définissons l'ensemble  $\mathcal{Z}$

$$\mathcal{Z} = \{ \alpha \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_3)) \mid 0 \leq \alpha(t) \leq 1 \quad \forall t \in [0, T], \text{ p.p. sur } \Gamma_3 \}.$$

Nous considérons maintenant les hypothèses suivantes : l'opérateur de viscosité  $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)| \leq L_{\mathcal{A}} |\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2| \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad (\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m_{\mathcal{A}} |\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2|^2 \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ est Lebesgue} \\ \quad \text{mesurable sur } \Omega, \text{ pour tout } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \text{ appartient à } \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (6.14)$$



L'opérateur d'élasticité  $\mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)| \leq L_{\mathcal{F}} |\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2| \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ est Lebesgue} \\ \quad \text{mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{0}, 0) \text{ appartient à } \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (6.15)$$

L'opérateur visco-plastique à mémoire longue  $\mathcal{G} : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mathcal{G}(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \mathbf{k}_1) - \mathcal{G}(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\tau}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \mathbf{k}_2)| \\ \leq L_{\mathcal{G}} (|\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2| + |\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2| + |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|) \\ \quad \forall \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in \mathbb{R}^d, \\ \quad \forall t \in [0, T], \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) Pour tout } \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d, \forall t \in [0, T] \text{ et } \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d, \\ \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{G}(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{k}) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega. \\ \text{(c) L'application } t \rightarrow \mathcal{G}(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{k}) \text{ est continue} \\ \quad \text{sur } [0, T], \forall \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d, \forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega, \\ \text{(d) Pour tout } t \in [0, T], \text{ L'application} \\ \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{G}(\mathbf{x}, t, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \text{ appartient à } \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (6.16)$$

La fonction constitutive  $\mathbf{S} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathbf{S}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mathbf{S}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \mathbf{k}_1) - \mathbf{S}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \mathbf{k}_2)| \\ \leq L_{\mathbf{S}} (|\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2| + |\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2| + |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|) \\ \quad \forall \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in \mathbb{R}^d \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) Pour tout } \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d \text{ et } \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d, \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{S}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{k}) \\ \quad \text{est Lebesgue mesurable sur } \Omega. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \text{ appartient à } H. \end{array} \right. \quad (6.17)$$

Les fonctions de compliance  $p_r : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  ( $r = \nu, \tau$ ) satisfont

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_r > 0 \text{ telle que} \\ \quad |p_r(\mathbf{x}, \alpha_1) - p_r(\mathbf{x}, \alpha_2)| \leq L_r |\alpha_1 - \alpha_2| \\ \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \rightarrow p_r(\mathbf{x}, \alpha) \text{ est Lebesgue} \\ \quad \text{mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) } p_r(\mathbf{x}, \alpha) = 0 \quad \forall \alpha \leq 0, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \rightarrow p_r(\mathbf{x}, 0) \text{ appartient à } L^2(\Gamma_3). \end{array} \right. \quad (6.18)$$

Le tenseur diélectrique  $\mathbf{B} = (b_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{E} = (b_{ij}(x)E_j) \\ \quad \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) } b_{ij} = b_{ji}, \quad b_{ij} \in L^\infty(\Omega). \\ \text{(c) Il existe } m_B > 0 \text{ telle que} \\ \quad \mathbf{B}\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \geq m_B |\mathbf{E}|^2 \\ \quad \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right. \quad (6.19)$$

Le tenseur piézoélectrique  $\mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{E}(\mathbf{x})\boldsymbol{\tau} = (e_{ijk}(\mathbf{x})\tau_{jk}) \\ \quad \forall \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) } e_{ijk} = e_{ikj} \in L^\infty(\Omega). \end{array} \right. \quad (6.20)$$

La fonction de conductivité électrique surfacique  $\psi : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_\psi > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\psi(\mathbf{x}, r_1) - \psi(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_\psi |r_1 - r_2| \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(b) Il existe } N_\psi > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\psi(\mathbf{x}, r)| \leq N_\psi \quad \forall r \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \rightarrow \psi(\mathbf{x}, r) \text{ est Lebesgue} \\ \quad \text{mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ \text{(d) } \psi(\mathbf{x}, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0. \end{array} \right. \quad (6.21)$$

Les forces volumiques  $\mathbf{f}_0$  et les tractions surfaciques  $\mathbf{f}_2$  ont la régularité

$$\mathbf{f}_0 \in C(0, T; H), \mathbf{f}_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_2)^d), \quad (6.22)$$

De même, la densité de charge volumique  $q_0$  et surfacique  $q_2$  satisfont

$$q_0 \in C(0, T; L^2(\Omega)), q_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_b)). \quad (6.23)$$

Les coefficients d'adhésion  $\gamma_\nu, \gamma_\tau$  et  $\varepsilon_a$  vérifient

$$\gamma_\nu, \gamma_\tau \in L^\infty(\Gamma_3), \varepsilon_a \in L^2(\Gamma_3), \gamma_\nu, \gamma_\tau, \varepsilon_a \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \quad (6.24)$$

Finalement, la fonction d'écart  $g$ , le potentiel donné de la fondation  $\varphi_0$ , le champ initial des déplacements  $\mathbf{u}_0$  et le champ de variable interne d'état  $\mathbf{k}_0$  vérifient les conditions

$$g \in L^2(\Gamma_3), g \geq 0 \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \varphi_0 \in L^2(\Gamma_3), \mathbf{u}_0 \in V, \mathbf{k}_0 \in H. \quad (6.25)$$

Et le champ initial d'adhésion satisfait

$$\alpha_0 \in L^2(\Gamma_3), 0 \leq \alpha_0 \leq 1 \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \quad (6.26)$$

Nous énonçons maintenant quelques définitions que nous allons utiliser dans la suite de ce chapitre.

Tout d'abord, nous définissons la fonction  $\mathbf{f} : [0, T] \rightarrow V$  par

$$(\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0(t) \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot \mathbf{v} da, \quad (6.27)$$

puis la fonction  $q : [0, T] \rightarrow W$  par

$$(q(t), \phi)_W = \int_{\Omega} q_0(t) \phi dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t) \phi da. \quad (6.28)$$

Les conditions (6.22) et (6.23) impliquent

$$\mathbf{f} \in C(0, T; V), q \in C(0, T; W). \quad (6.29)$$

Ensuite, nous définissons l'application  $\gamma : V \times W \rightarrow W$  par

$$(\gamma(\mathbf{u}, \varphi), \phi)_W = \int_{\Gamma_3} \psi(u_\nu - g) \phi_L(\varphi - \varphi_0) \phi da, \quad (6.30)$$

Enfin, nous définissons les fonctionnelles  $j_{ad} : L^\infty(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j_{nc} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  et  $j_{fr} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$j_{ad}(\alpha, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} (-\gamma_\nu \alpha^2 R_\nu(u_\nu) v_\nu + \gamma_\tau \alpha^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau) \cdot \mathbf{v}_\tau) da \quad (6.31)$$

$$j_{nc}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - g) v_\nu da \quad (6.32)$$

$$j_{fr}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu - g) |\mathbf{v}_\tau| da, \quad (6.33)$$

pour tout  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  et  $\alpha \in L^2(\Gamma_3)$ .

les conditions (6.18), (6.21) et (6.24) entraînant que les intégrales (6.30) – (6.33) sont bien définies.

La fonctionnelle  $j_{fr}$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } \mathbf{u} \in V, \mathbf{v} \rightarrow j_{fr}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \text{ est propre, convexe} \\ \text{et semicontinue-inférieurement sur } V. \end{array} \right. \quad (6.34)$$

## 6.2 Formulation variationnelle

Dans cette section, nous allons donner la formulation variationnelle du problème P3.

Nous supposons dans ce qui suit que  $\mathbf{u}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfaisant (6.1), (6.4) et (6.6) – (6.7). Soit  $\mathbf{v} \in V$ , nous utilisons la formule de Green (1.3) et l'équation de mouvement (6.4) pour obtenir

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) dx - \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) dx = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) da.$$

Nous divisons l'intégrale de surface  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$ . Puisque  $\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$  sur  $\Gamma_1$ ,  $\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2$  sur  $\Gamma_2$ , nous déduisons que

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}))_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) da.$$

De (6.27), nous obtenons

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}))_{\mathcal{H}} = (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}})_V + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) da. \quad (6.35)$$

Sur  $\Gamma_3$ , nous avons

$$\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) = \sigma_\nu (v - \dot{u})_\nu + \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}})_\tau,$$

nous utilisons la condition de contact (6.8) afin de voir que

$$\sigma_\nu (v - \dot{u})_\nu = -p_\nu (u_\nu - g) (v - \dot{u})_\nu + \gamma_\nu \alpha^2 R_\nu (u_\nu) (v - \dot{u})_\nu.$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}})_\tau &= (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \alpha^2 \mathbf{R}_\tau (\mathbf{u}_\tau) - \gamma_\tau \alpha^2 \mathbf{R}_\tau (\mathbf{u}_\tau)) \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}})_\tau \\ &= (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \alpha^2 \mathbf{R}_\tau (\mathbf{u}_\tau)) \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}})_\tau - \gamma_\tau \alpha^2 \mathbf{R}_\tau (\mathbf{u}_\tau) \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}})_\tau \\ &= (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \alpha^2 \mathbf{R}_\tau (\mathbf{u}_\tau)) \cdot \mathbf{v}_\tau - (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \alpha^2 \mathbf{R}_\tau (\mathbf{u}_\tau)) \cdot \dot{\mathbf{u}}_\tau \\ &\quad - \gamma_\tau \alpha^2 \mathbf{R}_\tau (\mathbf{u}_\tau) \cdot \mathbf{v}_\tau + \gamma_\tau \alpha^2 \mathbf{R}_\tau (\mathbf{u}_\tau) \cdot \dot{\mathbf{u}}_\tau. \end{aligned}$$

Encore une fois, de (6.8), nous avons

$$\begin{aligned} -(\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \alpha^2 \mathbf{R}_\tau (\mathbf{u}_\tau)) \cdot \dot{\mathbf{u}}_\tau &= |\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \alpha^2 \mathbf{R}_\tau (\mathbf{u}_\tau)| |\dot{\mathbf{u}}_\tau| \\ &= p_\tau (u_\nu - g) |\dot{\mathbf{u}}_\tau|, \end{aligned}$$

et comme

$$(\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \alpha^2 \mathbf{R}_\tau (\mathbf{u}_\tau)) \cdot \mathbf{v}_\tau \geq -|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \alpha^2 \mathbf{R}_\tau (\mathbf{u}_\tau)| |\mathbf{v}_\tau|,$$

donc, en utilisant (6.8) afin d'écrire

$$(\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \alpha^2 \mathbf{R}_\tau (\mathbf{u}_\tau)) \cdot \mathbf{v}_\tau \geq -p_\tau (u_\nu - g) |\mathbf{v}_\tau|.$$

Alors que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}})_\tau &\geq -p_\tau (u_\nu - g) |\mathbf{v}_\tau| + p_\tau (u_\nu - g) |\dot{\mathbf{u}}_\tau| \\ &\quad - \gamma_\tau \alpha^2 \mathbf{R}_\tau (\mathbf{u}_\tau) \cdot \mathbf{v}_\tau + \gamma_\tau \alpha^2 \mathbf{R}_\tau (\mathbf{u}_\tau) \cdot \dot{\mathbf{u}}_\tau. \end{aligned}$$

De ce qui précède, nous avons

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_\nu \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) &\geq -p_\nu (u_\nu - g) (v - \dot{u})_\nu + \gamma_\nu \alpha^2 R_\nu (u_\nu) (v - \dot{u})_\nu \\ &\quad - p_\tau (u_\nu - g) |\mathbf{v}_\tau| + p_\tau (u_\nu - g) |\dot{\mathbf{u}}_\tau| \\ &\quad - \gamma_\tau \alpha^2 \mathbf{R}_\tau (\mathbf{u}_\tau) \cdot \mathbf{v}_\tau + \gamma_\tau \alpha^2 \mathbf{R}_\tau (\mathbf{u}_\tau) \cdot \dot{\mathbf{u}}_\tau. \end{aligned}$$

De cette inégalité, (6.35) et (6.31) – (6.33) les définitions de  $j_{ad}$ ,  $j_{nc}$  et  $j_{fr}$ , nous constatons que

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\alpha, \mathbf{u}, \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) + j_{nc}(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) \tag{6.36}$$

$$+j_{fr}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}})_V$$

En outre, Soient  $\varphi$  et  $\mathbf{D}$  des fonctions suffisamment régulières qui satisfaisant (6.2), (6.5) et (6.9) – (6.11). Soit  $\phi \in W$ , nous employons la formule de Green (1.15) et l'équation d'équilibre (6.5). Par la même manière et des arguments que nous avons utilisés afin d'obtenir (5.35), nous voyons que

$$(\mathbf{D}, \nabla \phi)_H = -(q, \phi)_W + (\gamma(\mathbf{u}, \varphi), \phi)_W, \quad (6.37)$$

De (6.1) – (6.3), (6.36) – (6.37), (6.12) – (6.13) et la dernière équation dans (6.8), nous obtenons la formulation variationnelle suivante du problème P3.

**Problème PV3.** *Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$ , le champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma} : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ , le champ de potentiel électrique  $\varphi : [0, T] \rightarrow W$ , le champ des déplacements électriques  $\mathbf{D} : [0, T] \rightarrow \mathcal{W}$ , le champ de variable interne d'état  $\mathbf{k} : [0, T] \rightarrow H$  et le champ d'adhésion  $\alpha : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$  tels que, pour tout  $t \in [0, T]$*

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \mathcal{E}^*\nabla\varphi(t) \quad (6.38)$$

$$+ \int_0^t \mathcal{G}(t-s, \boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(s)) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \mathbf{k}(s)) ds,$$

$$\dot{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}(t) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \mathbf{k}(t)), \quad (6.39)$$

$$(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\alpha(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)) + j_{nc}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)) \quad (6.40)$$

$$+ j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

$$\mathbf{D}(t) = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) - \mathbf{B}\nabla\varphi(t), \quad (6.41)$$

$$(\mathbf{D}(t), \nabla\phi)_H = -(q(t), \phi)_W + (\gamma(\mathbf{u}(t), \varphi(t)), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, \quad (6.42)$$

$$\dot{\alpha}(t) = -(\alpha(t) [\gamma_\nu (R_\nu(u_\nu(t)))^2 + \gamma_\tau |\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau(t))|^2] - \varepsilon_a)_+ \quad \text{p.p } t \in (0, T), \quad (6.43)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{k}(0) = \mathbf{k}_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (6.44)$$

$$\alpha(0) = \alpha_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (6.45)$$

L'élément  $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \mathbf{D}, \mathbf{k}, \alpha\}$  qui satisfait (6.38) – (6.45) est appelé solution faible du Problème de contact P3.

La solvabilité de ce système fera l'objet de la section suivante.

### 6.3 Existence et unicité de la solution

Cette section est destinée à présenter un résultat sur l'existence et l'unicité du Problème PV3 suivant.

**Théorème 6.1.** *Supposons que les hypothèses (6.14) – (6.26) et (6.34) sont satisfaites. Alors, si  $N_\psi < \frac{m_B}{\tilde{c}_0^2}$ , le problème PV3 admet une solution unique  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \mathbf{D}, \mathbf{k}, \alpha)$  ayant la régularité*

$$\mathbf{u} \in C^1(0, T; V), \quad (6.46)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \in C(0, T; \mathcal{H}_1), \quad (6.47)$$

$$\varphi \in C(0, T; W), \quad (6.48)$$

$$\mathbf{D} \in C(0, T; \mathcal{W}), \quad (6.49)$$

$$\alpha \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z}, \quad (6.50)$$

$$\mathbf{k} \in C^1(0, T; H). \quad (6.51)$$

Ici,  $\tilde{c}_0$  est la constante définie dans (1.14).

Nous concluons de ce qui précède que le Problème P3 admet une solution faible unique  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \varphi, \mathbf{D}, \mathbf{k}, \alpha)$ , à condition que les hypothèses du Théorème 6.1 sont satisfaites.

La démonstration du Théorème 6.1 sera faite en plusieurs étapes, elle est basée sur les résultats des inéquations variationnelles, les opérateurs monotones et les arguments du point fixe. Nous supposons dans ce qui suit que les hypothèses (6.14) – (6.26) sont vérifiées,  $c$  désigne une constante positive qui dépend de  $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, \mathbf{S}, \mathbf{B}, \psi, p_\tau, \gamma_\nu, \gamma_\tau, L$  et  $T$  dont la valeur peut changer d'un endroit à un autre.

Dans la première étape, nous supposons que les fonctions  $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\eta}^1, \boldsymbol{\eta}^2) \in C(0, T; V \times H)$  et  $\mathbf{g} \in C(0, T; V)$  sont données et nous proposons le problème intermédiaire suivant.

**Problème PV3 <sub>$\eta\mathbf{g}$</sub> .** *Trouver le champ des vitesses  $\mathbf{v}_{\eta\mathbf{g}} : [0, T] \rightarrow V$  tel que, pour tout  $t \in [0, T]$ ,*

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_{\eta\mathbf{g}}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\eta\mathbf{g}}(t)))_{\mathcal{H}} + j_{fr}(\mathbf{g}(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{g}(t), \mathbf{v}_{\eta\mathbf{g}}(t)) \quad (6.52)$$

$$\geq (\mathbf{f}(t) - \boldsymbol{\eta}^1(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\eta\mathbf{g}}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

**Lemme 6.2.** *Le problème PV3 <sub>$\eta\mathbf{g}$</sub>  admet une solution unique tel que  $\mathbf{v}_{\eta\mathbf{g}} \in C(0, T; V)$ .*

**Preuve.** Nous définissons l'opérateur  $A : V \rightarrow V$  tel que

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \quad (6.53)$$

En utilisant (1.2), l'hypothèse (6.14) et (1.7), pour tout  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  et  $\forall \mathbf{w} \in V$ , nous avons

$$(A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{w})_V \leq L_{\mathcal{A}} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|_V |\mathbf{w}|_V,$$

donc

$$|A\mathbf{u} - A\mathbf{v}|_V \leq L_{\mathcal{A}} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|_V,$$

de même, en utilisant (1.2), (1.7), (6.53) et (6.14) nous voyons que

$$(A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_V \geq m_{\mathcal{A}} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|_V^2,$$

c'est à dire que  $A$  est un opérateur lipschitzien et fortement monotone sur  $V$ .

Nous utilisons le théorème de représentation de Riesz pour définir un élément  $\mathbf{F} \in C(0, T; V)$  par

$$(\mathbf{F}(t), \mathbf{v})_V = (\mathbf{f}(t) - \boldsymbol{\eta}^1(t), \mathbf{v})_V. \quad (6.54)$$

Puisque l'opérateur  $A$  est de Lipschitz et fortement monotone sur  $V$ , nous concluons d'après un résultat standard sur les inéquations variationnelles elliptiques de deuxième espèce (Théorème 2.15) qu'il existe une fonction unique  $\mathbf{v}_{\eta g}(t) \in V$  qui satisfait

$$\begin{aligned} (A\mathbf{v}_{\eta g}(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\eta g}(t))_V + j_{fr}(\mathbf{g}(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{g}(t), \mathbf{v}_{\eta g}(t)) \\ \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\eta g}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (6.55)$$

En combinant (6.53) – (6.55), nous déduisons que  $\mathbf{v}_{\eta g}$  est une solution unique de  $\text{PV3}_{\eta g}$ .

Dans la suite, nous montrons que

$$\mathbf{v}_{\eta g} \in C(0, T; V).$$

Soit  $t_1, t_2 \in [0, T]$  et pour simplifier les notations nous posons  $\mathbf{v}_{\eta g}(t_i) = \mathbf{v}_i$ ,  $\mathbf{g}(t_i) = \mathbf{g}_i$ ,  $\boldsymbol{\eta}^1(t_i) = \boldsymbol{\eta}_i^1$  et  $\mathbf{f}(t_i) = \mathbf{f}_i$  pour  $i = 1, 2$ .

En appliquant (6.54) – (6.55) pour  $t = t_1$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2$ , nous obtenons

$$(A\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_V \leq j_{fr}(\mathbf{g}_1, \mathbf{v}_2) - j_{fr}(\mathbf{g}_1, \mathbf{v}_1) + (\mathbf{f}_1 - \boldsymbol{\eta}_1^1, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_V,$$



et, pour  $t = t_2$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ , nous avons

$$(-A\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_V \leq j_{fr}(\mathbf{g}_2, \mathbf{v}_1) - j_{fr}(\mathbf{g}_2, \mathbf{v}_2) + (-\mathbf{f}_2 + \boldsymbol{\eta}_2^1, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_V,$$

Nous additionnons les deux inégalités précédentes, nous trouvons

$$\begin{aligned} & (A\mathbf{v}_1 - A\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_V \\ & \leq j_{fr}(\mathbf{g}_1, \mathbf{v}_2) - j_{fr}(\mathbf{g}_1, \mathbf{v}_1) + j_{fr}(\mathbf{g}_2, \mathbf{v}_1) - j_{fr}(\mathbf{g}_2, \mathbf{v}_2) \\ & \quad + (\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_V + (\boldsymbol{\eta}_2^1 - \boldsymbol{\eta}_1^1, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_V. \end{aligned} \tag{6.56}$$

En utilisant (6.53), (1.2), (6.14), (6.56) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir

$$\begin{aligned} & m_{\mathcal{A}} |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V^2 \\ & \leq |j_{fr}(\mathbf{g}_1, \mathbf{v}_1) - j_{fr}(\mathbf{g}_1, \mathbf{v}_2) + j_{fr}(\mathbf{g}_2, \mathbf{v}_2) - j_{fr}(\mathbf{g}_2, \mathbf{v}_1)| \\ & \quad + (|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2|_V + |\boldsymbol{\eta}_1^1 - \boldsymbol{\eta}_2^1|_V) |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V. \end{aligned} \tag{6.57}$$

De (6.33) et l'inégalité  $\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ , nous avons

$$\begin{aligned} & |j_{fr}(\mathbf{g}_1, \mathbf{v}_1) - j_{fr}(\mathbf{g}_1, \mathbf{v}_2) + j_{fr}(\mathbf{g}_2, \mathbf{v}_2) - j_{fr}(\mathbf{g}_2, \mathbf{v}_1)| \\ & \leq \left| \int_{\Gamma_3} p_\tau(g_{1\nu} - g) |\mathbf{v}_{1\tau}| da - \int_{\Gamma_3} p_\tau(g_{1\nu} - g) |\mathbf{v}_{2\tau}| da \right. \\ & \quad \left. + \int_{\Gamma_3} p_\tau(g_{2\nu} - g) |\mathbf{v}_{2\tau}| da - \int_{\Gamma_3} p_\tau(g_{2\nu} - g) |\mathbf{v}_{1\tau}| da \right| \\ & \leq \int_{\Gamma_3} |p_\tau(g_{1\nu} - g) - p_\tau(g_{2\nu} - g)| |\mathbf{v}_{1\tau} - \mathbf{v}_{2\tau}| da \end{aligned}$$

De l'hypothèse (6.18),  $|u_r| \leq |\mathbf{u}|$  ( $r = \nu, \tau$ ), l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (1.8), nous avons

$$|j_{fr}(\mathbf{g}_1, \mathbf{v}_1) - j_{fr}(\mathbf{g}_1, \mathbf{v}_2) + j_{fr}(\mathbf{g}_2, \mathbf{v}_2) - j_{fr}(\mathbf{g}_2, \mathbf{v}_1)| \leq L_\tau c_0^2 |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|_V |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V. \tag{6.58}$$

En combinant l'inégalité précédente avec (6.57), nous trouvons

$$\begin{aligned} & m_{\mathcal{A}} |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V \\ & \leq L_\tau c_0^2 |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|_V + |\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2|_V + |\boldsymbol{\eta}_1^1 - \boldsymbol{\eta}_2^1|_V, \end{aligned} \tag{6.59}$$

d'après la régularité de  $(\mathbf{g}, \mathbf{f}, \boldsymbol{\eta}^1)$ , nous pouvons écrire

$$\mathbf{v}_{\eta g} \in C(0, T; V).$$

Ce qui termine la preuve du Lemme 6.2. □

Nous définissons maintenant l'opérateur  $A_\eta : C(0, T; V) \rightarrow C(0, T; V)$  par

$$A_\eta \mathbf{g}(t) = \mathbf{u}_0 + \int_0^t \mathbf{v}_{\eta g}(s) ds \quad \forall \mathbf{g} \in C(0, T; V), \quad (6.60)$$

Nous avons sur l'opérateur  $A_\eta$  le résultat suivant.

**Lemme 6.3.** *l'opérateur  $A_\eta$  admet un point fixe unique  $\mathbf{g}_\eta \in C(0, T; V)$ .*

**Preuve.** Soient  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in C(0, T; V)$  et  $\boldsymbol{\eta} \in C(0, T; V \times H)$ . Nous utilisons les notations  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{\eta g_i}$  et  $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{\eta g_i}$  pour  $i = 1, 2$ . En utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans la démonstration de (6.59), nous trouvons

$$|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V \leq \frac{L_\tau c_0^2}{m_A} |\mathbf{g}_1(s) - \mathbf{g}_2(s)|_V \quad \forall s \in [0, T].$$

Nous intégrons l'inégalité précédente par rapport à  $t$ , et employons (6.60) nous obtenons

$$|A_\eta \mathbf{g}_1(t) - A_\eta \mathbf{g}_2(t)|_V \leq c \int_0^t |\mathbf{g}_1(s) - \mathbf{g}_2(s)|_V ds \quad \forall t \in [0, T],$$

En réitérant  $m$  fois l'inégalité précédente, nous obtenons

$$|A_\eta^m \mathbf{g}_1 - A_\eta^m \mathbf{g}_2|_{0,V} \leq \frac{(cT)^m}{m!} |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|_{0,V}$$

Nous déduisons que pour  $m$  suffisamment grand, l'opérateur  $A_\eta^m$  est un contractant sur l'espace de Banach  $C(0, T; V)$ , donc,  $A_\eta^m$  possède un point fixe unique  $\mathbf{g}_\eta \in C(0, T; V)$  et par conséquent  $\mathbf{g}_\eta$  est le point fixe unique de  $A_\eta$ . □

Maintenant nous considérons le problème variationnel suivant.

**Problem PV3 $_\eta$ .** *Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u}_\eta : [0, T] \rightarrow V$  tel que pour tout  $t \in [0, T]$ ,*

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_\eta(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\eta(t)))_{\mathcal{H}} + j_{fr}(\mathbf{u}_\eta(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}_\eta(t), \dot{\mathbf{u}}_\eta(t)) \quad (6.61)$$

$$+(\boldsymbol{\eta}^1(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\eta(t))_V \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\eta(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

$$\mathbf{u}_\eta(0) = \mathbf{u}_0. \quad (6.62)$$

Pour le problem PV3 $_\eta$  nous avons le résultat suivant.

**Lemme 6.4.** *Le problème  $PV\mathfrak{Z}_\eta$  admet une solution unique  $\mathbf{u}_\eta$  qui satisfait la régularité (6.46).*

**Preuve.** Soit  $\boldsymbol{\eta} \in C(0, T; V \times H)$ , nous notons par  $\mathbf{g}_\eta \in C(0, T; V)$  le point fixe garantié par le Lemme 6.3 et soient  $\mathbf{u}_\eta$  et  $\mathbf{v}_\eta$  les fonctions définies par

$$\mathbf{u}_\eta(t) = \mathbf{u}_0 + \int_0^t \mathbf{v}_{\eta \mathbf{g}_\eta}(s) ds \quad \forall t \in [0, T], \quad (6.63)$$

et

$$\mathbf{v}_\eta = \mathbf{v}_{\eta \mathbf{g}_\eta}. \quad (6.64)$$

Comme  $\mathbf{g}_\eta$  est le point fixe de  $A_\eta$ , alors que

$$A_\eta \mathbf{g}_\eta = \mathbf{g}_\eta, \quad (6.65)$$

nous combinons (6.60) avec (6.63) – (6.65), nous obtenons

$$\mathbf{g}_\eta = \mathbf{u}_\eta \text{ et } \dot{\mathbf{u}}_\eta = \mathbf{v}_\eta. \quad (6.66)$$

Pour  $\mathbf{g} = \mathbf{g}_\eta$ , nous combinons (6.53) – (6.55) et (6.66), nous trouvons que  $\mathbf{u}_\eta$  est une solution unique de  $PV\mathfrak{Z}_\eta$ , en plus, de la régularité de  $\mathbf{v}_\eta$ , nous déduisons que  $\mathbf{u}_\eta \in C^1(0, T; V)$ .

□

Dans la deuxième étape, nous considérons  $\boldsymbol{\eta} \in C(0, T; V \times H)$ , nous utilisons le champ des déplacements  $\mathbf{u}_\eta$  la solution unique de  $PV\mathfrak{Z}_\eta$ .

Nous considérons le problème variationnel suivant.

**Problème  $QV\mathfrak{Z}_\eta$ .** *Trouver le champ de potentiel électrique  $\varphi_\eta : [0, T] \rightarrow W$  tel que pour tout  $t \in [0, T]$*

$$\begin{aligned} & (\mathbf{B}\nabla\varphi_\eta(t), \nabla\phi)_H - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta(t)), \nabla\phi)_H + (\gamma(\mathbf{u}_\eta(t), \varphi_\eta(t)), \phi)_W \\ & = (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, \end{aligned} \quad (6.67)$$

Nous avons le résultat suivant.

**Lemme 6.5.**  *$QV\mathfrak{Z}_\eta$  a une solution unique  $\varphi_\eta$  qui satisfait la régularité (6.48). En plus, si  $\varphi_{\boldsymbol{\eta}_1}$  et  $\varphi_{\boldsymbol{\eta}_2}$  vérifient (6.67) correspondant à  $\boldsymbol{\eta}_1$  et  $\boldsymbol{\eta}_2 \in C(0, T; V \times H)$ , respectivement, il existe  $c > 0$  telle que*

$$|\varphi_{\boldsymbol{\eta}_1}(t) - \varphi_{\boldsymbol{\eta}_2}(t)|_W \leq c |\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}_1}(t) - \mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}_2}(t)|_V \quad \forall t \in [0, T]. \quad (6.68)$$

**Preuve.** Nous utilisons la même manière et des arguments que nous avons utilisés dans la preuve du Lemme 5.6 du chapitre 5.  $\square$

Dans la troisième étape, nous utilisons le champ des déplacements  $\mathbf{u}_\eta$  obtenu dans le Lemme 6.4 et nous considérons le problème variationnel suivant.

**Problème PV3 $_\alpha$ .** Trouver le champ d'adhésion  $\alpha_\eta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$  tel que

$$\dot{\alpha}_\eta(t) = -(\alpha_\eta(t) [\gamma_\nu (R_\nu(u_{\eta\nu}))^2 + \gamma_\tau |\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{\eta\tau})|^2] - \varepsilon_a)_+, \quad p.p. t \in (0, T), \quad (6.69)$$

$$\alpha_\eta(0) = \alpha_0. \quad (6.70)$$

Pour le problème PV3 $_\alpha$ , nous avons le résultat suivant.

**Lemme 6.6.** Le problème PV3 $_\alpha$  admet une solution unique  $\alpha_\eta$  qui satisfait

$$\alpha_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z}. \quad (6.71)$$

**Preuve.** Nous considérons l'application  $F_\eta : [0, T] \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow L^2(\Gamma_3)$  définie par

$$F_\eta(t, \alpha) = -(\alpha [\gamma_\nu (R_\nu(u_{\eta\nu}(t)))^2 + \gamma_\tau |\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{\eta\tau}(t))|^2] - \varepsilon_a)_+, \quad \forall t \in [0, T], \quad \alpha \in L^2(\Gamma_3).$$

Nous avons d'après (6.24) et les propriétés de les opérateurs  $R_\nu$  et  $\mathbf{R}_\tau$  qui sont définis par (3.11) et (3.13), respectivement.  $F_\eta$  est de Lipschitz par rapport à  $\alpha$ , uniformément dans le temps. Cependant, pour tout  $\alpha \in L^2(\Gamma_3)$ , l'application  $t \rightarrow F_\eta(t, \alpha)$  appartient à  $L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_3))$ . Donc, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (Théorème 2.16), il existe  $\alpha_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3))$  solution unique du problème PV3 $_\alpha$ . En utilisant des arguments similaires à la Remarque 3.1 et (6.26), il vient que  $0 \leq \alpha_\eta \leq 1 \quad \forall t \in [0, T]$  p.p. sur  $\Gamma_3$  et d'où  $\alpha_\eta \in \mathcal{Z}$ , ce qui conclut la preuve du Lemme 6.6.  $\square$

Maintenant, pour  $t \in [0, T]$ , nous considérons la fonction  $\mathbf{k}_\eta \in C^1(0, T; H)$  définie par

$$\mathbf{k}_\eta(t) = \mathbf{k}_0 + \int_0^t \boldsymbol{\eta}^2(s) ds. \quad (6.72)$$

Dans la quatrième étape, pour tout  $\boldsymbol{\eta} \in C(0, T; V \times H)$ ; nous utilisons  $\mathbf{u}_\eta, \varphi_\eta$  le champ des déplacements, le champ de potentiel électrique obtenus dans les Lemmes 6.4, 6.5 et  $\mathbf{k}_\eta$  la fonction définie dans (6.72). Nous construisons le problème de Cauchy pour le champ des contraintes suivant.

**Problème PV3 $_{\sigma_\eta}$ .** Trouver le champ des contraintes  $\sigma_\eta : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$  tel que

$$\sigma_\eta(t) = \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(t-s, \sigma_\eta(s), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(s)), \mathbf{k}_\eta(s)) ds. \quad (6.73)$$

Pour le problème PV3 $_{\sigma_\eta}$ , nous avons le résultat suivant.

**Lemme 6.7.** *Le problème PV3 $_{\sigma_\eta}$  admet une solution unique  $\sigma_\eta$  qui satisfait  $\sigma_\eta \in C^1(0, T; \mathcal{H})$ . En plus, si  $\mathbf{u}_i$  et  $\sigma_i$  représentent les solutions de PV3 $_{\eta_i}$  et PV3 $_{\sigma_\eta}$ , respectivement, avec  $\mathbf{k}_i$  qui est définie dans (6.72) correspondant à  $\eta_i \in C(0, T; V \times H)$ ,  $i = 1, 2$ , alors qu'il existe  $c > 0$  telle que pour tout  $t \in [0, T]$*

$$\begin{aligned} & |\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{H}}^2 \\ & \leq c \left( |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)|_H^2 ds \right). \end{aligned} \quad (6.74)$$

**Preuve.** Soit l'opérateur  $\Lambda_\eta : C(0, T; \mathcal{H}) \rightarrow C(0, T; \mathcal{H})$  défini par

$$\Lambda_\eta \sigma(t) = \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(t-s, \sigma(s), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(s)), \mathbf{k}_\eta(s)) ds. \quad (6.75)$$

Pour tout  $\sigma_1, \sigma_2 \in C(0, T; \mathcal{H})$ , nous utilisons (6.75) et (6.16) afin de voir que pour tout  $t \in [0, T]$

$$|\Lambda_\eta \sigma_1(t) - \Lambda_\eta \sigma_2(t)|_{\mathcal{H}} \leq L_G \int_0^t |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{H}} ds.$$

En réitérant  $m$  fois l'inégalité précédente, nous obtenons

$$|\Lambda_\eta^m \sigma_1 - \Lambda_\eta^m \sigma_2|_{0, \mathcal{H}}^2 \leq \frac{(L_G T)^m}{m!} |\sigma_1 - \sigma_2|_{0, \mathcal{H}}^2,$$

nous déduisons que si  $m$  suffisamment grand, l'opérateur  $\Lambda_\eta^m$  est un contractant sur l'espace de Banach  $C(0, T; \mathcal{H})$ , donc,  $\Lambda_\eta^m$  possède un point fixe unique  $\sigma_\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$  et par conséquent  $\sigma_\eta$  est le point fixe unique de  $\Lambda_\eta$ .

En outre, puisque  $\sigma_\eta$  est le point fixe unique de  $\Lambda_\eta$ , donc

$$\Lambda_\eta \sigma_\eta = \sigma_\eta.$$

Nous combinons (6.75) et l'égalité précédente pour constater que  $\sigma_\eta$  est une solution unique de PV3 $_{\sigma_\eta}$ .

Maintenant, en utilisant (6.73), (6.15)–(6.16) et la régularité de  $\mathbf{u}_\eta$ ,  $\sigma_\eta$  et  $\mathbf{k}_\eta$ , il s'ensuit que

$$\sigma_\eta \in C^1(0, T; \mathcal{H}).$$

Soient  $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in C(0, T; V \times H)$  et pour  $i = 1, 2$ , nous adoptons les notations  $\mathbf{u}_{\eta_i} = \mathbf{u}_i$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_{\eta_i} = \boldsymbol{\sigma}_i$  et  $\mathbf{k}_{\eta_i} = \mathbf{k}_i$ . En utilisant (6.73), nous avons

$$\boldsymbol{\sigma}_i(t) = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_i(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(t-s, \boldsymbol{\sigma}_i(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_i(s)), \mathbf{k}_i(s)) ds,$$

d'après (6.15) et (6.16), nous voyons que

$$\begin{aligned} & |\boldsymbol{\sigma}_1(t) - \boldsymbol{\sigma}_2(t)|_{\mathcal{H}}^2 \\ & \leq c \left( |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\boldsymbol{\sigma}_1(s) - \boldsymbol{\sigma}_2(s)|_{\mathcal{H}}^2 ds \right. \\ & \quad \left. + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)|_H^2 ds \right). \end{aligned}$$

En appliquant le Lemme 2.19 de Granwall, pour voir que

$$\begin{aligned} & |\boldsymbol{\sigma}_1(t) - \boldsymbol{\sigma}_2(t)|_{\mathcal{H}}^2 \tag{6.76} \\ & \leq c \left( |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)|_H^2 ds \right). \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve du Lemme 6.7.  $\square$

Maintenant, pour tout  $t \in [0, T]$ , nous considérons l'opérateur

$$\Lambda : C(0, T; V \times H) \rightarrow C(0, T; V \times H),$$

défini pour chaque  $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\eta}^1, \boldsymbol{\eta}^2) \in C(0, T; V \times H)$  par

$$\Lambda\boldsymbol{\eta}(t) = (\Lambda_1\boldsymbol{\eta}(t), \Lambda_2\boldsymbol{\eta}(t)) \in V \times H, \tag{6.77}$$

avec

$$(\Lambda_1\boldsymbol{\eta}(t), \mathbf{v})_V = (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_{\boldsymbol{\eta}}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \tag{6.78}$$

$$+ \left( \int_0^t \mathcal{G}(t-s, \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\eta}}(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}}(s)), \mathbf{k}_{\boldsymbol{\eta}}(s)) ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \right)_{\mathcal{H}}$$

$$+ j_{ad}(\alpha_{\boldsymbol{\eta}}(t), \mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}}(t), \mathbf{v}) + j_{nc}(\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}}(t), \mathbf{v}),$$

$$\Lambda_2\boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\eta}}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}}(t)), \mathbf{k}_{\boldsymbol{\eta}}(t)). \tag{6.79}$$

Ici, pour tout  $\boldsymbol{\eta} \in C(0, T; V \times H)$ ;  $\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}}$ ,  $\varphi_{\boldsymbol{\eta}}$ ,  $\alpha_{\boldsymbol{\eta}}$  et  $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\eta}}$  représentent le champ des déplacements, le champ de potentiel électrique, le champ d'adhésion et le champ des contraintes obtenus

dans les Lemmes 6.4, 6.5, 6.6 et 6.7 respectivement, et  $\mathbf{k}_\eta$  est la variable interne d'état définie par (6.72). Nous avons le résultat suivant.

**Lemme 6.8.** *l'opérateur  $\Lambda$  admet un point fixe unique  $\boldsymbol{\eta}_* = (\boldsymbol{\eta}_*^1, \boldsymbol{\eta}_*^2) \in C(0, T; V \times H)$ .*

**Preuve.** Soient  $\boldsymbol{\eta}_1$  et  $\boldsymbol{\eta}_2 \in C(0, T; V \times H)$ . Nous utilisons les notations  $\mathbf{u}_{\eta_i} = \mathbf{u}_i$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_{\eta_i} = \mathbf{v}_{\eta_i} = \mathbf{v}_i$ ,  $\varphi_{\eta_i} = \varphi_i$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_{\eta_i} = \boldsymbol{\sigma}_i$ ,  $\alpha_{\eta_i} = \alpha_i$  et  $\mathbf{k}_{\eta_i} = \mathbf{k}_i$  pour  $i = 1, 2$ . En employant (6.78), les hypothèses (6.15) – (6.16), (6.20), les définitions (6.31) – (6.32), (1.2), (1.7), (1.12), (3.11) et (3.13) avec l'estimation (6.76), afin de voir que pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} & |\Lambda_1 \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda_1 \boldsymbol{\eta}_2(t)|_V^2 \\ & \leq c \left( |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds \right. \\ & \quad \left. + |\alpha_1(t) - \alpha_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W^2 + \int_0^t |\mathbf{k}_i(s) - \mathbf{k}_i(s)|_H^2 ds \right). \end{aligned} \quad (6.80)$$

En outre part, nous intégrons (6.69) avec la condition initiale (6.70) pour voir que

$$\alpha_i(t) = \alpha_0 - \int_0^t (\alpha_i(s) [\gamma_\nu (R_\nu(u_{i\nu}))^2 + \gamma_\tau |\mathbf{R}_\tau(u_{i\tau})|^2] - \varepsilon_a)_+ ds$$

et d'où

$$\begin{aligned} |\alpha_1(t) - \alpha_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} & \leq c \left( \int_0^t |\alpha_1(s) (R_\nu(u_{1\nu}))^2 - \alpha_2(s) (R_\nu(u_{2\nu}))^2|_{L^2(\Gamma_3)} ds \right. \\ & \quad \left. + \int_0^t |\alpha_1(s) |\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{1\tau}(s))|^2 - \alpha_2(s) |\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{2\tau}(s))|^2|_{L^2(\Gamma_3)} ds \right). \end{aligned}$$

En utilisant (3.11) et (3.13) les définitions de  $R_\nu$  et  $\mathbf{R}_\tau$  avec l'écriture  $\alpha_1 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_2$  et l'inégalité  $|u_r| \leq |\mathbf{u}|$  ( $r = \nu, \tau$ )  $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$  pour constater que

$$\begin{aligned} & |\alpha_1(t) - \alpha_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} \\ & \leq c \int_0^t |\alpha_1(s) - \alpha_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)} ds + c \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds. \end{aligned}$$

En combinant cette inégalité avec le Lemme 2.19 de Gronwall, nous pouvons écrire

$$|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds,$$

et d'après (1.8), nous avons

$$|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq c \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds. \quad (6.81)$$

De (6.68), nous avons

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W^2 \leq c |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2,$$

Nous combinons (6.80) – (6.81) et la dernière estimation afin de voir que

$$\begin{aligned} & |\Lambda_1 \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda_1 \boldsymbol{\eta}_2(t)|_V^2 \\ & \leq c \left( |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)|_H^2 ds \right). \end{aligned} \quad (6.82)$$

Maintenant, nous utilisons l'hypothèse (6.17) avec (1.7), la définition (6.79) et l'estimation (6.76), nous voyons que

$$\begin{aligned} & |\Lambda_2 \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda_2 \boldsymbol{\eta}_2(t)|_H^2 \\ & \leq c \left( |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds \right. \\ & \quad \left. + |\mathbf{k}_1(t) - \mathbf{k}_2(t)|_H^2 + \int_0^t |\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)|_H^2 ds \right). \end{aligned} \quad (6.83)$$

Et comme

$$|\Lambda \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda \boldsymbol{\eta}_2(t)|_{V \times H}^2 = |\Lambda_1 \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda_1 \boldsymbol{\eta}_2(t)|_V^2 + |\Lambda_2 \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda_2 \boldsymbol{\eta}_2(t)|_H^2.$$

Alors que, de (6.82) et (6.83), nous avons

$$\begin{aligned} & |\Lambda \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda \boldsymbol{\eta}_2(t)|_{V \times H}^2 \\ & \leq c \left( |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds \right. \\ & \quad \left. + |\mathbf{k}_1(t) - \mathbf{k}_2(t)|_H^2 + \int_0^t |\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)|_H^2 ds \right). \end{aligned} \quad (6.84)$$

En outre, nous employons (6.61) pour  $\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\eta}_1(t)$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2(t)$  afin d'écrire

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)))_{\mathcal{H}} \\ & \leq j_{fr}(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{v}_2(t)) - j_{fr}(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{v}_1(t)) - (\boldsymbol{\eta}_1^1(t), \mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t))_V + (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t))_V, \end{aligned}$$

aussi, pour  $\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\eta}_2(t)$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1(t)$  nous voyons que

$$\begin{aligned} & (-\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)))_{\mathcal{H}} \\ & \leq j_{fr}(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{v}_1(t)) - j_{fr}(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{v}_2(t)) + (\boldsymbol{\eta}_2^1(t), \mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t))_V - (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t))_V, \end{aligned}$$



nous additionnons les deux inégalités précédentes afin de voir que

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t)) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)))_{\mathcal{H}} \\ & \leq j_{fr}(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{v}_2(t)) - j_{fr}(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{v}_1(t)) + j_{fr}(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{v}_1(t)) - j_{fr}(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{v}_2(t)) \\ & \quad + (\boldsymbol{\eta}_2^1(t) - \boldsymbol{\eta}_1^1(t), \mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t))_V, \end{aligned}$$

De (1.2), (1.7), (6.14) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\begin{aligned} & m_{\mathcal{A}} |\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)|_V^2 \tag{6.85} \\ & \leq |\boldsymbol{\eta}_1^1(t) - \boldsymbol{\eta}_2^1(t)|_V |\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)|_V \\ & |j_{fr}(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{v}_2(t)) - j_{fr}(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{v}_1(t)) + j_{fr}(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{v}_1(t)) - j_{fr}(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{v}_2(t))| \end{aligned}$$

Maintenant, nous utilisons des arguments similaires à ceux utilisés dans la démonstration de (6.58) pour voir que

$$\begin{aligned} & |j_{fr}(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{v}_2(t)) - j_{fr}(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{v}_1(t)) + j_{fr}(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{v}_1(t)) - j_{fr}(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{v}_2(t))| \tag{6.86} \\ & \leq L_{\tau} c_0^2 |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V |\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)|_V. \end{aligned}$$

Nous combinons (6.85) et (6.86), nous obtenons

$$\begin{aligned} & |\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)|_V \tag{6.87} \\ & \leq c (|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V + |\boldsymbol{\eta}_1^1(t) - \boldsymbol{\eta}_2^1(t)|_V). \end{aligned}$$

Nous mettons cette inégalité au carré et intégrons par rapport au temps, nous avons

$$\int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds \leq c \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds + c \int_0^t |\boldsymbol{\eta}_1^1(s) - \boldsymbol{\eta}_2^1(s)|_V^2 ds. \tag{6.88}$$

Nous savons que

$$\mathbf{u}_i(t) = \mathbf{u}_i(0) + \int_0^t \mathbf{v}_i(s) ds \quad i = 1, 2,$$

et, nous avons

$$\mathbf{u}_1(0) = \mathbf{u}_2(0) = \mathbf{u}_0,$$

donc

$$|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 \leq c \int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds, \forall t \in [0, T]. \tag{6.89}$$

En combinant cette estimation avec (6.88), afin de déduire que

$$|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 \leq c \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds + c \int_0^t |\boldsymbol{\eta}_1^1(s) - \boldsymbol{\eta}_2^1(s)|_V^2 ds, \quad (6.90)$$

en appliquant le Lemme 2.19 de Granwall pour constater que

$$|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 \leq c \int_0^t |\boldsymbol{\eta}_1^1(s) - \boldsymbol{\eta}_2^1(s)|_V^2 ds. \quad (6.91)$$

Maintenant, en utilisant (6.72) pour voir que

$$|\mathbf{k}_1(t) - \mathbf{k}_2(t)|_H^2 \leq c \int_0^t |\boldsymbol{\eta}_1^2(s) - \boldsymbol{\eta}_2^2(s)|_H^2 ds. \quad (6.92)$$

Nous substituons (6.91) – (6.92) dans (6.84) afin de voir que

$$|\Lambda \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda \boldsymbol{\eta}_2(t)|_{V \times H}^2 \leq c \int_0^t |\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)|_{V \times H}^2 ds. \quad (6.93)$$

En réitérant  $m$  fois l'inégalité (6.93), nous obtenons

$$|\Lambda^m \boldsymbol{\eta}_1 - \Lambda^m \boldsymbol{\eta}_2|_{0, V \times H}^2 \leq \frac{(cT)^m}{m!} |\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2|_{0, V \times H}^2.$$

Pour  $m$  assez grand l'opérateur  $\Lambda^m$  est un contractant sur l'espace de Banach  $C(0, T; V \times H)$ , donc  $\Lambda$  a un point fixe unique  $\boldsymbol{\eta}_* \in C(0, T; V \times H)$ .  $\square$

Maintenant, nous passons à la démonstration du Théorème 6.1.

### Démonstration du Théorème 6.1.

**Existence.** Soit  $\boldsymbol{\eta}_* = (\boldsymbol{\eta}_*^1, \boldsymbol{\eta}_*^2) \in C(0, T; V \times H)$  le point fixe de l'opérateur  $\Lambda$  donné par (6.77) – (6.79). Pour  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_*$ , nous posons

$$\mathbf{u}_* = \mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}_*}, \quad \varphi_* = \varphi_{\boldsymbol{\eta}_*}, \quad \alpha_* = \alpha_{\boldsymbol{\eta}_*} \text{ et } \mathbf{k}_* = \mathbf{k}_{\boldsymbol{\eta}_*}. \quad (6.94)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_* = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_*) + \mathcal{E}^* \nabla \varphi_* + \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\eta}_*}. \quad (6.95)$$

$$\mathbf{D}_* = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*) - \mathbf{B}\nabla \varphi_*. \quad (6.96)$$

Nous montrons que  $(\mathbf{u}_*, \boldsymbol{\sigma}_*, \varphi_*, \mathbf{D}_*, \alpha_*, \mathbf{k}_*)$  satisfait (6.38) – (6.45) et la régularité (6.46) – (6.51). En effet, nous écrivons (6.61) pour  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_*$  et en utilisant (6.94), nous obtenons

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_*(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_*(t)))_{\mathcal{H}} + j_{fr}(\mathbf{u}_*(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}_*(t), \dot{\mathbf{u}}_*(t)) \\ & + (\boldsymbol{\eta}_*^1(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_*(t))_V \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_*(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (6.97)$$

En outre, nous écrivons (6.72) pour  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_*$  et en utilisant (6.94), nous avons

$$\mathbf{k}_*(t) = \mathbf{k}_0 + \int_0^t \boldsymbol{\eta}_*^2(s) ds. \quad (6.98)$$

Nous combinons les égalités  $\Lambda_1 \boldsymbol{\eta}_* = \boldsymbol{\eta}_*^1$  et  $\Lambda_2 \boldsymbol{\eta}_* = \boldsymbol{\eta}_*^2$  avec (6.78) – (6.79) et utilisons (6.94) – (6.95) pour voir que

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\eta}_*^1(t), \mathbf{v})_V &= (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_*(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \\ &+ \left( \int_0^t \mathcal{G}(t-s, \boldsymbol{\sigma}_*(s) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_*(s)) - \mathcal{E}^* \nabla \varphi_*(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*(s)), \mathbf{k}_*(s)) ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \right)_{\mathcal{H}} \\ &+ j_{ad}(\alpha_*(t), \mathbf{u}_*(t), \mathbf{v}) + j_{nc}(\mathbf{u}_*(t), \mathbf{v}), \end{aligned} \quad (6.99)$$

et

$$\boldsymbol{\eta}_*^2(t) = \mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}_*(t) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_*(t)) - \mathcal{E}^* \nabla \varphi_*(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*(t)), \mathbf{k}_*(t)). \quad (6.100)$$

Nous combinons (6.99) avec (6.97) afin de voir que

$$\begin{aligned} &(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_*(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_*(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_*(t)))_{\mathcal{H}} \\ &+ \left( \int_0^t \mathcal{G}(t-s, \boldsymbol{\sigma}_*(s) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_*(s)) - \mathcal{E}^* \nabla \varphi_*(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*(s)), \mathbf{k}_*(s)) ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_*(t)) \right)_{\mathcal{H}} \\ &+ (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_*(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_*(t)))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\alpha_*(t), \mathbf{u}_*(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_*(t)) + j_{nc}(\mathbf{u}_*(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_*(t)) \\ &+ j_{fr}(\mathbf{u}_*(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}_*(t), \dot{\mathbf{u}}_*(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_*(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (6.101)$$

Aussi, de (6.98) et (6.100), nous déduisons que

$$\dot{\mathbf{k}}_*(t) = \mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}_*(t) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_*(t)) - \mathcal{E}^* \nabla \varphi_*(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*(t)), \mathbf{k}_*(t)). \quad (6.102)$$

Nous écrivons (6.67) pour  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_*$  et en employant (6.94), nous obtenons

$$\begin{aligned} &(\mathbf{B}\nabla \varphi_*(t), \nabla \phi)_H - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*(t)), \nabla \phi)_H + (\gamma(\mathbf{u}_*(t), \varphi_*(t)), \phi)_W \\ &= (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, \end{aligned} \quad (6.103)$$

Aussi, nous écrivons (6.69) pour  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_*$  et en utilisant (6.94), nous trouvons

$$\dot{\alpha}_*(t) = -(\alpha_*(t) [\gamma_\nu(R_\nu(u_{*\nu}))^2 + \gamma_\tau |\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{*\tau})|^2] - \varepsilon_a)_+, \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (6.104)$$

Maintenant, de (6.101) – (6.104) avec les conditions initiales (6.44) – (6.45) et (6.95) – (6.96), nous déduisons que  $(\mathbf{u}_*, \boldsymbol{\sigma}_*, \varphi_*, \mathbf{D}_*, \alpha_*, \mathbf{k}_*)$  satisfait (6.38) – (6.45).

Puisque  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}_*(t) \pm \Phi$  satisfait (6.101), où  $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega)^d$  est arbitraire, en utilisant (6.73), (6.94) – (6.95), (6.38) et (6.31) – (6.33), nous trouvons

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma}_*(t) + \mathbf{f}_0(t) = \mathbf{0}, \quad \forall t \in [0, T].$$

D'après l'égalité précédente avec (6.22), (6.95), la régularité de  $(\mathbf{u}_*, \varphi_*, \boldsymbol{\sigma}_{\eta_*})$  et les hypothèses sur  $\{\mathcal{A}, \mathcal{E}\}$  nous concluons que

$$\boldsymbol{\sigma}_* \in C(0, T; \mathcal{H}_1). \quad (6.105)$$

Soit  $t_1, t_2 \in [0, T]$ , d'après (1.6) – (1.12) et (6.96), nous déduisons que

$$|\mathbf{D}_*(t_1) - \mathbf{D}_*(t_2)|_H \leq c(|\varphi_*(t_1) - \varphi_*(t_2)|_W + |\mathbf{u}_*(t_1) - \mathbf{u}_*(t_2)|_V),$$

de la régularité de  $(\mathbf{u}_*, \varphi_*)$  donnée par (6.46) et (6.48), nous impliquons que

$$\mathbf{D}_* \in C(0, T; H). \quad (6.106)$$

Nous choisissons  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  dans (6.103), avec l'utilisation de (6.96) et (6.30), trouvons que

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_*(t) = q_0(t) \quad \forall t \in [0, T].$$

D'après (6.106), (6.23) et (1.1), nous voyons que

$$\mathbf{D}_* \in C(0, T; \mathcal{W}). \quad (6.107)$$

Enfin, d'après les Lemmes 6.4, 6.5, 6.6, 6.7, nous concluons que  $(\mathbf{u}_*, \boldsymbol{\sigma}_*, \varphi_*, \mathbf{D}_*, \alpha_*, \mathbf{k}_*)$  est une solution faible du problème P3 ayant la régularité (6.46) – (6.51), en ce qui termine la preuve de la partie d'existence du Théorème 6.1.

**Unicité.** L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe des opérateurs  $A_\eta$ ,  $\Lambda_\eta$  et  $\Lambda$  qui sont définis par (6.60), (6.75) et (6.77) – (6.79), respectivement.

□

# Chapitre 7

## Problème

### thermo-électro-viscoélastique avec endommagement et adhésion

Nous considérons dans ce chapitre un problème de contact sans frottement avec compliance normale et adhésion dans un processus dynamique entre un corps thermo-électro-viscoélastique avec mémoire longue et endommagement, et une fondation déformable et électriquement isolatrice. Le processus d'adhésion sur la surface de contact est modélisé par une variable interne de surface appelée champ d'adhésion. L'endommagement causé par les déformations élastiques du matériau est modélisé par une variable interne du corps appelée champ d'endommagement.

Le problème est formulé par un système d'équations et d'inéquations aux dérivées partielles contenant la loi de comportement du matériau, l'équation de mouvement du corps, l'équation de conservation de la charge électrique, une inclusion du type parabolique modélisant le champ d'endommagement, une équation d'évolution modélisant la fonction de température, une équation différentielle modélisant le champ d'adhésion et les conditions aux limites auxquelles il est soumis.

Ce chapitre est divisé en trois sections. Dans la première section, nous présentons le problème mécanique, puis nous indiquons les hypothèses sur les données. Dans la deuxième section, nous décrivons la formulation variationnelle du problème mécanique. Enfin, dans

la troisième section, nous étudions l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème mécanique. Les techniques employées sont basées sur les résultats des équations variationnelles d'évolution et la théorie des opérateurs monotones, suivi par les arguments de point fixe.

## 7.1 Formulation mécanique du problème

Dans cette section. Nous nous plaçons dans le cadre physique de la FIG 3.1.1, à supposer que la fonction d'écart initial  $g = 0$  et  $\mathbf{v}^* = \mathbf{0}$ . Nous considérons que le corps est thermo-électro-viscoélastique, plus exactement nous utilisons une loi de comportement de la forme (3.7). En ce qui concerne le contact, nous modélisons par une compliance normale avec adhésion.

Sous ces considérations, le problème mécanique que nous étudions est le suivant.

**Problème P4.** *Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ , le champ de potentiel électrique  $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , le champ des déplacements électriques  $\mathbf{D} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le champ d'endommagement  $\beta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , le champ de température  $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  et le champ d'adhésion  $\alpha : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tels que*

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \beta) + \int_0^t \mathcal{M}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))ds + \mathcal{E}^*\nabla\varphi - \theta\mathbf{C}_e \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (7.1)$$

$$\mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathbf{B}\nabla\varphi + \theta\mathbf{P} \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (7.2)$$

$$\dot{\beta} - k \Delta \beta + \partial\varphi_K(\beta) \ni S(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \beta) \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (7.3)$$

$$\dot{\theta} - k_c \Delta \theta = \Theta(\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}), \theta\mathbf{C}_e) + p \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (7.4)$$

$$\text{Div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \rho\ddot{\mathbf{u}} \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (7.5)$$

$$\text{div}\mathbf{D} = q_0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (7.6)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (7.7)$$

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (7.8)$$

$$\begin{cases} -\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu \alpha^2 R_\nu(u_\nu) \\ -\boldsymbol{\sigma}_\tau = p_\tau(\alpha) \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau) \\ \dot{\alpha} = -(\alpha [\gamma_\nu (R_\nu(u_\nu))^2 + \gamma_\tau |\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)|^2] - \varepsilon_a)_+ \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (7.9)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T), \quad (7.10)$$

$$k_c \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\nu}} + k_e \theta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (7.11)$$

$$\theta = 0 \quad \text{sur } (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \times (0, T), \quad (7.12)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times (0, T), \quad (7.13)$$

$$\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b \times (0, T), \quad (7.14)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0, \beta(0) = \beta_0, \theta(0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (7.15)$$

$$\alpha(0) = \alpha_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (7.16)$$

Les équations (7.1) et (7.2) représentent la loi de comportement du corps thermo-électro-viscoélastique avec mémoire longue et endommagement. La relation (7.3) désigne l'évolution du champ d'endommagement. L'équation différentielle (7.4) décrit l'évolution du champ de température. La relation (7.5) représente l'équation du mouvement et (7.6) représente l'équation de conservation de la charge électrique, tandis que les conditions (7.7) et (7.8) sont respectivement, des conditions aux limites de déplacement-traction. Les conditions (7.9) représentent les conditions aux limites de contact avec compliance normale et adhésion. (7.10) représente la condition de Neumann où  $\frac{\partial \beta}{\partial \boldsymbol{\nu}}$  représente la dérivé normale de  $\beta$ . Les relations (7.11) et (7.12) représentent les conditions aux limites thermiques où  $\frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\nu}}$  représente la dérivé normale de  $\theta$  et  $k_e > 0$  représente le coefficient d'échange de chaleur entre le corps et la fondation. Les équations (7.13) et (7.14) sont les conditions aux limites électriques et pour finir (7.15) et (7.16) représentent les conditions initiales.

Afin de simplifier la notation, nous ne signalons pas explicitement la dépendance des différentes fonctions de la variable spatiale  $\mathbf{x}$ .

Pour l'étude du problème mécanique (7.1) – (7.16), nous introduisons les espaces de Hilbert  $H$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $H_1$  et  $\mathcal{H}_1$  donnés par (1.1) munis des produits scalaires donnés par (1.2). Tout au long de ce chapitre, nous avons besoins de l'espaces  $V$ ,  $W$  et  $\mathcal{W}$  définis par (1.4) et (1.9) – (1.10) munis des produits scalaires donnés par (1.6) et (1.12), respectivement.

D'autre part, pour le champ d'adhésion, nous définissons l'ensemble  $\mathcal{Z}$

$$\mathcal{Z} = \{ \alpha \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_3)) \mid 0 \leq \alpha(t) \leq 1 \quad \forall t \in [0, T], \text{ p.p. sur } \Gamma_3 \}.$$

Maintenant, nous définissons pour le champ de température, le sous-espace fermé de  $H^1(\Omega)$  par

$$E = \{ \theta \in H^1(\Omega) \mid \theta = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \}.$$

Puisque  $mes \Gamma_1 > 0$ , l'inégalité de Friedrichs-Poincaré est vérifiée ainsi il existe une constante  $c_p > 0$  dépendante uniquement de  $\Omega$ ,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  telle que

$$|\nabla \theta|_H \geq c_p |\theta|_{H^1(\Omega)} \quad \forall \theta \in E,$$

Sur  $E$ , nous considérons le produit scalaire donné par

$$(\theta, \vartheta)_{E \times E} = (\nabla \theta, \nabla \vartheta)_H \quad \forall \theta, \vartheta \in E,$$

et soit  $|\cdot|_E$  la norme associée; c'est-à-dire

$$|\theta|_E = |\nabla \theta|_H \quad \forall \theta \in E. \tag{7.17}$$

En combinant l'inégalité de Friedrichs-Poincaré et (7.17), il vient que  $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$  et  $|\cdot|_E$  sont des normes équivalentes sur  $E$  et ainsi  $(E, |\cdot|_E)$  est un espace de Hilbert.

L'application d'inclusion de  $(E, |\cdot|_E)$  dans  $(L^2(\Omega), |\cdot|_{L^2(\Omega)})$  est continue et à image dense. Notant par  $E'$  l'espace dual de  $E$  et identifiant le dual de  $L^2(\Omega)$  avec lui-même, nous pouvons écrire le triplet de Gelfand

$$E \subset L^2(\Omega) \subset E'.$$

Nous utilisons la notation  $(\cdot, \cdot)_{E' \times E}$  pour désigner le produit de dualité entre  $E'$  et  $E$  telle que

$$(\theta, \vartheta)_{E' \times E} = (\theta, \vartheta)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \theta \in L^2(\Omega), \forall \vartheta \in E, \tag{7.18}$$

et  $|\cdot|_{E'}$  la norme sur  $E'$ .



Nous considérons maintenant les hypothèses suivantes : l'opérateur de viscosité  $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } M_1^{\mathcal{A}}, M_2^{\mathcal{A}} > 0 \text{ telles que} \\ \quad |\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})| \leq M_1^{\mathcal{A}} |\boldsymbol{\varepsilon}| + M_2^{\mathcal{A}} \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad (\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m_{\mathcal{A}} |\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2|^2 \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ est Lebesgue} \\ \quad \text{mesurable sur } \Omega, \text{ pour tout } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(d) L'application } \boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ est continue sur } \mathbb{S}^d \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right. \quad (7.19)$$

L'opérateur d'élasticité  $\mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1, r_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2, r_2)| \leq L_{\mathcal{F}} (|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2| + |r_1 - r_2|) \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, r) \text{ est Lebesgue} \\ \quad \text{mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{0}, 0) \text{ appartient à } \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (7.20)$$

La fonction source d'endommagement  $S : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_S > 0 \text{ telle que} \\ \quad |S(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1, r_1) - S(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2, r_2)| \leq L_S (|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2| + |r_1 - r_2|) \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R} \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) Pour tout } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d \text{ et } r \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \rightarrow S(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, r) \\ \quad \text{est Lebesgue mesurable sur } \Omega. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \rightarrow S(\mathbf{x}, \mathbf{0}, 0) \text{ appartient à } L^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (7.21)$$

La fonction source thermique  $\Theta : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_\Theta > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\Theta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\tau}_1) - \Theta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\tau}_2)| \leq L_\Theta (|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2| + |\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2|) \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2 \in \mathbb{S}^d \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) Pour tout } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d \text{ et } \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^d, \mathbf{x} \rightarrow \Theta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\tau}) \\ \quad \text{est Lebesgue mesurable sur } \Omega. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \rightarrow \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \text{ appartient à } L^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (7.22)$$

Le tenseur diélectrique  $\mathbf{B} = (b_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{E} = (b_{ij}(\mathbf{x})E_j) \\ \quad \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) } b_{ij} = b_{ji}, b_{ij} \in L^\infty(\Omega). \\ \text{(c) Il existe } m_B > 0 \text{ telle que} \\ \quad \mathbf{B}\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \geq m_B |\mathbf{E}|^2 \\ \quad \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right. \quad (7.23)$$

Le tenseur piézoélectrique  $\mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{E}(\mathbf{x})\boldsymbol{\tau} = (e_{ijk}(\mathbf{x})\tau_{jk}) \\ \quad \forall \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) } e_{ijk} = e_{ikj} \in L^\infty(\Omega). \end{array} \right. \quad (7.24)$$

La fonction de compliance normale  $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_\nu > 0 \text{ telle que} \\ \quad |p_\nu(\mathbf{x}, r_1) - p_\nu(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_\nu |r_1 - r_2| \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \rightarrow p_\nu(\mathbf{x}, r) \text{ est Lebesgue} \\ \quad \text{mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) } p_\nu(\mathbf{x}, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0. \end{array} \right. \quad (7.25)$$

La fonction de contact tangentiel  $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_\tau > 0 \text{ telle que} \\ \quad |p_\tau(\mathbf{x}, r_1) - p_\tau(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_\tau |r_1 - r_2| \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \\ \text{(b) Il existe } m_\tau > 0 \text{ telle que} \\ \quad |p_\tau(\mathbf{x}, r)| \leq m_\tau \quad \forall r \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \rightarrow p_\tau(\mathbf{x}, r) \text{ est Lebesgue} \\ \quad \text{mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \rightarrow p_\tau(\mathbf{x}, 0) \text{ appartient à } L^2(\Gamma_3). \end{array} \right. \quad (7.26)$$

Le tenseur de relaxation  $\mathcal{M}$  satisfait

$$\mathcal{M} \in C(0, T; \mathcal{H}_\infty). \quad (7.27)$$

La densité de masse  $\rho$  satisfait

$$\rho \in L^\infty(\Omega), \text{ il existe } \rho^* > 0 \text{ telle que } \rho(\mathbf{x}) \geq \rho^*, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega \quad (7.28)$$

Les forces volumiques  $\mathbf{f}_0$  et les tractions surfaciques  $\mathbf{f}_2$  ont la régularité

$$\mathbf{f}_0 \in L^2(0, T; H), \quad \mathbf{f}_2 \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)^d), \quad (7.29)$$

De même, la densité de charge volumique  $q_0$  et surfacique  $q_2$  satisfont

$$q_0 \in C(0, T; L^2(\Omega)), \quad q_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_b)). \quad (7.30)$$

$$q_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_3 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (7.31)$$

Pour le tenseur de dilatation thermique  $\mathbf{C}_e$ , la densité des sources de chaleur volumiques  $p$  et le tenseur de matériau pyroélectrique  $\mathbf{P}$ , nous supposons que

$$\mathbf{C}_e = (c_{ij}), \quad c_{ij} = c_{ji} \in L^\infty(\Omega), \quad p \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad \mathbf{P} \in C(0, T; H). \quad (7.32)$$

Les coefficients d'adhésion  $\gamma_\nu, \gamma_\tau$  et  $\varepsilon_a$  vérifient

$$\gamma_\nu, \gamma_\tau \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \varepsilon_a \in L^2(\Gamma_3), \quad \gamma_\nu, \gamma_\tau, \varepsilon_a \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \quad (7.33)$$

Le champ des déplacements initial, l'endommagement initial et la température initiale satisfont

$$\mathbf{u}_0 \in V, \mathbf{v}_0 \in H, \beta_0 \in K, \theta_0 \in E. \quad (7.34)$$

Finalement, le champ initial d'adhésion satisfait

$$\alpha_0 \in L^2(\Gamma_3), 0 \leq \alpha_0 \leq 1 \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \quad (7.35)$$

Nous énonçons maintenant quelques définitions que nous utilisons dans la suite de ce chapitre.

D'abord, nous définissons les formes bilinéaires  $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a_0 : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$a(\xi, \varphi) = k \int_{\Omega} \nabla \xi \cdot \nabla \varphi dx, \quad (7.36)$$

$$a_0(\xi, \vartheta) = k_c \int_{\Omega} \nabla \xi \cdot \nabla \vartheta dx + k_e \int_{\Gamma_3} \xi \vartheta da. \quad (7.37)$$

Nous utiliserons le produit scalaire modifié sur  $H = L^2(\Omega)^d$  donné par

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_H = (\rho \mathbf{u}, \mathbf{v})_H \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad (7.38)$$

et soit  $\|\cdot\|_H$  la norme associée, c'est-à-dire

$$\|\mathbf{v}\|_H = (\rho \mathbf{v}, \mathbf{v})_H^{\frac{1}{2}} \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (7.39)$$

De (7.28), il vient que  $\|\cdot\|_H$  et  $|\cdot|_H$  sont des normes équivalentes sur  $H$ . D'autre part, l'application d'inclusion de  $(V, |\cdot|_V)$  dans  $(H, \|\cdot\|_H)$  est continue et dense. Nous notons par  $V'$  le dual de  $V$ . Identifiant le dual de  $H$  avec lui-même, donc, nous pouvons écrire le triplet de Gelfand

$$V \subset H \subset V'.$$

La notation  $(\cdot, \cdot)_{V' \times V}$  désigne le produit de dualité entre  $V'$  et  $V$ , nous notons par  $|\cdot|_{V'}$  la norme sur  $V'$ , nous avons

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V' \times V} = ((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_H \quad \forall \mathbf{u} \in H, \forall \mathbf{v} \in V. \quad (7.40)$$

Nous définissons la fonction  $\mathbf{f} : [0, T] \rightarrow V'$  par

$$(\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0(t) \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot \mathbf{v} da \text{ p.p. } t \in [0, T], \quad (7.41)$$

et la fonction  $q : [0, T] \rightarrow W$  par

$$(q(t), \phi)_W = \int_{\Omega} q_0(t) \phi dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t) \phi da \quad (7.42)$$

Les conditions (7.29) et (7.30) impliquent

$$\mathbf{f} \in L^2(0, T; V'), \quad q \in C(0, T; W). \quad (7.43)$$

Soit  $j : L^\infty(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  la fonctionnelle d'adhésion

$$j(\alpha, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu) v_\nu da + \int_{\Gamma_3} (-\gamma_\nu \alpha^2 R_\nu(u_\nu) v_\nu + p_\tau(\alpha) \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau) \cdot \mathbf{v}_\tau) da, \quad (7.44)$$

les conditions (7.25) – (7.26) et (7.33) entraînant que l'intégrale (7.44) est bien définie.

## 7.2 Formulation variationnelle

Dans cette section, nous allons donner la formulation variationnelle du problème P4.

Nous supposons dans ce qui suit que  $\mathbf{u}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfaisant (7.1), (7.5) et (7.9). Soit  $\mathbf{v} \in V$ , nous utilisons la formule de Green (1.3) et l'équation de mouvement (7.5) pour obtenir

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx - \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} dx = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da.$$

Nous divisons l'intégrale de surface  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$ . Puisque  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  sur  $\Gamma_1$ ,  $\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2$  sur  $\Gamma_2$ , nous déduisons que

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da.$$

De (7.38), (7.40) et (7.41), nous obtenons

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_{V' \times V} = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{V' \times V} + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da. \quad (7.45)$$

Sur  $\Gamma_3$ , nous avons

$$\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} = \sigma_\nu v_\nu + \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot \mathbf{v}_\tau,$$

en utilisant (7.9), nous trouvons

$$\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} = -p_\nu(u_\nu) v_\nu + \gamma_\nu \alpha^2 R_\nu(u_\nu) v_\nu - p_\tau(\alpha) \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau) \cdot \mathbf{v}_\tau,$$

de cette égalité, (7.44) la définition de la fonctionnelle  $j$  et (7.45), nous avons

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_{V' \times V} + j(\alpha, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{V' \times V}$$

Nous substituons (7.1) dans l'égalité précédente afin de constater que

$$\begin{aligned} & (\ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} + (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \beta(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \\ & + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + \left( \int_0^t \mathcal{M}(t-s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \right)_{\mathcal{H}} - (\theta(t) C_e, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \\ & + j(\alpha(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{V' \times V}. \end{aligned} \quad (7.46)$$

En outre, Soient  $\varphi$  et  $\mathbf{D}$  des fonctions suffisamment régulières qui satisfaisant (7.2), (7.6) et (7.14). Soit  $\phi \in W$ , nous employons la formule de Green (1.15) et l'équation d'équilibre (7.6) pour écrire

$$\int_{\Omega} \mathbf{D} \cdot \nabla \phi dx + \int_{\Omega} q_0 \phi dx = \int_{\Gamma} \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} \phi da.$$

Nous divisons l'intégrale de surface  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_b$ . Puisque  $\phi = 0$  sur  $\Gamma_a$ ,  $\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = q_2$  sur  $\Gamma_b$ , en tenant compte de (7.2) et (7.42), nous concluons que

$$(\mathbf{B} \nabla \varphi, \nabla \phi)_H - (\mathcal{E} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \nabla \phi)_H - (\theta \mathbf{P}, \nabla \phi)_H = (q, \phi)_W. \quad (7.47)$$

Ensuite, soit  $\theta \in E$  et pour tout  $\vartheta \in E$ , de (7.4), nous avons

$$\left( \dot{\theta}, \vartheta \right)_{E' \times E} - k_c (\Delta \theta, \vartheta)_{L^2(\Omega)} = (\Theta(\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}), \theta \mathbf{C}_e), \vartheta)_{L^2(\Omega)} + (p, \vartheta)_{E' \times E}.$$

En utilisant la formule de Green, nous trouvons

$$(\Delta \theta, \vartheta)_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} \nabla \theta \cdot \nabla \vartheta dx = \int_{\Gamma} \nabla \theta \cdot \boldsymbol{\nu} \vartheta da.$$

Puisque  $\vartheta = 0$  sur  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , nous déduisons que

$$(\Delta \theta, \vartheta)_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} \nabla \theta \cdot \nabla \vartheta dx = \int_{\Gamma_3} \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\nu}} \vartheta da.$$

En employant (7.11), nous trouvons

$$(\Delta \theta, \vartheta)_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} \nabla \theta \cdot \nabla \vartheta dx = -\frac{k_e}{k_c} \int_{\Gamma_3} \theta \vartheta da.$$

donc

$$-k_c (\Delta \theta, \vartheta)_{L^2(\Omega)} = k_c \int_{\Omega} \nabla \theta \cdot \nabla \vartheta dx + k_e \int_{\Gamma_3} \theta \vartheta da,$$

et de (7.37), il vient que

$$-k_c (\Delta\theta, \vartheta)_{L^2(\Omega)} = a_0(\theta, \vartheta).$$

En utilisant (7.18), (7.22) et (7.32) afin d'écrire

$$\left( \dot{\theta}, \vartheta \right)_{E' \times E} + a_0(\theta, \vartheta) = (p + \Theta(\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}), \theta \mathbf{C}_e), \vartheta)_{E' \times E}. \quad (7.48)$$

Par la même procédure que nous avons utilisé dans (5.36), nous pouvons écrire

$$\left( \dot{\beta}, \xi - \beta \right)_{L^2(\Omega)} + a(\beta, \xi - \beta) \geq (S(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \beta), \xi - \beta)_{L^2(\Omega)} \quad (7.49)$$

De (7.9), (7.46) – (7.49) et (7.15) – (7.16), nous obtenons la formulation variationnelle suivante du problème P4.

**Problème PV4.** *Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$ , le champ de potentiel électrique  $\varphi : [0, T] \rightarrow W$ , le champ de température  $\theta : [0, T] \rightarrow E$ , le champ d'endommagement  $\beta : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$  et le champ d'adhésion  $\alpha : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$  tels que*

$$(\ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} + (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \beta(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \quad (7.50)$$

$$\left( \int_0^t \mathcal{M}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \right)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} - (\theta(t)C_e, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \\ + j(\alpha(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in (0, T),$$

$$\left( \dot{\theta}(t), \vartheta \right)_{E' \times E} + a_0(\theta(t), \vartheta) = (\Theta(\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)), \theta(t) \mathbf{C}_e), \vartheta)_{E' \times E} \quad (7.51) \\ + (p(t), \vartheta)_{E' \times E} \quad \forall \vartheta \in E, t \in (0, T),$$

$$(\mathbf{B}\nabla\varphi(t), \nabla\phi)_H - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \nabla\phi)_H - (\theta(t)\mathbf{P}(t), \nabla\phi)_H \quad (7.52) \\ = (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, t \in (0, T),$$

$$\beta(t) \in K \quad \forall t \in [0, T], \quad (\dot{\beta}(t), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\beta(t), \xi - \beta(t)) \quad (7.53) \\ \geq (S(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \beta(t)), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K,$$

$$\dot{\alpha}(t) = -(\alpha(t) [\gamma_\nu (R_\nu(u_\nu(t)))^2 + \gamma_\tau |\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau(t))|^2] - \varepsilon_a)_+ \quad p.p. \quad t \in (0, T), \quad (7.54)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \beta(0) = \beta_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0. \quad (7.55)$$

L'élément  $\{\mathbf{u}, \varphi, \theta, \beta, \alpha\}$  qui satisfait (7.50) – (7.55) est appelé solution faible du Problème de contact P4.

La solvabilité de ce système fera l'objet de la section suivante.

## 7.3 Existence et unicité de la solution

L'intérêt principal dans cette section est le résultat d'existence et d'unicité suivant.

**Théorème 7.1.** *Sous les hypothèses (7.19) – (7.35), le problème PV4 admet une solution unique  $(\mathbf{u}, \theta, \varphi, \beta, \alpha)$  ayant la régularité*

$$\mathbf{u} \in H^1(0, T; V) \cap C^1(0, T; H), \quad \ddot{\mathbf{u}} \in L^2(0, T; V'), \quad (7.56)$$

$$\theta \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; E), \quad \dot{\theta} \in L^2(0, T; E'), \quad (7.57)$$

$$\varphi \in C(0, T; W), \quad (7.58)$$

$$\beta \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (7.59)$$

$$\alpha \in W^{1, \infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z}. \quad (7.60)$$

Nous concluons que, sous les hypothèses (7.19) – (7.35), le problème mécanique (7.1) – (7.16) a une solution faible unique satisfaisant (7.50) – (7.55). La régularité de la solution faible est donnée par (7.56) – (7.60) et en termes de contraintes

$$\boldsymbol{\sigma} \in L^2(0, T; \mathcal{H}), \quad \text{Div} \boldsymbol{\sigma} \in L^2(0, T; V'), \quad (7.61)$$

$$\mathbf{D} \in C(0, T; \mathcal{W}). \quad (7.62)$$

En effet, de (7.1) – (7.2), (7.50) et (7.52), il vient que  $\rho \ddot{\mathbf{u}}(t) = \text{Div} \boldsymbol{\sigma}(t) + \mathbf{f}_0(t)$ ,  $\text{div} \mathbf{D}(t) = q_0(t)$  pour tout  $t \in [0, T]$ . De la régularité (7.56) – (7.59) combinée avec (7.1) – (7.2) et (7.19) – (7.32), nous obtenons (7.61) et (7.62).

La démonstration du Théorème 7.1 sera faite en plusieurs étapes, elle est basée sur les résultats des équations variationnelles d'évolution, les opérateurs monotones et les arguments du point fixe. Nous supposons dans la suite de cette section que (7.19) – (7.35) sont vérifiés,  $c$  désigne une constante positive qui dépend de  $\Omega$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$ ,  $\mathcal{S}$ ,  $\Theta$ ,  $\mathbf{C}_e$ ,  $p_\nu$ ,  $p_\tau$ ,  $\gamma_\nu$ ,  $\gamma_\tau$ ,  $\varepsilon_a$ ,  $L$  et  $T$ , et dont la valeur peut changer d'un endroit à un autre.

Soit  $\boldsymbol{\eta} \in L^2(0, T; V')$ . Dans la première étape, nous considérons le problème intermédiaire suivant.

**Problème PV4 $_\eta$ .** *Trouver le champ des déplacements  $\mathbf{u}_\eta : [0, T] \rightarrow V$  tel que*

$$(\ddot{\mathbf{u}}_\eta(t), \mathbf{v})_{V' \times V} + (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_\eta(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\boldsymbol{\eta}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} \quad (7.63)$$



$$\begin{aligned}
 &= (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} \quad \forall \mathbf{v} \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T), \\
 &\mathbf{u}_\eta(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}_\eta(0) = \mathbf{v}_0.
 \end{aligned} \tag{7.64}$$

Pour le problème variationnel PV4 $_\eta$  nous avons le résultat suivant.

**Lemme 7.2.** *Il existe une solution unique du problème PV4 $_\eta$  qui satisfait (6.56).*

**Preuve.** Nous définissons l'opérateur  $A : V \rightarrow V'$  par

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V' \times V} = (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \tag{7.65}$$

Soient  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v} \in V$ . De (7.65) et (1.6) avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$|A\mathbf{u} - A\mathbf{v}|_{V'} \leq |\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})|_{\mathcal{H}},$$

De (7.19) avec le théorème de Krasnoselski (voir [28] p 60), nous concluons que  $A$  est continu, d'où l'application  $t \rightarrow A(\mathbf{u} + t\mathbf{v})$  est continue et alors de la définition 2.5 (2), nous déduisons que  $A$  est un opérateur hémicontinu.

En outre, de (7.65), (7.19), (1.2) et (1.6), nous avons

$$(A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_{V' \times V} \geq m_{\mathcal{A}} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|_V^2, \tag{7.66}$$

donc,  $A$  est un opérateur monotone.

Nous choisissons  $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$  dans (7.66), nous obtenons

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{u})_{V' \times V} \geq m_{\mathcal{A}} |\mathbf{u}|_V^2 - |A\mathbf{0}_V|_{V'} |\mathbf{u}|_V.$$

Grâce à l'inégalité

$$ab \leq \frac{a^2}{2m_{\mathcal{A}}} + \frac{1}{2}m_{\mathcal{A}}b^2$$

nous avons

$$|A\mathbf{0}_V|_{V'} |\mathbf{u}|_V \leq \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} |A\mathbf{0}_V|_{V'}^2 + \frac{1}{2}m_{\mathcal{A}} |\mathbf{u}|_V^2,$$

donc

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{u})_{V' \times V} \geq \frac{1}{2}m_{\mathcal{A}} |\mathbf{u}|_V^2 - \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} |A\mathbf{0}_V|_{V'}^2,$$

et d'où

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{u})_{V' \times V} \geq \alpha |\mathbf{u}|_V^2 + \beta, \text{ avec } \alpha = \frac{1}{2}m_{\mathcal{A}} \text{ et } \beta = -\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} |A\mathbf{0}_V|_{V'}^2.$$

Encore une fois, nous utilisons (7.65), (7.19) et (1.7), nous trouvons

$$\begin{aligned}
 |A\mathbf{u}|_{V'} &\leq |\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|_{\mathcal{H}} \\
 &\leq M_1^{\mathcal{A}} |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|_{\mathcal{H}} + M_2^{\mathcal{A}} \\
 &\leq M_1^{\mathcal{A}} |\mathbf{u}|_V + M_2^{\mathcal{A}} \\
 &\leq \max(M_1^{\mathcal{A}}, M_2^{\mathcal{A}}) (|\mathbf{u}|_V + 1),
 \end{aligned}$$

et d'où

$$|A\mathbf{u}|_{V'} \leq c(|\mathbf{u}|_V + 1).$$

En outre, de (7.34) et (7.43), nous avons

$$\mathbf{f} - \boldsymbol{\eta} \in L^2(0, T; V'), \quad \mathbf{v}_0 \in H.$$

Finalement, nous remarquons que toutes les conditions du Théorème 2.17 sont vérifiées, donc, nous concluons qu'il existe une fonction unique  $\mathbf{v}_\eta$  qui satisfait

$$\mathbf{v}_\eta \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \quad \dot{\mathbf{v}}_\eta \in L^2(0, T; V'), \quad (7.67)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_\eta(t) + A\mathbf{v}_\eta(t) + \boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{f}(t) \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (7.68)$$

$$\mathbf{v}_\eta(0) = \mathbf{v}_0. \quad (7.69)$$

Nous définissons la fonction  $\mathbf{u}_\eta : [0; T] \rightarrow V$  par

$$\mathbf{u}_\eta(t) = \mathbf{u}_0 + \int_0^t \mathbf{v}_\eta(s) ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (7.70)$$

De (7.64) et (7.67) – (7.70), nous déduisons que  $\mathbf{u}_\eta$  est une solution unique du problème variationnel PV4 $_\eta$  qui satisfait la régularité (7.56).  $\square$

Dans la deuxième étape, soit  $\lambda \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . Nous considérons pour le champ de température le problème variationnel suivant.

**Problème PV4 $_\lambda$ .** *Trouver le champ de température  $\theta_\lambda : [0, T] \rightarrow E$  tel que*

$$\left( \dot{\theta}_\lambda(t), \vartheta \right)_{E' \times E} + a_0(\theta_\lambda(t), \vartheta) \quad (7.71)$$

$$= (p(t) + \lambda(t), \vartheta)_{E' \times E} \quad \forall \vartheta \in E, \quad \text{p.p. } t \in (0, T)$$

$$\theta_\lambda(0) = \theta_0. \quad (7.72)$$

Nous avons le résultat suivant.

**Lemme 7.3.** *Le problème  $PV_{4\lambda}$  admet une solution unique  $\theta_\lambda$  telle que*

$$\theta_\lambda \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; E), \quad \dot{\theta}_\lambda \in L^2(0, T; E'). \quad (7.73)$$

**Preuve.** D'après la définition du sous-espace  $E$ , nous pouvons écrire le triplet de Gelfand

$$E \subset L^2(\Omega) \subset E'.$$

Nous considérons l'opérateur linéaire  $A_0 : E \rightarrow E'$  tel que

$$(A_0\xi, \vartheta)_{E' \times E} = a_0(\xi, \vartheta) \quad \forall \xi, \vartheta \in E.$$

En utilisant la définition (7.37) de la forme bilinéaire  $a_0$ , l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de trace de Sobolev avec l'inégalité de Friedrichs-Poincaré et la définition (7.17), pour tout  $\xi, \vartheta \in E$ , nous avons

$$\begin{aligned} |(A_0\xi, \vartheta)_{E' \times E}| &\leq k_c |\nabla \xi|_H |\nabla \vartheta|_H + k_e |\xi|_{L^2(\Gamma_3)} |\vartheta|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\leq (k_c + k_e c^2) |\xi|_E |\vartheta|_E, \end{aligned}$$

donc

$$|A_0\xi|_{E'} \leq (k_c + k_e c^2) |\xi|_E,$$

ce qui montre que  $A_0$  est continu, donc il est de Lipschitz et d'où  $A_0$  est hémicontinu.

Ainsi, en utilisant la définition de  $A_0$ , (7.37) la définition de  $a_0$  et (7.17), nous avons pour tout  $\xi \in E$

$$\begin{aligned} (A_0\xi, \xi)_{E' \times E} &= k_c |\nabla \xi|_H^2 + k_e |\xi|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\ &\geq k_c |\nabla \xi|_H^2 \\ &\geq k_c |\xi|_E^2, \end{aligned}$$

donc  $A_0$  est fortement monotone.

Outre, de (7.32) et (7.34), nous avons

$$p + \lambda \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ et } \theta_0 \in E.$$

Nous voyons que toutes les conditions du Théorème 2.17 sont vérifiées, donc nous concluons qu'il existe une fonction unique  $\theta_\lambda$  satisfait

$$\begin{aligned}\theta_\lambda &\in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; E), \quad \dot{\theta}_\lambda \in L^2(0, T; E'). \\ \dot{\theta}_\lambda(t) + A_0\theta_\lambda(t) &= p(t) + \lambda(t) \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \\ \theta_\lambda(0) &= \theta_0.\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve du Lemme 7.3. □

Maintenant, nous définissons pour tout  $t \in [0, T]$  l'opérateur

$$\Lambda_\eta : L^2(0, T; L^2(\Omega)) \rightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (7.74)$$

pour tout  $\lambda \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$  par l'égalité

$$(\Lambda_\eta \lambda(t), \vartheta)_{L^2(\Omega)} = (\Theta(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\eta(t)), \theta_\lambda(t) \mathbf{C}_e), \vartheta)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \vartheta \in E, \quad (7.75)$$

où  $\theta_\lambda$  est la solution de PV4 $_\lambda$  et  $\mathbf{u}_\eta$  est la solution de PV4 $_\eta$ .

Pour l'opérateur  $\Lambda_\eta$  nous avons le résultat suivant.

**Lemme 7.4.** *L'opérateur  $\Lambda_\eta$  admet un point fixe unique  $\lambda_\eta \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ .*

**Preuve.** Soient  $t \in (0, T)$  et  $\lambda_1, \lambda_2 \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . Nous utilisons la notation  $\theta_{\lambda_i} = \theta_i$ , pour  $i = 1, 2$ . En employant (7.75), (7.32) et (7.22) afin de voir que

$$|\Lambda_\eta \lambda_1(t) - \Lambda_\eta \lambda_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (7.76)$$

De (7.71), nous déduisons que

$$\begin{aligned}\left( \dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t), \theta_1(t) - \theta_2(t) \right)_{E' \times E} + a_0(\theta_1(t) - \theta_2(t), \theta_1(t) - \theta_2(t)) \\ = (\lambda_1(t) - \lambda_2(t), \theta_1(t) - \theta_2(t))_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

En intégrant l'inégalité précédente par rapport à  $t$  avec les conditions initiales

$$\theta_1(0) = \theta_0 \text{ et } \theta_2(0) = \theta_0,$$

et en utilisant l'égalité

$$\int_0^t \left( \dot{\theta}_1(s) - \dot{\theta}_2(s), \theta_1(s) - \theta_2(s) \right)_{E' \times E} ds = \frac{1}{2} |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2,$$

et l'inégalité

$$\int_0^t a_0(\theta_1(s) - \theta_2(s), \theta_1(s) - \theta_2(s)) ds \geq 0,$$

nous obtenons

$$\frac{1}{2} |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t (\lambda_1(s) - \lambda_2(s), \theta_1(s) - \theta_2(s))_{L^2(\Omega)} ds.$$

En utilisant l'inégalité  $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ , il vient alors que

$$|\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t |\lambda_1(s) - \lambda_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds.$$

Le Lemme 2.19 de Gronwall nous donne

$$|\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \int_0^t |\lambda_1(s) - \lambda_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds \quad (7.77)$$

De (7.76) et (7.77), nous trouvons

$$|\Lambda_\eta \lambda_1(t) - \Lambda_\eta \lambda_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \int_0^t |\lambda_1(s) - \lambda_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds.$$

En réitérant  $m$  fois l'inégalité précédente, nous obtenons

$$|\Lambda_\eta^m \lambda_1 - \Lambda_\eta^m \lambda_2|_{0,2,L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{(cT)^m}{m!} |\lambda_1 - \lambda_2|_{0,2,L^2(\Omega)}^2.$$

Ce qui implique que pour  $m$  assez grand, l'opérateur  $\Lambda^m$  est un contractant sur l'espace de Banach  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , donc,  $\Lambda_\eta$  a un point fixe unique  $\lambda_\eta \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ .  $\square$

Dans la suite, soient  $\lambda_\eta$  le point fixe garantié par le Lemme 7.4 et  $\theta_\eta$  la fonction définie par

$$\theta_\eta = \theta_{\lambda_\eta}. \quad (7.78)$$

Puisque  $\lambda_\eta$  est le point fixe de  $\Lambda_\eta$ , donc

$$\Lambda_\eta \lambda_\eta = \lambda_\eta. \quad (7.79)$$

Nous combinons (7.75) avec (7.78) – (7.79) afin d'écrire

$$(\lambda_\eta(t), \vartheta)_{E' \times E} = (\Theta(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\eta(t)), \theta_\eta(t) \mathbf{C}_e), \vartheta)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \vartheta \in E. \quad (7.80)$$

Nous posons  $\lambda = \lambda_\eta$  dans (7.71) – (7.72) et utilisons (7.78) et (7.80), nous voyons que  $\theta_\eta$  est l'unique fonction qui satisfait

$$\left( \dot{\theta}_\eta(t), \vartheta \right)_{E' \times E} + a_0(\theta_\eta(t), \vartheta) \quad (7.81)$$

$$\begin{aligned}
 &= (p(t) + \Theta(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\eta(t)), \theta_\eta(t) \mathbf{C}_e), \vartheta)_{E' \times E} \quad \forall \vartheta \in E, \text{ p.p. } t \in (0, T), \\
 &\theta_\eta(0) = \theta_0.
 \end{aligned} \tag{7.82}$$

Maintenant, nous utilisons  $\mathbf{u}_\eta$  la solution de PV4 $_\eta$  et  $\theta_\eta$  la fonction qui satisfait (7.81) – (7.82), pour construire le problème variationnel suivant.

**Problème QV4 $_\eta$ .** *Trouver le champ de potentiel électrique  $\varphi_\eta : [0, T] \rightarrow W$  tel que*

$$\begin{aligned}
 &(\mathbf{B}\nabla\varphi_\eta(t), \nabla\phi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)), \nabla\phi)_H \\
 &= (q(t), \phi)_W + (\theta_\eta(t) \mathbf{P}(t), \nabla\phi)_H \quad \forall \phi \in W, t \in [0, T].
 \end{aligned} \tag{7.83}$$

Pour le problème QV4 $_\eta$ , nous avons le résultat suivant.

**Lemme 7.5.** *QV4 $_\eta$  admet une solution unique  $\varphi_\eta$  qui satisfait (7.58).*

**Preuve.** Nous définissons la forme bilinéaire  $b : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$b(\varphi, \phi) = (\mathbf{B}\nabla\varphi, \nabla\phi)_H \quad \forall \varphi, \phi \in W. \tag{7.84}$$

De (7.84), (7.23), (1.2), (1.13) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$b(\varphi, \phi) = b(\phi, \varphi), \quad |b(\varphi, \phi)| \leq c|\varphi|_W |\phi|_W, \quad |b(\varphi, \varphi)| \geq c|\varphi|_W^2 \quad \forall \varphi, \phi \in W.$$

c'est-à-dire que la forme bilinéaire  $b$  est symétrique, continue et coercive sur  $W$ .

Cependant, en utilisant le théorème de représentation de Riesz, nous pouvons définir une forme linéaire continue  $l_\eta(t) : W \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$l_\eta(t)(\phi) = (q(t), \phi)_W + (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)), \nabla\phi)_H + (\theta_\eta(t) \mathbf{P}(t), \nabla\phi)_H \quad \forall \phi \in W, t \in [0, T].$$

Nous appliquons le théorème de Lax-Milgram pour déduire qu'il existe un élément unique  $\varphi_\eta(t) \in W$  tel que

$$b(\varphi_\eta(t), \phi) = l_\eta(t)(\phi),$$

alors que

$$(\mathbf{B}\nabla\varphi_\eta(t), \nabla\phi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)), \nabla\phi)_H = (q(t), \phi)_W + (\theta_\eta(t) \mathbf{P}(t), \nabla\phi)_H.$$

Nous concluons que  $\varphi_\eta$  est une solution unique de QV3 $_\eta$ . Maintenant, nous adoptons les notations  $\mathbf{u}_\eta(t_i) = \mathbf{u}_i$ ,  $\theta_\eta(t_i) = \theta_i$ ,  $\varphi_\eta(t_i) = \varphi_i$ ,  $q(t_i) = q_i$  et  $\mathbf{P}(t_i) = \mathbf{P}_i$  et nous appliquons (7.83) pour  $t = t_1$  puis pour  $t = t_2$  avec  $\phi = \varphi_1 - \varphi_2$  et faisons la soustraction, nous obtenons

$$(\mathbf{B}\nabla\varphi_1 - \mathbf{B}\nabla\varphi_2, \nabla(\varphi_1 - \varphi_2))_H = (q_1 - q_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W,$$

$$+(\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_1) - \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_2), \nabla(\varphi_1 - \varphi_2))_H + (\theta_1 \mathbf{P}_1 - \theta_2 \mathbf{P}_2, \nabla(\varphi_1 - \varphi_2))_H.$$

En utilisant (7.23) – (7.24), (7.32), l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'écriture  $a = a - b + b$ , nous avons

$$m_B |\varphi_1 - \varphi_2|_W \leq c \left( |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_V + |q_1 - q_2|_W + |\theta_1 - \theta_2|_{L^2(\Omega)} + |\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2|_H \right).$$

D'après l'inégalité précédente, (7.32), (7.43), (7.56) et (7.57), nous pouvons écrire

$$\varphi_\eta \in C(0, T; W).$$

Ce qui termine la preuve du Lemme 7.5. □

Dans la troisième étape, soit  $\mu \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . Nous considérons pour le champ d'endommagement le problème variationnel suivant.

**Problème PV4 $_\mu$ .** *Trouver le champ d'endommagement  $\beta_\mu : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$  tel que*

$$\beta_\mu(t) \in K, \quad \left( \dot{\beta}_\mu(t), \xi - \beta_\mu(t) \right)_{L^2(\Omega)} + a(\beta_\mu(t), \xi - \beta_\mu(t)) \quad (7.85)$$

$$\geq (\mu(t), \xi - \beta_\mu(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K, t \in (0, T),$$

$$\beta_\mu(0) = \beta_0. \quad (7.86)$$

Nous avons le résultat suivant.

**Lemme 7.6.** *Le problème PV4 $_\mu$  admet une solution unique  $\beta_\mu$  telle que*

$$\beta_\mu \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (7.87)$$

**Preuve.** Nous utilisons le résultat standard sur les inéquations variationnelles paraboliques (voir la preuve du Lemme 5.7 du chapitre 5). □

Dans la quatrième étape, nous utilisons le champ des déplacements  $\mathbf{u}_\eta$  obtenu dans le Lemme 7.2 et nous considérons le problème variationnel suivant.

**Problème PV4 $_\alpha$ .** *Trouver le champ d'adhésion  $\alpha_\eta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$  tel que*

$$\dot{\alpha}_\eta(t) = - \left( \alpha_\eta(t) \left[ \gamma_\nu (R_\nu(u_{\eta\nu}))^2 + \gamma_\tau |\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{\eta\tau})|^2 \right] - \varepsilon_a \right)_+, \quad p.p.t \in (0, T), \quad (7.88)$$

$$\alpha_\eta(0) = \alpha_0. \quad (7.89)$$

Pour le problème PV4 $_\alpha$  nous avons le résultat suivant.

**Lemme 7.7.** *Le problème  $PV4_\alpha$  admet une solution unique  $\alpha_\eta$  qui satisfait*

$$\alpha_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z}. \quad (7.90)$$

**Preuve.** Nous utilisons le résultat standard sur les équations d'évolution (voir la preuve du Lemme 6.6 du chapitre 6).  $\square$

Maintenant, pour tout  $t \in [0, T]$ , nous considérons l'opérateur

$$\Lambda : L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega)) \rightarrow L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega)) \quad (7.91)$$

défini pour tout  $(\boldsymbol{\eta}, \mu) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$  par les égalités

$$\Lambda(\boldsymbol{\eta}, \mu)(t) = (\Lambda_1(\boldsymbol{\eta}, \mu)(t), \Lambda_2(\boldsymbol{\eta}, \mu)(t)) \in V' \times L^2(\Omega), \quad (7.92)$$

$$\begin{aligned} (\Lambda_1(\boldsymbol{\eta}, \mu)(t), \mathbf{v})_{V' \times V} &= (\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta(t)), \beta_\mu(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_\eta(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \\ &+ \left( -\theta_\eta(t) \mathbf{C}_e + \int_0^t \mathcal{M}(t-s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta(s)) ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \right)_{\mathcal{H}} \\ &+ j(\alpha_\eta(t), \mathbf{u}_\eta(t), \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \end{aligned} \quad (7.93)$$

et

$$\Lambda_2(\boldsymbol{\eta}, \mu)(t) = S(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta(t)), \beta_\mu(t)). \quad (7.94)$$

Ici, pour tout  $(\boldsymbol{\eta}, \mu) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ ;  $\mathbf{u}_\eta$ ,  $\varphi_\eta$ ,  $\beta_\mu$  et  $\alpha_\eta$  représentent le champ des déplacements, le champ de potentiel électrique, le champ d'endommagement et le champ d'adhésion obtenus dans les Lemmes 7.2, 7.5, 7.6 et 7.7 respectivement.  $\theta_\eta$  est le champ de température qui vérifie (7.81) – (7.82).

Nous avons le résultat suivant.

**Lemme 7.8.** *L'opérateur  $\Lambda$  a un point fixe unique  $(\boldsymbol{\eta}^*, \mu^*) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ , tel que*

$$\Lambda(\boldsymbol{\eta}^*, \mu^*) = (\boldsymbol{\eta}^*, \mu^*).$$

**Preuve.** Soient  $t \in (0, T)$  et  $(\boldsymbol{\eta}_1, \mu_1), (\boldsymbol{\eta}_2, \mu_2) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ . Nous utilisons les notations  $\mathbf{u}_{\eta_i} = \mathbf{u}_i$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_{\eta_i} = \dot{\mathbf{u}}_i = \mathbf{v}_i$ ,  $\alpha_{\eta_i} = \alpha_i$ ,  $\varphi_{\eta_i} = \varphi_i$ ,  $\beta_{\mu_i} = \beta_i$  et  $\theta_{\eta_i} = \theta_i$ , pour  $i = 1, 2$ . En utilisant (7.93), (7.44) et (7.32) – (7.33), nous avons

$$|\Lambda_1(\boldsymbol{\eta}_1, \mu_1)(t) - \Lambda_1(\boldsymbol{\eta}_2, \mu_2)(t)|_{V'}^2$$



$$\begin{aligned}
 &\leq c \left( |\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(t)), \beta_1(t)) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(t)), \beta_2(t))|_{\mathcal{H}}^2 \right. \\
 &+ |\mathcal{E}^* \nabla \varphi_1(t) - \mathcal{E}^* \nabla \varphi_2(t)|_{\mathcal{H}}^2 + |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t |\mathcal{M}(t-s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s))|_{\mathcal{H}}^2 ds \\
 &+ |p_\nu(u_{1\nu}(t)) - p_\nu(u_{2\nu}(t))|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + |\alpha_1^2(t) R_\nu(u_{1\nu}(t)) - \alpha_2^2(t) R_\nu(u_{2\nu}(t))|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\
 &\left. + |p_\tau(\alpha_1(t)) \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{1\tau}(t)) - p_\tau(\alpha_2(t)) \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{2\tau}(t))|_{L^2(\Gamma_3)^d} \right).
 \end{aligned}$$

En employant (7.20), (7.24) – (7.27) et (7.60) avec (3.11) et (3.13) les définitions de  $R_\nu$  et  $\mathbf{R}_\tau$ , nous avons

$$\begin{aligned}
 &|\Lambda_1(\boldsymbol{\eta}_1, \mu_1)(t) - \Lambda_1(\boldsymbol{\eta}_2, \mu_2)(t)|_{V'}^2 \tag{7.95} \\
 &\leq c \left( |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds + |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W^2 \right. \\
 &\left. + |\alpha_1(t) - \alpha_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \right).
 \end{aligned}$$

De même, en utilisant (7.94) et (7.21), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 &|\Lambda_2(\boldsymbol{\eta}_1, \mu_1)(t) - \Lambda_2(\boldsymbol{\eta}_2, \mu_2)(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \tag{7.96} \\
 &\leq c \left( |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \right).
 \end{aligned}$$

Nous rassemblons (7.95), (7.96) et (7.92) pour voir que

$$\begin{aligned}
 &|\Lambda(\boldsymbol{\eta}_1, \mu_1)(t) - \Lambda(\boldsymbol{\eta}_2, \mu_2)(t)|_{V' \times (L^2(\Omega))}^2 \tag{7.97} \\
 &\leq c \left( |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 ds + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds + |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\
 &\left. + |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W^2 + |\alpha_1(t) - \alpha_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \right).
 \end{aligned}$$

D'autre part, de (7.63), nous trouvons

$$\begin{aligned}
 &(\dot{\mathbf{v}}_1(t) - \dot{\mathbf{v}}_2(t), \mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t))_{V' \times V} \tag{7.98} \\
 &+ (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t)) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(t)) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2(t)))_{\mathcal{H}} \\
 &= (\boldsymbol{\eta}_2(t) - \boldsymbol{\eta}_1(t), \mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t))_{V' \times V}.
 \end{aligned}$$

Nous intégrons (7.98) par rapport au temps avec la condition initiale  $\mathbf{v}_1(0) = \mathbf{v}_2(0) = \mathbf{v}_0$ , et utilisons (7.19), (7.38) et (7.40) pour constater que

$$\int_0^t (\dot{\mathbf{v}}_1(s) - \dot{\mathbf{v}}_2(s), \mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s))_{V' \times V} ds = \frac{1}{2} |\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)|_H^2 \geq 0,$$

et

$$\int_0^t (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(s)) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1(s)) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2(s)))_{\mathcal{H}} ds \geq m_{\mathcal{A}} \int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds,$$

donc

$$m_{\mathcal{A}} \int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds \leq - \int_0^t (\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s), \mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s))_{V' \times V} ds.$$

En utilisant l'inégalité  $ab \leq \frac{a^2}{2m_{\mathcal{A}}} + \frac{1}{2}m_{\mathcal{A}}b^2$ , pour tout  $t \in [0, T]$ , nous avons

$$\int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds \leq c \int_0^t |\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)|_{V'}^2 ds. \quad (7.99)$$

Maintenant, nous intégrons (7.88) avec la condition initiale (7.89) pour écrire

$$\alpha_i(t) = \alpha_0 - \int_0^t (\alpha_i(s) [\gamma_{\nu}(R_{\nu}(u_{i\nu}(s)))^2 + \gamma_{\tau} |\mathbf{R}_{\tau}(u_{i\tau}(s))|^2] - \varepsilon_a)_+ ds$$

et d'où

$$\begin{aligned} |\alpha_1(t) - \alpha_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq c \left( \int_0^t |\alpha_1(s) (R_{\nu}(u_{1\nu}(s)))^2 - \alpha_2(s) (R_{\nu}(u_{2\nu}(s)))^2|_{L^2(\Gamma_3)} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t |\alpha_1(s) |\mathbf{R}_{\tau}(\mathbf{u}_{1\tau}(s))|^2 - \alpha_2(s) |\mathbf{R}_{\tau}(\mathbf{u}_{2\tau}(s))|^2|_{L^2(\Gamma_3)} ds \right). \end{aligned}$$

En utilisant (3.11) et (3.13) les définitions de  $R_{\nu}$  et  $\mathbf{R}_{\tau}$  avec l'écriture  $\alpha_1 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_2$  et l'inégalité  $|u_r| \leq |\mathbf{u}|$  ( $r = \nu, \tau$ )  $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$  pour trouver

$$\begin{aligned} &|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\ &\leq c \int_0^t |\alpha_1(s) - \alpha_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds + c \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)^d}^2 ds. \end{aligned}$$

En combinant cette inégalité avec le Lemme 2.19 de Gronwall, nous pouvons écrire

$$|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq c \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)^d}^2 ds,$$

et d'après (1.8), nous avons

$$|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq c \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds. \quad (7.100)$$

En outre, de (7.81), nous déduisons que

$$\left( \dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t), \theta_1(t) - \theta_2(t) \right)_{E' \times E} + a_0 (\theta_1(t) - \theta_2(t), \theta_1(t) - \theta_2(t))$$

$$= (\Theta(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_1(t)), \theta_1(t) \mathbf{C}_e) - \Theta(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_2(t)), \theta_2(t) \mathbf{C}_e), \theta_1(t) - \theta_2(t))_{E' \times E}.$$

En intégrant l'inégalité précédente par rapport à  $t$  avec les conditions initiales

$$\theta_1(0) = \theta_0 \text{ et } \theta_2(0) = \theta_0,$$

et en utilisant l'égalité

$$\int_0^t (\dot{\theta}_1(s) - \dot{\theta}_2(s), \theta_1(s) - \theta_2(s))_{E' \times E} ds = \frac{1}{2} |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2,$$

et l'inégalité

$$\int_0^t a_0(\theta_1(s) - \theta_2(s), \theta_1(s) - \theta_2(s)) ds \geq 0,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \int_0^t (\Theta(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_1(s)), \theta_1(s) \mathbf{C}_e) - \Theta(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_2(s)), \theta_2(s) \mathbf{C}_e), \theta_1(s) - \theta_2(s))_{E' \times E} ds. \end{aligned}$$

De (7.18), (7.22), (7.32) et (1.7), il vient alors que

$$\begin{aligned} & |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq c \int_0^t [|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V + |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)}] |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)} ds, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq c \int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds + c \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds. \end{aligned}$$

Nous combinons l'inégalité précédente avec le Lemme 2.19 de Gronwall pour écrire

$$|\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds. \quad (7.101)$$

Par la même procédure que nous avons utilisé dans (5.100), nous avons

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t |\mu_1(s) - \mu_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds. \quad (7.102)$$

Nous savons que

$$\mathbf{u}_i(t) = \mathbf{u}_0 + \int_0^t \mathbf{v}_i(s) ds$$

et

$$\mathbf{u}_1(0) = \mathbf{u}_2(0) = \mathbf{u}_0,$$

donc

$$|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 \leq c \int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds. \quad (7.103)$$

Nous employons (7.83) et remplaçons  $\phi$  par  $\varphi_1 - \varphi_2$  pour voir que

$$\begin{aligned} & (\mathbf{B}\nabla\varphi_1(t) - \mathbf{B}\nabla\varphi_2(t), \nabla(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)))_H \\ &= (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_1(t)) - \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_2(t)), \nabla(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)))_H \\ &+ ((\theta_1(t) - \theta_2(t))\mathbf{P}(t), \nabla(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)))_H. \end{aligned}$$

Nous appliquons les hypothèses (7.23) – (7.24), (7.32) et les définitions (1.6), (1.12) afin de voir que

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W^2 \leq c \left( |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \quad (7.104)$$

Alors, depuis (7.97) et (7.99) – (7.104), nous trouvons

$$\begin{aligned} & |\Lambda(\boldsymbol{\eta}_1, \mu_1)(t) - \Lambda(\boldsymbol{\eta}_2, \mu_2)(t)|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq c \left( \int_0^t |\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)|_{V'}^2 ds + \int_0^t |\mu_1(s) - \mu_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que maintenant

$$\begin{aligned} & |\Lambda(\boldsymbol{\eta}_1, \mu_1)(t) - \Lambda(\boldsymbol{\eta}_2, \mu_2)(t)|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq c \int_0^t |(\boldsymbol{\eta}_1, \mu_1)(s) - (\boldsymbol{\eta}_2, \mu_2)(s)|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 ds. \end{aligned}$$

En réitérant  $m$  fois l'inégalité précédente, nous obtenons

$$\begin{aligned} & |\Lambda^m(\boldsymbol{\eta}_1, \mu_1) - \Lambda^m(\boldsymbol{\eta}_2, \mu_2)|_{0,2,V' \times L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \frac{(cT)^m}{m!} |(\boldsymbol{\eta}_1, \mu_1) - (\boldsymbol{\eta}_2, \mu_2)|_{0,2,V' \times L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Ce qui implique que pour  $m$  suffisamment grand, l'opérateur  $\Lambda^m$  est un contractant sur l'espace de Banach  $L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ , donc,  $\Lambda$  possède un point fixe unique  $(\boldsymbol{\eta}^*, \mu^*) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ .  $\square$

Maintenant, nous pouvons établir la démonstration du Théorème 7.1.

**Démonstration du Théorème 7.1.**

**Existence.** Soit  $(\boldsymbol{\eta}^*, \mu^*) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$  le point fixe de  $\Lambda$  qui est défini par (7.91) – (7.94), nous adoptons les notations

$$\mathbf{u}_* = \mathbf{u}_{\eta^*}, \dot{\mathbf{u}}_* = \dot{\mathbf{u}}_{\eta^*}, \ddot{\mathbf{u}}_* = \ddot{\mathbf{u}}_{\eta^*}, \theta_* = \theta_{\eta^*}, \varphi_* = \varphi_{\eta^*}, \beta_* = \beta_{\mu^*}, \alpha_* = \alpha_{\eta^*} \quad (7.105)$$

et pour tout  $t \in [0, T]$ , nous posons

$$\boldsymbol{\sigma}_* = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_*) + \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*), \beta_*) + \int_0^t \mathcal{M}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*(s))ds + \mathcal{E}^*\nabla\varphi_* - \theta_*\mathbf{C}_e, \quad (7.106)$$

$$\mathbf{D}_* = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*) - \mathbf{B}\nabla\varphi_* + \theta_*\mathbf{P}, \quad (7.107)$$

Nous montrons que  $(\mathbf{u}_*, \theta_*, \varphi_*, \beta_*, \alpha_*)$  satisfait (7.50) – (7.55) et la régularité (7.56) – (7.60).

En effet, nous écrivons (7.63) pour  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^*$  et en utilisant (7.105), nous obtenons

$$(\ddot{\mathbf{u}}_*(t), \mathbf{v})_{V' \times V} + (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_*(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\boldsymbol{\eta}^*(t), \mathbf{v})_{V' \times V} \quad (7.108)$$

$$= (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} \quad \forall \mathbf{v} \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T),$$

En outre, nous écrivons (7.85) pour  $\mu = \mu^*$  et en utilisant (7.105), nous avons

$$\beta_*(t) \in K, \quad \left( \dot{\beta}_*(t), \xi \right)_{L^2(\Omega)} + a(\beta_*(t), \xi) \quad (7.109)$$

$$\geq (\mu^*(t), \xi)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K, \quad t \in (0, T).$$

Nous combinons les égalités  $\Lambda_1(\boldsymbol{\eta}^*, \mu^*) = \boldsymbol{\eta}^*$  et  $\Lambda_2(\boldsymbol{\eta}^*, \mu^*) = \mu^*$  avec (7.93) – (7.94) pour obtenir

$$(\boldsymbol{\eta}^*(t), \mathbf{v})_{V' \times V} = (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_*(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \quad (7.110)$$

$$+ \left( -\theta_*(t)\mathbf{C}_e + \int_0^t \mathcal{M}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*(s))ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \right)_{\mathcal{H}} \\ + j(\alpha_*(t), \mathbf{u}_*(t), \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

$$\mu^*(t) = S(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*(t)), \beta_*(t)). \quad (7.111)$$

Nous combinons (7.110) avec (7.108) afin de voir que

$$(\ddot{\mathbf{u}}_*(t), \mathbf{v})_{V' \times V} + (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_*(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \quad (7.112)$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( -\theta_*(t) C_e + \int_0^t \mathcal{M}(t-s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*(s)) ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \right)_{\mathcal{H}} \\
 & + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_*(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + j(\alpha_*(t), \mathbf{u}_*(t), \mathbf{v}) \\
 & = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} \quad \forall \mathbf{v} \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T),
 \end{aligned}$$

Ainsi, de (7.111) et (7.109), nous avons

$$\begin{aligned}
 \beta_*(t) & \in K, \quad \left( \dot{\beta}_*(t), \vartheta \right)_{L^2(\Omega)} + a(\beta_*(t), \xi) \\
 & \geq (S(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*(t)), \beta_*(t)), \xi)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K, \quad t \in (0, T).
 \end{aligned} \tag{7.113}$$

Nous écrivons (7.83) pour  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^*$  et en employant (7.105), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{B} \nabla \varphi_*(t), \nabla \phi)_H - (\mathcal{E} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*(t)), \nabla \phi)_H \\
 & = (q(t), \phi)_W + (\theta_*(t) \mathbf{P}(t), \nabla \phi)_H \quad \forall \phi \in W, t \in [0, T].
 \end{aligned} \tag{7.114}$$

Aussi, nous écrivons (7.88) pour  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^*$  et en utilisant (7.105), nous trouvons

$$\dot{\alpha}_*(t) = -(\alpha_*(t) [\gamma_\nu (R_\nu(u_{*\nu}))^2 + \gamma_\tau |\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_{*\tau})|^2] - \varepsilon_a)_+, \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \tag{7.115}$$

nous appliquons (7.81) pour  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^*$  pour voir que

$$\begin{aligned}
 & \left( \dot{\theta}_*(t), \vartheta \right)_{E' \times E} + a_0(\theta_*(t), \vartheta) \\
 & = (p(t) + \Theta(\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_*(t)), \theta_*(t) \mathbf{C}_e), \vartheta)_{E' \times E} \quad \forall \vartheta \in E, \text{ p.p. } t \in (0, T)
 \end{aligned} \tag{7.116}$$

Maintenant, de (7.112)–(7.116) avec les conditions initiales (7.55) et d’après les Lemmes 7.2, 7.5, 7.6 et 7.7 avec (7.81) – (7.82), nous déduisons que  $(\mathbf{u}_*, \beta_*, \varphi_*, \alpha_*, \theta_*)$  satisfait (7.50) – (7.55) et la régularité (7.56) – (7.60).

Puisque  $(\mathbf{u}_*, \varphi_*, \theta_*, \beta_*)$  satisfait (7.56) – (7.59), de (7.106), (7.19) – (7.20), (7.24), (7.27) et (7.32) nous avons

$$\boldsymbol{\sigma}_* \in L^2(0, T; \mathcal{H}) \tag{7.117}$$

Nous choisissons  $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^d$  dans (7.112) et utilisons (7.106), (7.40) – (7.41) et (7.44) pour trouver

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}_*(t) = \text{Div} \boldsymbol{\sigma}_*(t) + \mathbf{f}_0(t) \quad \text{dans } V' \quad \forall t \in [0, T].$$

D'après l'égalité précédente avec (7.28) – (7.29) et (7.56), nous concluons que

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma}_* \in L^2(0, T; V'). \quad (7.118)$$

Soit  $t_1, t_2 \in [0, T]$ , d'après (1.6)–(1.12) avec (7.107), (7.23)–(7.24) et (7.32), nous déduisons que

$$\begin{aligned} |\mathbf{D}_*(t_1) - \mathbf{D}_*(t_2)|_H &\leq c(|\varphi_*(t_1) - \varphi_*(t_2)|_W + |\mathbf{u}_*(t_1) - \mathbf{u}_*(t_2)|_V \\ &\quad + |\theta_*(t_1) - \theta_*(t_2)|_W + |\mathbf{P}(t_1) - \mathbf{P}(t_2)|_H), \end{aligned}$$

de la régularité de  $(\mathbf{u}_*, \varphi_*, \theta_*)$  donnée par (7.56) – (7.58) et la régularité (7.32) de  $\mathbf{P}$ , nous impliquons que

$$\mathbf{D}_* \in C(0, T; H).$$

Nous choisissons  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  dans (7.114) avec l'utilisation de (7.107) et (7.42), (7.30) trouvons que

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_*(t) = q_0(t) \quad \forall t \in [0, T].$$

Donc

$$\mathbf{D}_* \in C(0, T; \mathcal{W}). \quad (7.119)$$

Enfin, nous concluons que  $(\mathbf{u}_*, \boldsymbol{\sigma}_*, \varphi_*, \mathbf{D}_*, \theta_*, \beta_*, \alpha_*)$  est une solution faible du problème P4 ayant la régularité (7.56) – (7.60) et (7.117) – (7.119), en ce qui termine la preuve de la partie d'existence du Théorème 7.1.

**Unicité.** L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur  $\Lambda_\eta$  qui est défini par (7.74) – (7.75) et de l'unicité du point fixe de l'opérateur  $\Lambda$  qui est défini par (7.91) – (7.94).  $\square$

# Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous avons traité quelques problèmes de contact avec ou sans frottement entre un corps déformable et une fondation peut être mobile avec diverses lois de contact (compliance normale, adhésion). Nous avons considéré successivement le cas des matériaux électro-viscoélastiques, électro-elasto-viscoplastiques et thermo-électro-viscoélastiques avec ou sans variables internes d'état. Pour certains modèles nous avons pris en considération l'usure des surfaces en contact.

Pour commencer, nous avons proposé des formulations variationnelles des différents modèles de contact. Puis, nous avons obtenu des résultats d'existence et d'unicité de la solution faible. Pour y parvenir, nous avons utilisé des arguments des inéquations variationnelles elliptiques, équations variationnelles d'évolution, inéquations variationnelles de type parabolique et de point fixe. Nous avons considéré une approximation numérique d'un problème de contact, en utilisant une discrétisation temporelle uniforme et une discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis. À l'issue de cette discrétisation, nous avons montré l'existence et l'unicité du problème variationnel approché. Enfin, pour ce schéma, nous avons obtenu un résultat d'estimation de l'erreur sous des hypothèses de régularité de la solution.

Pour continuer le travail accompli dans cette thèse, il serait intéressant de considérer des processus de contact dynamique associé aux différentes lois de contact et de frottement étudiées. L'analyse variationnelle de ces problèmes représente un sujet de recherche ouvert qui mérite d'être abordé dans l'avenir. Le contrôle optimal des modèles de contact présentés dans cette thèse pourrait aussi être étudié. Pour vérifier les estimations de l'erreur ainsi que des simulations numériques basées sur des méthodes performantes seront les bienvenues.



# Bibliographie

- [1] R. A. Adams, Sobolev Spaces, Academi Press, New York, (1975).
- [2] K.T. Andrews, L. Chapman, J.R. Fisackerly, M. Shillor, L. Vanerian and T. Van Houten, A Membrane in Adhesive Contact, SIAM J. Appl. Math. **64** : 152-169, (2003).
- [3] K.T. Andrews and M. Shillor, Dynamic Adhesive Contact of a Membrane, Adv. Math. Sci. Appl. **13** : 343-356, (2003).
- [4] K.T. Andrews, M. Shillor, S. Wright and A. Klarbring, A dynamic thermoviscoelastic contact problem with friction and wear. International journal of engineering science, **35**(14) : 1291-1309, 1997.
- [5] R.C. Batra and J.S. Yang, Saint-Venant's principle in linear piezoelectricity. Journal of Elasticity, **38**(2) : 209-218, 1995.
- [6] P. Bisegna, F. Maceri and F. Lebon, The unilateral frictional contact of a piezoelectric body with a rigid support. In Contact mechanics, pp. 347-354. Springer Publishing, 2002.
- [7] D. Braess, Finite Elements : Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics, third ed, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [8] S.C. Brenner, L.R. Scott, The Mathematical Theory of Finite Element Methods, third ed., Springer-Verlag, New York, 2008.
- [9] H. Brézis, Analyse Fonctionnelle, Théorie et Application, Masson (1987).
- [10] G. Chau, J.R. Fernandez, M. Shillor and M. Sofonea, Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic contact problem with adhesion, J. of comput. and Appl. Math, **159** : 431-465, (2003).

- 
- [11] G. Chau, Shillor and M. Sofonea, Dynamic frictionless contact with adhesion, *J. of Appl Math. and Phys (Zamp)*, **55** : 32-47, (2004).
- [12] P.G. Ciarlet, Basic error estimates for elliptic problems, in : P.G. Ciarlet, J.L. Lions (Eds.), *Handbook of Numerical Analysis*, vol. **II**, North-Holland, Amsterdam, pp. 17–351, 1991.
- [13] M. Cocu and R. Rocca, Existence Results for Unilateral Quasistatic Contact Problems with Friction and Adhesion, *Math. Model. Num. Anal.* **34** : 981-1001, (2000).
- [14] M. Dalah and M. Sofonea, Antiplane frictional contact of electro-viscoelastic cylinders. *Electronic Journal of Differential Equations (EJDE)*[electronic only]. **161** : 1-14 (2007).
- [15] G. Duvant and J.L. Lions, *Inequalities in mechanics and physics*, volume **219**. Springer Science & Business Media, 2012.
- [16] J.R. Fernandez, M. Shillor and M. Sofonea, Analysis and Numerical Simulations of A Dynamic Contact Problem with Adhesion, *Math. Comput. Modelling* **37** : 1317-1333, (2003).
- [17] M. Fremond, Equilibre des structures qui adhèrent à leur support, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **295** : 913-916, (1982).
- [18] M. Fremond, Adhérence des solides, *J. Mécanique et application*, **6(3)** : 323-335, (1987).
- [19] M. Fremond and B. Nedjar, Damage in concret : the unilateral phenomenon, *Nuclear Engng. Design*, **156** : 323-335, (1995).
- [20] M. Fremond and B. Nedjar, Damage, gradient of damage and principle of virtual work, *Int. J. Solid Structures*, **33 (8)** : 1083-1103, (1996).
- [21] M. Fremond, KL. Kuttler, B. Nedjar and M. Shillor, One-dimensional models of damage, *Adv. Math. Sci. Appl*, **8 (2)** : 541-570, (1998).
- [22] M. Frémond, KL. Kuttler and M. Shillor, Existence And Uniqueness of Solutions For a One-Dimensional Damage model, *J. Math. Anal. Appl.* **229** : 271-294, (1999).
- [23] W. Han, M. Shillor and M. Sofonea, Variational and Numerical Analysis of A Quasistatic Viscoelastic Problem with Normal Compliance, Friction and Damage, *J. Comput. Appl. Math.* **137** : 377-398, (2001).

- 
- [24] W. Han, K.L. Kuttler, M. Shillor and M. Sofonea, *Elasti Beam in Adhesive Contact*, *Int. J. Solids Structures* **39** : 1145-1164, (2002).
- [25] W. Han and M. Sofonea, *Evolutionary variational inequalities arising in viscoelastic contact problems*. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **38(2)** : 556-579, 2000.
- [26] W. Han and M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, *Studies in Advanced Mathematics* **30**, Americal Mathematical Society and International Press, 2002.
- [27] T. Ikeda, *Fundamentals of piezoelectricity*. Oxford University Press, Oxford, 1990.
- [28] L. Jianu, M. Shillor and M. Sofonea, *A Viscoelastic Bilateral Frictionless Contact Problem with Adhesion*, *Applic. Anal.* **80** : 233-255, (2001).
- [29] L. Kaki and M. Denche, *Variational analysis for some frictional contact problems*. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matem atica*, **38(7)** : 21-36, 2020.
- [30] Z. Lerguet, M. Shillor and M. Sofonea, *A frictional contact problem for an electroviscoelastic body*. *Electronic Journal of Differential Equations (EJDE)*[electronic only]. **170** : 1-16, 2007.
- [31] F. Maceri and P. Bisegna, *The unilateral frictionless contact of a piezoelectric body with a rigid support*. *Mathematical and Computer Modelling*, **28(4-8)** : 19-28, 1998.
- [32] J.A. C Martins and J.T. Oden, *Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws*. *Nonlinear Analysis TMA*, **11(3)** : 407-428, 1987.
- [33] M.S. Mesai Aoun, *Analyse mathématique de quelques problèmes aux limites en piézoélectricité*. *Mémoire de Magister Université Ouargla* (2013).
- [34] M.S. Mesai Aoun, M. Selmani and A. Azeb Ahmed, *Variational Analysis of a Frictional Contact Problem with Wear and Damage*. *Mathematical Modelling and Analysis* **26(2)** : 170-187, 2021.
- [35] S. Migórski, *Hemivariational inequality for a frictional contact problem in elastopiezoelectricity*. *Discrete Contin, Dyn. Syst. Ser. B* **6** : 1339-1356, 2006.
- [36] J. Nečas, *Les méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*, Masson, Paris (1967).

- 
- [37] J. Nečas and I. Hlavaček, *Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies : An Introduction*, Elsevier, Amsterdam, (1981).
- [38] M. Raous, L. Cangemi and M. Cocu, A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact, *comput. Math Appl. Mech. Ingg*, **177** : 383-399, (1999).
- [39] M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea, Quasistatic viscoelastic contact with normal compliance and friction. *Journal of Elasticity*, **51(2)** : 105-126, 1998.
- [40] M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea, Analysis of A Quasistatic Viscoelastic Problem with Friction and Damage, *Adv. Math. Sci. Appl.* **10** : 173-189, (2002).
- [41] J. Rojek, J.J. Telega, Contact problems with friction, adhesion and wear in orthopaedic biomechanics. I : General developements, *J. Theoretical and Applied Mechanics*, **39** (2001).
- [42] M. Selmani, *Etude mathématique de quelques problèmes aux limites en mécanique du contact*. Thèse de doctorat Université sétif (2006).
- [43] M. Selmani, A piezoelectric frictionless contact problem with adhesion, *Studia Univ. "Babes-Bolai". Mathematica*. Volume **LIV** . Number **2**, June 2009.
- [44] M. Selmani, A dynamic problem with adhesion and damage in electroviscoelasticity with long-term memory. *JIPAM. Journal of Inequalities in Pure & Applied Mathematics [electronic only]*, **10(1)** : 1-19, 2009.
- [45] M. Selmani, Frictional contact problem with wear for electro-viscoelastic materials with long memory. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, **20(3)** : 461-479, 2013.
- [46] M. Selmani, A frictional contact problem involving piezoelectric materials with long memory. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **12(3)** : 1177-1197, 2015.
- [47] M. Selmani and T. Messaoudi, A dynamic frictionless elastic-viscoelastic problem with normal damped response and damage. *Mediterr. J. Math.* **9** : 81-94, 2012.
- [48] M. Selmani and L. Selmani. A dynamic frictionless contact problem with adhesion and damage. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Mathematics*, **55(1)** : 17-34, 2007.
- [49] M. Selmani and L. Selmani, A frictional contact problem with wear and damage for electro-viscoelastic materials. *Applications of Mathematics*, **55(2)** : 89-109, 2010.

- 
- [50] M. Selmani and L. Selmani, On a frictional contact problem with adhesion in piezoelectricity. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **23** (2016), 263–284
- [51] M. Shillor, M. Sofonea and J.J. Telega, *Models and Variational Analysis of quasistatic Contact*, *Lect Notes Phys*, 655, Springer, Berlin Heidelberg, (2004).
- [52] M. Shillor, M. Sofonea and J.J. Telega, Quasistatic viscoelastic contact with friction and wear diffusion. *Quart. Appl. Math*, **62(2)** : 379-399, 2004.
- [53] M. Sofonea, *Problèmes Mathématiques en Elasticité et Viscoplasticité*, Cours de DEA de Mathématiques Appliquées, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand (1991).
- [54] M. Sofonea and R. Arhab, An electro-viscoelastic contact problem with adhesion. *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems Series A*, **14(4)** : 577, 2007.
- [55] M. Sofonea and E. Essou, A piezoelectric contact problem with slip dependent coefficient of friction. *Mathematical Modelling and Analysis*, **9(3)** : 229-242, 2004.
- [56] M. Sofonea and E. Essou, Quasistatic frictional contact of viscoelastic piezoelectric body. *Ad . Math. Sci. Appl*, **14(3)** : 613-631, 2004.
- [57] M. Sofonea, W. Han and M. Shillor, *Analysis and approximation of contact problems with adhesion or damage*. CRC Press, 2006.
- [58] M. Sofonea & A. Matei, *Mathematical Models in Contact Mechanics*, London Mathematical Society Lecture Note Series. **398** (2012), Cambridge University Press, Cambridge.
- [59] M. Sofonea, F. Patrulescu and Y. Souleiman, Analysis of a contact problem with wear and unilateral constraint. *Applicable Analysis*, **95(11)** : 2590-2607, 2016.
- [60] M. Sofonea and Y. Souleiman, Analysis of a sliding frictional contact problem with unilateral constraint. *Mathematics and Mechanics of Solids*, **22(3)** : 324-342, 2015.
- [61] M. Sofonea and Y. Souleiman, A viscoelastic sliding contact problem with normal compliance, unilateral constraint and memory term. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **13** : 2863-2886, 2016.
- [62] Y. Souleiman, *Analyse de quelques problèmes de contact glissant*. Thèse de Doctorat Université de Perpignan via Domitiat (2017).
- [63] B. Souraya and A.A. Abdelaziz, Analysis of a dynamic contact problem for electro-viscoelastic materials. *Milan Journal of Mathematics*, **86(1)** : 105-124, 2018.

- [64] N. Stromberg, Continuum thermodynamics of contact, friction and wear. Ph.D. Thesis. Linköping University, Sweden, 1995.
- [65] N. Stromberg, L. Johansson and A. Klarbring, Derivation and analysis of a generalized standard model for contact, friction and wear. *International Journal of Solids and Structures*, **33(13)** : 1817-1836, 1996.

**Résumé:** Dans cette thèse, nous nous intéressons à la modélisation, l'analyse variationnelle et l'analyse numérique de quelques problèmes de contact, pour des matériaux électro- viscoélastiques, électro- élasto-viscoplastiques ou thermo-électro-viscoélastiques. La première partie rappelle quelques résultats préliminaires, notamment des outils mathématiques et mécaniques nécessaires pour réaliser la suite de ce travail. La deuxième partie est consacrée à l'étude de quatre problèmes de contact sous diverses conditions de contact avec ou sans frottement. Pour chacun de ces problèmes, nous introduisons les formulations fortes et des formulations variationnelles. Ensuite, nous obtenons des résultats d'existence et d'unicité des solutions faibles. Enfin, nous proposons une approximation numérique d'un problème de contact quasi-statique à l'aide de schéma discrétisé. Pour ce schéma, nous obtenons un résultat d'estimation de l'erreur.

**Mots clés:** électro-viscoélastique, électro- élasto-viscoplastiques, thermo-électro-viscoélastique, contact avec ou sans frottement, usure, adhésion, endommagement, compliance normale, mémoire longue, inéquation variationnelle, équation d'évolution, solution faible, point fixe, estimation de l'erreur.

**Abstract:** In this thesis, we are interested in the modeling, the variational analysis and numerical analysis of some contact problems, for electro-viscoelastic, electro-elasto-viscoplastic or thermo-electro-viscoelastic materials. The first part of this thesis concerns some preliminary results, in particular the mathematical and mechanical tools necessary to carry out the continuation of this work. The second part is devoted to the study of four contact problems under various conditions of contact with or without friction. For each of these problems, we introduce strong formulations and variational formulations. Then, we obtain existence and uniqueness results for weak solutions. Finally, we propose a numerical approximation of a quasi-static contact problem using a discretized scheme. For this scheme, we obtain an error estimation result.

**Key words:** electro-viscoelastic, electro-elasto-viscoplastic, thermo-electro-viscoelastic, contact with or without friction, wear, adhesion, damage, normal compliance, long memory, variational inequality, evolution equation, weak solution, fixed point, error estimate.

**ملخص:** في هذه الأطروحة، نهتم بالتمذجة والتحليل التبايري والتحليل العددي لبعض مسائل الاتصال، للمواد الكهرولزجة والمرنة، الكهرولزجة والمرنة البلاستيكية أو الكهرولزجة والمرنة الحرارية. القسم الأول لهذه الأطروحة مخصص لبعض النتائج الأولية، ولا سيما الأدوات الرياضية والميكانيكية اللازمة لاستكمال هذا العمل. القسم الثاني مخصص لدراسة أربع مسائل اتصال تحت شروط اتصال مختلفة مع احتكاك أو بدونه. لكل مسألة من هاته المسائل، نقدم صيغ قوية وصيغ تبايرية. ثم نحصل على نتائج وجود الحلول الضعيفة ووحدايتها. أخيراً، نقترح تقريباً عددياً لمسألة اتصال شبه ساكنة باستخدام مسألة تقطعية. بالنسبة لهذا المسألة، نحصل على نتيجة تقدير الخطأ.

**كلمات مفتاحية:** كهرولزجة مرنة، الكهرولزجة والمرنة البلاستيكية، حرارية كهرو لزجة مرنة، اتصال باحتكاك أو بدونه، ارتداء، تلاصق، اتلاف، توافق ناظمي، ذاكرة طويلة، متراجحة تبايرية، معادلة تحويلية، حل ضعيف، نقطة ثابتة، تقدير الخطأ.