

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED KHIDER BISKRA

FACULTE DES SCIENCES ET DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE

Thèse de DOCTORAT
Spécialité : Electrotechnique

Présentée par
Ahmed CHERIET

**CONTRIBUTION A LA MODELISATION TRIDIMENSIONNELLE
PAR LA METHODE DES VOLUMES FINIS DE DISPOSITIFS
ELECTROMAGNETIQUES**

Soutenue publiquement le 03 novembre 2007 devant le jury :

Président	Salah Eddine ZOUZOU	Professeur, Université de Biskra
Rapporteurs	Souri Mohamed MIMOUNE	Professeur, Université de Biskra
	Mouloud FELIACHI	Professeur, Université de Nantes FRANCE
Examineurs	Mohamed Rachid MEKIDECHE	Professeur, Université de Jijel
	Hassane MOHELLEBI	Maître de Conférences, Université de Tizi-Ouzou
	Abdelhalim TAIEB BRAHIMI	Maître de Conférences, USTO Oran

Liste des travaux concernant le travail de thèse

Publications Internationales

- A. Cheriet**, M. Feliachi, S. M. Mimoune, “Nonconforming mesh generation for finite volume method applied to 3-D magnetic field analysis”, Eur. Phys. Journal App. Phys. EPJAP, Vol. 37, No. 2, pp. 191-195, Feb. 2007.
- A. Cheriet**, S. M. Mimoune, M. Feliachi, “3-D nonlinear magnetostatic field computation with finite volume method by means of M-B iteration”, à apparaître dans la Revue Internationale de Genie Electrique RIGE.

Conférences Internationales

- A. Cheriet**, A. Zaoui, M. Feliachi, S. M. Mimoune, “Computational performance comparison between FVM and FEM for 3-D magnetostatic problems”, NUMELEC’06, 5^{ème} Conférence Européenne sur les Méthodes Numériques en Electromagnétisme, Lille FRANCE, Proc., pp.35-36, Nov. 2006.
- A. Cheriet**, S. M. Mimoune, M. Feliachi, “3-D nonlinear magnetostatic field computation with finite volume method by means of M-B iteration”, NUMELEC’06, 5^{ème} Conférence Européenne sur les Méthodes Numériques en Electromagnétisme, Lille FRANCE, Proc., pp.33-34, Nov. 2006.
- A. Cheriet**, M. Feliachi, S. M. Mimoune, “3-D movement simulation technique in FVM method application to eddy current non-destructive testing”, ISTET’07, XIV International Symposium on Theoretical Electrical Engineering, Szczecin POLAND, Proc., pp.104, Jun. 2007.

Autre

- A. Cheriet**, “La modélisation par les volumes finis en maillage non-conforme de structures électromagnétiques 3-D Application à un problème test de CND par courant de Foucault”, Séminaire du Laboratoire IREENA, Saint Nazaire FRANCE, 15 Février 2007.

REMERCIEMENTS

Ce travail de thèse a été réalisé dans le cadre d'un programme de coopération Franco-algérien PAI-TASSILI. Ce travail a été réalisé aux laboratoires LMSE et LGE de l'Université de Biskra ALGERIE et l'IREENA de Saint Nazaire FRANCE.



Je voudrais tout d'abord exprimer ma profonde gratitude à Monsieur Mouloud FELIACHI, Professeur à l'Université de Nantes, pour la confiance qu'il m'a accordée en m'accueillant au sein de l'IREENA et en acceptant de diriger mes recherches. Ses précieux conseils, ses encouragements ainsi que sa qualité humaine, m'ont permis d'aboutir dans ce travail.

Je tiens à remercier également mon directeur de thèse Monsieur Soury Mohamed MIMOUNE, Professeur à l'Université de Biskra. Il m'a appris la méthode des volumes finis. Je le remercie plus particulièrement pour la confiance qu'il m'a accordée dès mon travail de Magister.

Je tiens à adresser mes plus sincères remerciements aux membres du jury :

Monsieur Salah Eddine ZOUZOU, Professeur à l'Université de Biskra, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de ma thèse.

Monsieur Mohamed Rachid MEKIDECHE, Professeur à l'Université de Jijel, pour avoir accepté de juger ma thèse.

Monsieur Hassane MOHELLEBI, Maître de Conférences à l'Université de Tizi-Ouzou, pour avoir accepté de participer à mon jury.

Monsieur Abdelhalim TAIB BRAHIMI, Maître de Conférences à l'Université USTO d'Oran, pour avoir accepté d'être dans mon jury.

Mes remerciements vont aussi à tous mes collègues de travail au sein de l'équipe Interaction Onde Matière du laboratoire IREENA. Je tiens à remercier particulièrement Madame Françoise HATE pour sa serviabilité.

Un dernier mot de remerciement va pour le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique du gouvernement Algérien, pour m'avoir accordé le financement de mon séjour de 18 mois à l'IREENA sans lequel cette thèse n'aurait pas pu voir le jour.

DEDICACES

A ma femme, A ma fille, A ma sœur

TABLE DES MATIERES

Listes des figures et tableaux	1
Introduction générale	5
Chapitre I. Modélisation des problèmes électromagnétiques : généralités	
I.1. Introduction	8
I.2. Les modèles considérés	9
I.2.1. Equations de Maxwell	9
I.2.2. Hypothèses simplificatrices	10
I.2.3. Modèle magnétostatique linéaire	10
I.2.3.1. Formulations de la magnétostatique	11
I.2.3.2. Formulation en potentiel vecteur magnétique	11
I.2.4. Modèle magnétodynamique	13
I.2.4.1. Formulations de la magnétodynamique	14
I.2.4.2. Formulation en potentiels $\mathbf{A} - V$	15
I.2.5. Prise en compte de la non linéarité magnétique	16
I.2.5.1. Méthodes existantes	16
I.2.5.2. Formulation magnétostatique non linéaire en potentiel \mathbf{A}	18
I.3. Méthodes numériques de discrétisation	19
I.3.1. Principales méthodes existantes	19
I.3.2. La méthode des volumes finis MVF	19
I.4. Conclusion	20
Chapitre II. Mise en œuvre de la méthode des volumes finis	
II.1. Introduction	21
II.2. Discrétisation géométrique	21
II.3. Discrétisation des formulations électromagnétiques	23
II.3.1. Discrétisation de la formulation magnétostatique	23
II.3.1.1. Intégration de $\nabla \times (\mathbf{v} \nabla \times \mathbf{A})$	23
II.3.1.2. Intégration de $\nabla (\mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{A})$	26
II.3.1.3. Intégration du terme source	27
II.3.1.4. Construction du système matriciel	27
II.3.2. Discrétisation de la formulation magnétodynamique	28
II.3.2.1. Intégration de $\sigma(\mathbf{A} + \nabla v)$	28
II.3.2.2. Intégration de l'équation divergence	29
II.3.2.3. Construction du système matriciel	30
II.3.3. Reluctivité et conductivité à l'interface entre milieux différents	31
II.3.4. Implémentation de la technique $\mathbf{M} - \mathbf{B}$	33

II.4. Maillage d'un problème type	34
II.5. Résolution de systèmes d'équations linéaires	36
II.6. Algorithme du code de calcul	37
II.7. Conclusion	38

Chapitre III. Génération de maillage non-conforme et prise en compte du déplacement

III.1. Introduction	40
III.2. Génération de maillage non-conforme dans la MVF	41
III.2.1. Décomposition du domaine	41
III.2.2. Méthode de connexion	42
III.2.3. Algorithme	46
III.3. Prise en compte du déplacement des parties mobiles	49
III.3.1. Remaillage partiel	49
III.3.2. Bande du mouvement	50
III.3.3. Surface de glissement	51
III.3.4. Multiplicateurs de Lagrange	52
III.3.5. Méthodes d'interpolations	52
III.4. Simulation du déplacement avec le maillage non-conforme	53
III.5. Conclusion	55

Chapitre IV. Tests et validations : problèmes Workshop

IV.1. Introduction	57
IV.2. Magnétostatique linéaire	58
IV.2.1. Le problème IEEJ standard	58
IV.2.1.1. Description du problème	59
IV.2.1.2. Modélisation avec maillage standard	59
IV.2.1.2.1. Maillage	59
IV.2.1.2.2. Résultats	61
IV.2.1.3. Modélisation avec maillage non-conforme	65
IV.2.1.3.1. Maillage	65
IV.2.1.3.2. Résultats	66
IV.2.2. Le problème IEEJ avec armature	69
IV.2.2.1. Description du problème	69
IV.2.2.2. Modélisation avec maillage standard	69
IV.2.2.2.1. Maillage	70
IV.2.2.2.2. Résultats	71
IV.2.2.3. Modélisation avec maillage non-conforme	73
IV.2.2.3.1. Maillage	73
IV.2.2.3.2. Résultats	74
IV.3. Magnétostatique non linéaire : problème TEAM#13	77
IV.3.1. Description du problème	77
IV.3.2. Maillage	78

IV.3.3. Résultats	80
IV.3.4. Effet du terme de relaxation λ	83
IV.4. Magnétodynamique : problème JSAEM#6	86
IV.4.1. Description du problème	86
IV.4.2. Modélisation avec maillage standard	87
IV.4.2.1. Maillage	87
IV.4.2.2. Résultats	87
IV.4.3. Modélisation avec maillage non-conforme : simulation du déplacement	92
IV.4.3.1. Maillage	92
IV.4.3.2. Résultats	93
IV.5. Conclusion	97
Conclusion générale	99
Annexes	
Annexe A. Comparaison entre la MEF et la MVF	101
Annexe B. Choix du solveur	104
Annexe C. Effet de la zone N-C	106
Bibliographie	108

LISTE DES FIGURES

Fig.I.1. Problème type à modéliser	8
Fig.I.2. Schématisation d'un plan de symétrie	12
Fig.II.1. Volume élémentaire D_p	22
Fig.II.2. Types de maillages réalisés, vue 2D	22
Fig.II.3. Approximation linéaire du potentiel à travers la facette n	24
Fig.II.4. Illustration des nœuds fictifs	25
Fig.II.5. Volume élémentaire à l'interface entre deux milieux différents	32
Fig.II.6. Organigramme de l'algorithme M – B	33
Fig.II.7. Disposition des objets dans un maillage, vue 2D	35
Fig.II.8. Organigramme de l'algorithme du code de calcul	38
Fig.III.1. Maillage 3D en éléments hexaédriques	40
Fig.III.2. Construction du maillage non-conforme	41
Fig.III.3. Types de la zone non-conforme	42
Fig.III.4. Illustration des nœuds de la zone non-conforme	43
Fig.III.5. Nœud $\textcircled{1}$ sur la surface Γ_1 dans le cas d'une non-conformité 3D	44
Fig.III.6. Différentes sous matrices de connexions de la zone N-C	46
Fig.III.7. Algorithme de génération de maillage 3D non-conforme	47
Fig.III.8. Technique de remaillage partiel	50
Fig.III.9. Technique de la bande de mouvement	51
Fig.III.10. Technique de la ligne de glissement	52
Fig.III.11. Après un déplacement de δx du maillage mobile (Ω_1)	53
Fig.III.12. Plusieurs positions du maillage mobile	54
Fig.III.13. Prise en compte du déplacement dans l'algorithme	55
Fig.IV.1. Schéma descriptif du code MVF3D	57
Fig.IV.2. Description du problème IEEJ standard	59
Fig.IV.3. Description de la boîte d'air du problème IEEJ standard, $N_t = 91035$	60
Fig.IV.4. Maillage du dispositif IEEJ standard	60
Fig.IV.5. Conformité du maillage standard dans le plan x - y	60
Fig.IV.6. Composante z de l'induction magnétique pour $y = 6.25\text{mm}$ et $z = 110\text{mm}$, $N_t = 91035$	61
Fig.IV.7. Composante z de l'induction magnétique pour $y = 6.25\text{mm}$ et $z = 110\text{mm}$, $N_t = 42025$	62
Fig.IV.8. Distribution de l'induction magnétique dans le plan x - z , y : centre du noyau	63
Fig.IV.9. Distribution de l'induction magnétique dans le plan a - a'	63

Fig.IV.10. Composante z de l'induction dans le plan x - y , z : centre du noyau	64
Fig.IV.11. Distribution des vecteurs de l'induction en 3D, formulation AG	64
Fig.IV.12. Définition de la zone non-conforme	65
Fig.IV.13. Maillage non-conforme du problème IEEJ standard, $N_t = 49275$	66
Fig.IV.14. Non-conformité du maillage dans le plan x - y	66
Fig.IV.15. Comparaison de la composante z de l'induction magnétique obtenue avec les deux types de maillage et celle mesurée pour $y = 6.25\text{mm}$ et $z = 110\text{mm}$	67
Fig.IV.16. Distribution de l'induction magnétique obtenue avec maillage N-C pour y : centre du noyau	68
Fig.IV.17. Description du problème IEEJ avec armature	69
Fig.IV.18. Description de la boîte d'air du problème IEEJ avec armature, $N_t = 189771$	70
Fig.IV.19. Maillage du dispositif IEEJ avec armature	70
Fig.IV.20. Composante z de l'induction magnétique pour y : centre du noyau et z : centre du noyau, maillage standard	71
Fig.IV.21. Distribution de l'induction magnétique dans le plan x - z pour y : centre du noyau	72
Fig.IV.22. Composante z de l'induction magnétique	72
Fig.IV.23. Zone non-conforme dans le problème IEEJ avec armature	73
Fig.IV.24. Maillage non-conforme du problème IEEJ avec armature, $N_t = 150436$	74
Fig.IV.25. Composante z de l'induction magnétique pour y : centre du noyau et z : centre du noyau, maillage N-C	75
Fig.IV.26. Zoom de la zone N-C	75
Fig.IV.27. Distribution de l'induction magnétique avec maillage non-conforme dans le plan x - z pour y : centre du noyau	76
Fig.IV.28. Description du problème TEAM#13	77
Fig.IV.29. Caractéristique $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ de l'acier utilisé dans TEAM#13	78
Fig.IV.30. Boîte d'air du TEAM#13, $N_t = 243712$	79
Fig.IV.31. Maillage 3D du dispositif TEAM#13	79
Fig.IV.32. Vue du haut du maillage	79
Fig.IV.33. Induction magnétique dans les différentes parties de l'acier	80
Fig.IV.34. Distribution des vecteurs de l'induction magnétique dans le plan x - z	82
Fig.IV.35. Colormap 3D des composantes de \mathbf{B} dans les trois parties de l'acier	83
Fig.IV.36. Induction magnétique pour les différentes valeurs de λ	84
Fig.IV.37. Convergence de l'algorithme $\mathbf{M} - \mathbf{B}$ pour $\lambda = 1$	85
Fig.IV.38. Description du problème JSAEM#6	86
Fig.IV.39. Maillage 3D du problème JSAEM#6, $N_t = 26624$	87
Fig.IV.40. Densité des courants induits dans la plaque saine	88

Fig.IV.41. Densité des courants induits dans la plaque fissurée	88
Fig.IV.42. Colormap 3D des potentiels A et v : plaque saine	90
Fig.IV.43. Colormap 3D des potentiels A et v : plaque fissurée	91
Fig.IV.44. Introduction de la zone non-conforme dans JSAEM#6	92
Fig.IV.45. Maillage non-conforme du problème JSAEM#6 : position initiale	92
Fig.IV.46. Vue de face (plan $x-z$)	93
Fig.IV.47. Vue de haut (plan $x-y$)	93
Fig.IV.48. Variation de la résistance en la présence de la fissure, lift-off = 0.5mm	94
Fig.IV.49. Variation de la réactance en la présence de la fissure, lift-off = 0.5mm	94
Fig.IV.50. Variation de la résistance en la présence de la fissure, lift-off = 1mm	95
Fig.IV.51. Variation de la réactance en la présence de la fissure, lift-off = 1mm	95
Fig.IV.52. Densité des courants induits dans la plaque saine après un déplacement de 4mm de la bobine	96
Fig.IV.53. Densité des courants induits dans la plaque fissurée après un déplacement de 4mm de la bobine	96
Fig.IV.54. Signature de la fissure obtenue avec le code MVF3D	97
Fig.A.1. Maillage du problème IEEJ standard avec les deux méthodes	101
Fig.A.2. Structures des deux matrices	101
Fig.A.3. Comparaison de la composante z de l'induction magnétique	102
Fig.B.1. Convergence de quelques solveurs itératifs	105
Fig.C.1. Composante z de l'induction magnétique pour les deux cas extrêmes de l'épaisseur de la zone N-C	107

LISTE DES TABLEAUX

Tableau.IV.1. Données du calcul du problème IEEJ standard	62
Tableau.IV.2. Données du calcul des deux types de maillage	67
Tableau.IV.3. Données du calcul du problème IEEJ avec armature	71
Tableau.IV.4. Données du calcul des deux types de maillage	76
Tableau.IV.5. Données du calcul de TEAM#13	81
Tableau.IV.6. Nombre d'itérations $\mathbf{M}-\mathbf{B}$ pour quelques valeurs de λ	84
Tableau.IV.7. Données du calcul du problème JSAEM#6	89
Tableau.IV.8. Caractéristiques de convergence du solveur BICGSTAB	96
Tableau.A.1. Données du calcul des deux méthodes	102
Tableau.B.1. Caractéristiques de convergence des différents solveurs	104
Tableau.C.1. Effet de l'épaisseur de la zone N-C sur la précision de calcul	106

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

La modélisation des systèmes électromagnétiques est un outil indispensable pour l'analyse, la prédiction de comportement et l'optimisation des dispositifs ; elle aide à réduire au minimum le temps et le coût de conception. Dans ce contexte, le but des outils numériques est de garantir des résultats précis de la simulation avec le moindre coût en terme de temps de calcul et de consommation de mémoire. De nos jours, beaucoup d'outils de simulation basés sur les méthodes numériques de discrétisation sont disponibles. Généralement, c'est la méthode des éléments finis MEF qui est employée. Cette technique a montré son efficacité dans plusieurs travaux de modélisation. Néanmoins, on peut trouver d'autres méthodes numériques dont l'exploitation est prometteuse, tel que la méthode des volumes finis MVF. Plusieurs travaux se sont intéressés à la comparaison entre les méthodes MVF et MEF dans divers problèmes de la physique. Concernant les problèmes d'électrotechnique, on trouve peu de travaux de comparaison, tels que par exemple [Cheriet 06^a] et [Dong 05]. Par rapport aux éléments finis, la méthode des volumes finis se montre très prometteuse du point de vue rapidité de calcul. Dans ce travail de thèse, on s'intéresse au développement d'outils numériques destinés à la modélisation des problèmes d'électrotechnique. La méthode des volumes finis est choisie comme méthode de discrétisation, elle a l'avantage de simplicité de développement, nécessitant un modeste bagage mathématique.

Le principe de la MVF consiste dans un premier temps à découper la géométrie d'étude en volumes élémentaires ; en 3D ces volumes peuvent être des tétraèdres, prismes ou hexaèdres. Dans les applications de génie électrique on trouve souvent l'élément hexaédrique associé à la MVF. En effet, l'élément hexaédrique est avantageux par rapport aux autres éléments en termes de temps de calcul et précision [Nakata 90], [Muramatsu 91] et [Kovalev 05].

Quand on s'intéresse à une loi de conservation, les valeurs numériques dans chaque volume fini ou cellule peuvent être vues comme des approximations de valeurs moyennes sur la cellule. Ainsi, il suffit de construire des fonctions donnant des approximations de ce qui passe d'une cellule à ses voisins. Automatiquement, la méthode est conservative, ce qui sort d'une cellule rentre exactement dans sa voisine.

Historiquement, la MVF prend son origine dans les problèmes de la mécanique des fluides. Elle a ensuite été appliquée à la solution des équations de Maxwell, dans le domaine de la propagation d'ondes, depuis le début des années quatre vingt dix [Baumann 06]. En 2001 la MVF est présentée comme une nouvelle méthode pour la résolution de problèmes d'électrotechnique, il s'agit de calcul des courants induits [Cheriet 01] et [Yaoqin 01]. Par la suite, la méthode est appliquée pour la solution de problèmes magnétostatiques linéaires [Zou 04^a].

Ensuite, nous avons appliquée la MVF à la résolution des problèmes magnétostatiques non linéaires [Cheriet 06^b]. Pour traiter la non linéarité plusieurs techniques itératives peuvent être employées. L'idée fondamentale est toujours de remplacer le problème non linéaire par une série de problèmes linéaires. Dans la littérature, on rencontre souvent la méthode de Newton-Raphson. Son avantage principal est d'atteindre le voisinage de la solution en un nombre réduit d'itérations. Cependant, la convergence est fortement liée à la phase d'initialisation, en outre, dans certains cas, un facteur optimal de relaxation, cher en temps CPU, est exigé [Neagoe 94]. La technique $\mathbf{M}-\mathbf{B}$, qui utilise l'aimantation \mathbf{M} et la caractéristique non linéaire $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ du matériau, offre une bonne stabilité de calcul et la convergence est garantie quelques soit la valeur d'initialisation de l'inconnue [Kurz 97].

Notre travail alors s'inscrit dans le cadre de la modélisation des problèmes d'électrotechnique dans le cas tridimensionnel utilisant la méthode des volumes finis. Nos principales contributions dans ce travail de thèse sont les suivantes :

- L'analyse des problèmes magnétostatiques non linéaires avec la technique $\mathbf{M}-\mathbf{B}$.
- La génération du maillage non-conforme dont l'équation de connexion est basée sur une technique d'interpolation bilinéaire.
- La prise en compte du déplacement des parties mobiles à partir du développement et l'adaptation d'un maillage non-conforme.

Cette thèse a été structurée en quatre chapitres :

Le premier chapitre consiste dans un premier temps à rappeler les lois fondamentales de l'électromagnétisme qui sont gouvernées par les quatre équations de Maxwell et les relations complémentaires qui décrivent le comportement des milieux considérés. On se placera dans l'hypothèse de l'électrotechnique et on considère des fréquences inférieures à quelques MHz. Sont aussi rappelés les modèles de la magnétostatique et de la magnétodynamique issus du système de Maxwell. Les principales formulations existantes qui permettent la représentation de ces modèles en vue de la modélisation sont ensuite citées ; nous insistons sur les formulations en potentiels \mathbf{A} et $\mathbf{A}-\mathbf{V}$. On rappelle le problème de l'unicité de la solution et l'introduction de la jauge de Coulomb. Sont évoquées aussi les techniques les plus rencontrées dans le traitement de la non linéarité des régions ferromagnétiques ; et seule la méthode dite $\mathbf{M}-\mathbf{B}$ qui nous intéresse est détaillée. Enfin, on donne un aperçu sur les principales méthodes numériques de discrétisations.

Le deuxième chapitre est consacré à la mise en œuvre tridimensionnelle de la méthode des volumes finis ; c'est le passage du domaine continu au domaine discret. Nous avons appliqué la méthode des volumes finis aux équations aux dérivées partielles établies au premier chapitre. Les formes discrétisées correspondantes sont implémentées dans un algorithme selon deux types de maillage ; régulier et irrégulier avec progression logarithmique. Nous avons distingué deux différentes dispositions dans le maillage pour les objets constituant le problème à modéliser ; cela se fait en fonction de la nature de

l'interface objet/air. Deux types de solveurs : Gauss Seidel et gradient conjugué, sont employés.

Dans le troisième chapitre nous avons introduit deux nouveaux aspects dans la modélisation par les volumes finis des problèmes d'électrotechnique ; la génération de maillage non-conforme et la prise en compte du déplacement des parties mobiles. Dans un premier temps, nous insistons sur l'intérêt de la technique du maillage non-conforme pour les problèmes nécessitant un maillage localement raffiné ou la prise en compte du déplacement. En effet, cette technique est basée essentiellement sur l'utilisation de deux méthodes, la première est la décomposition de domaine et la deuxième est l'interpolation bilinéaire. La mise en œuvre de la méthode des volumes finis sur un maillage non-conforme, permet de décomposer la matrice globale du système obtenue par une méthode standard en sous matrices de tailles inférieurs et qui peuvent être résolus plus rapidement. Ensuite, nous nous intéressons à la prise en compte du déplacement des parties mobiles. Nous avons cité les méthodes les plus rencontrées dans la bibliographie. Le choix du maillage non-conforme qui nécessite une généralisation de l'algorithme de l'interpolation bilinéaire pour différentes positions, permet facilement de prendre un pas de déplacement quelconque et indépendant des pas du maillage.

Dans le quatrième chapitre le code de calcul MVF3D, développé sous l'environnement Matlab, est présenté. Ce code intègre les trois modèles volumes finis, magnétostatique linéaire, magnétostatique non linéaire et magnétodynamique. Le mailleur associé génère trois types de maillage : régulier, irrégulier avec progression logarithmique et non-conforme. Cependant, la prise en compte du déplacement dans le cas d'un maillage non-conforme est considérée. L'objectif de ce dernier chapitre consiste à valider le code MVF3D. Pour cette raison, nous avons choisi quelques cas tests internationaux destinés à comparer et valider les codes de calcul des champs électromagnétiques. Ces problèmes de Workshop sont souvent rencontrés dans la littérature.

Chapitre I.

MODELISATION DES PROBLEMES

ELECTROMAGNETIQUES : GENERALITES

I.1. Introduction	8
I.2. Les modèles considérés	9
I.2.1. Equations de Maxwell	9
I.2.2. Hypothèses simplificatrices	10
I.2.3. Modèle magnétostatique linéaire	10
I.2.3.1. Formulations de la magnétostatique	11
I.2.3.2. Formulation en potentiel vecteur magnétique	11
I.2.4. Modèle magnétodynamique	13
I.2.4.1. Formulations de la magnétodynamique	14
I.2.4.2. Formulation en potentiels $\mathbf{A} - \mathbf{V}$	15
I.2.5. Prise en compte de la non linéarité magnétique	16
I.2.5.1. Méthodes existantes	16
I.2.5.2. Formulation magnétostatique non linéaire en potentiel \mathbf{A}	18
I.3. Méthodes numériques de discrétisation	19
I.3.1. Principales méthodes existantes	19
I.3.2. La méthode des volumes finis MVF	19
I.4. Conclusion	20

I.1. Introduction

Dans ce travail de thèse, nous nous sommes intéressés à la modélisation des systèmes magnétostatiques linéaires, magnétostatiques non linéaires et magnétodynamiques. Un problème de modélisation peut être schématisé par un modèle type composé de l'air, de matériau magnétique linéaire, de matériau conducteur et de source de courant électrique (Fig.I.1). La non linéarité d'un milieu dû à la saturation magnétique est représentée par le terme $\mu(\mathbf{H})$. L'ensemble de ce système forme le domaine de calcul Ω de frontière Γ .

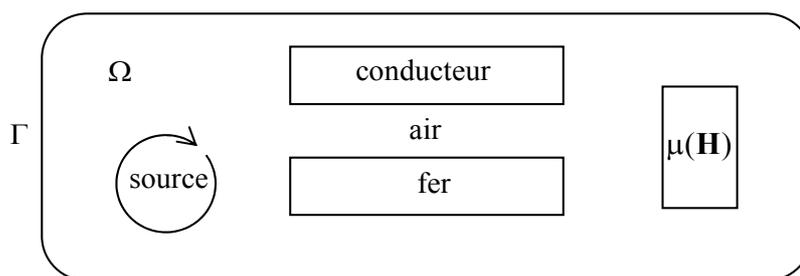


Fig.I.1. Problème type à modéliser

Ce premier chapitre se décompose en trois parties.

La première partie rappelle brièvement les lois fondamentales de l'électromagnétisme qui sont les célèbres quatre équations de Maxwell et les relations complémentaires qui décrivent le comportement des milieux considérés. Sont aussi rappelés les modèles de la magnétostatique et magnétodynamique issus du système de Maxwell. Enfin de cette première partie, les principales formulations existantes qui permettent la représentation de ces modèles en vue de la modélisation seront introduites.

Dans la deuxième partie sont évoquées les techniques les plus rencontrées dans le traitement de la non linéarité des régions ferromagnétiques ; et seule la méthode dite **M–B** qui nous intéresse est détaillée.

La troisième et dernière partie décrit le passage du domaine continu au domaine discret : méthodes numériques de discrétisations.

I.2. Les modèles considérés

I.2.1. Equations de Maxwell

L'ensemble des phénomènes électromagnétiques peut être décrit par six grandeurs qui dépendent, dans le cas général, du temps et de l'espace.

Deux grandeurs vectorielles magnétiques

H : Champ magnétique (A/m)

B : Induction magnétique (T)

Trois grandeurs vectorielles électriques

E : Champ électrique (V/m)

D : Induction électrique (C/m²)

J : Densité de courant électrique de conduction (A/m²)

Et la sixième, la densité de charges électriques libres ρ (C/m³).

J. C. Maxwell (1831-1879) a réuni ces grandeurs sous la forme de quatre équations dites lois fondamentales de l'électromagnétisme :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{I.1})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{I.2})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{I.3})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (\text{I.4})$$

Dans (I.2), le terme $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ exprime la densité des courants de déplacement.

Combinant (I.2) et (I.4), nous obtenons l'équation de conservation de charges électriques :

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.5})$$

Afin de calculer l'évolution des champs électriques et magnétiques, les lois constitutives et qui sont caractéristiques des milieux considérés doivent être ajoutées. En l'absence de vitesse mécanique de déplacement, ces relations sont données par :

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (\text{I.6})$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{I.7})$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (\text{I.8})$$

Les coefficients μ , σ et ε sont respectivement, la perméabilité magnétique, la conductivité électrique et la permittivité électrique. Dans un problème de modélisation, ces coefficients doivent être définies dans les différentes zones du domaine considéré. Dans l'air, par exemple, ces coefficients valent respectivement μ_0 , 0 et ε_0 . Souvent, dans les matériaux linéaires, ces coefficients sont des scalaires constants. Ils dépendent dans des cas particuliers de l'intensité des champs appliqués. Dans ce travail de thèse seule la non linéarité :

$$\mu = \mu(\mathbf{H}) \quad (\text{I.9})$$

Qui est due à la saturation magnétique est prise en considération.

I.2.2. Hypothèses simplificatrices

On se placera dans l'hypothèse de l'électrotechnique et on considère des fréquences inférieures à quelques MHz [Louai 95] et [Emmanuel 99] :

- On peut négliger le terme des courants de déplacement dans (I.2)
- Dans la plupart des travaux de modélisation les sources d'alimentation sont supposées produites par un générateur de courant parfait (\mathbf{J}_s), ainsi on peut décomposer le courant total \mathbf{J} comme suit :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \sigma \mathbf{E} \quad (\text{I.10})$$

Dans cette équation la conductivité σ doit être définie dans toutes les régions conductrices à l'exception des régions sources.

I.2.3. Modèle magnétostatique linéaire

En absence de la variation temporelle des champs magnétiques, on est amené à résoudre le modèle de la magnétostatique donné par le couple d'équations :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s \quad (\text{I.11})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{I.12})$$

Dans (I.11), \mathbf{J}_s représente la densité du courant source. On considère que les milieux sont linéaires ($\mu = \text{cste}$), on ajoute à ces deux équations la loi constitutive suivante :

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (\text{I.13})$$

Les équations (I.11), (I.12) et (I.13) constituent ce qu'on appelle le modèle des problèmes magnétostatiques linéaires. Plusieurs formulations ont été développées en vue de sa modélisation. Par la suite nous allons citer les plus utilisées.

I.2.3.1. Formulations de la magnétostatique

Le modèle de la magnétostatique issu du système de Maxwell fait apparaître deux variables \mathbf{B} et \mathbf{H} . Suivant le type du problème étudié, différentes formulations permettant de calculer la distribution des champs, peuvent être utilisées. De nombreuses formulations ont déjà été développées en deux ou en trois dimensions. Elles s'écrivent en terme de potentiel scalaire [Peng 84], en potentiel scalaire réduit [Sawa 90] ou en potentiel vecteur magnétique [Demerdash 90].

D'autres utilisent l'induction magnétique \mathbf{B} comme inconnue. Dans un problème de calcul de champ créé par une bobine dans l'air et sans la présence de matériaux ferromagnétiques, la formulation en \mathbf{B} est supérieure à celle en potentiel du point de vue précision [Shaikh 88].

Une formulation mixte utilisant comme inconnues les deux grandeurs \mathbf{B} et \mathbf{H} a prouvé son efficacité dans les problèmes magnétostatiques linéaires, surtout quand il s'agit d'un saut important de la perméabilité d'un milieu à un autre [Alotto 98]. L'idée principale de cette formulation consiste à minimiser le résidu de la relation constitutive (I.13) et à considérer les deux équations (I.11) et (I.12) comme des contraintes à respecter. La résolution de tel problème, nécessite l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange afin de transformer le problème posé en un problème sans contrainte. Cependant, il est à noter que la méthode aboutit à un système matriciel global avec des inconnues supplémentaires : les multiplicateurs de Lagrange. Une autre formulation, moins utilisée dans la bibliographie, est celle qui utilise le champ magnétique \mathbf{H} comme variable d'état [Kanayama 90].

La formulation la plus générale est celle en potentiel vecteur magnétique. Elle est très commode quand il s'agit des problèmes avec des régions multiples connexes et contenant plusieurs sources [Yun 97]. Dans le but de développer un code de calcul possédant un caractère général pour la résolution des problèmes magnétostatiques, nous avons opté pour cette formulation.

I.2.3.2. Formulation en potentiel vecteur magnétique

Compte tenu de l'équation (I.12), l'induction magnétique \mathbf{B} peut être exprimée comme suit :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{I.14})$$

On appelle \mathbf{A} le potentiel vecteur magnétique. La combinaison des équations (I.11), (I.13) et (I.14), conduit à la formulation magnétostatique en potentiel \mathbf{A} :

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J}_s \quad (\text{I.15})$$

Où ν est la reluctivité magnétique (inverse de μ). La résolution de (I.15) nécessite la connaissance des conditions aux limites relatives au domaine d'étude. Une condition aux limites usuelle est d'imposer un champ magnétique nul sur la surface extérieure Γ . Dans le calcul, on impose alors :

$$\mathbf{A} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (\text{I.16})$$

Cette condition est dite condition de type Dirichlet. En présence d'un plan de symétrie, une autre condition dite de Newman peut être utilisée :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_s \quad (\text{I.17})$$

Où Γ_s est le plan de symétrie de vecteur unitaire normal \mathbf{n} (Fig.I.2).

En effet la connaissance des conditions aux limites n'est pas suffisante pour avoir la solution du problème. Si \mathbf{A} est solution de (I.15), alors il existe une infinité de solutions données par la forme :

$$\mathbf{A} + \nabla \phi \quad (\text{I.18})$$

Où ϕ est une grandeur scalaire quelconque.

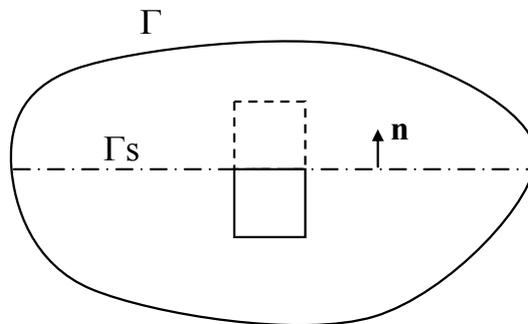


Fig.I.2. Schématisation d'un plan de symétrie

L'unicité du potentiel vecteur magnétique doit être assurée par l'utilisation d'une jauge. Dans la pratique, selon la méthode numérique de discrétisation utilisée, forcer la solution d'être unique peut entraîner des instabilités numériques dans le processus de calcul [Demerdash 90] et [Golovanov 97]. Dans d'autres cas, des difficultés numériques peuvent avoir lieu si on ne considère pas la jauge [Biro 96].

En effet le problème de jauge est largement évoquée dans la méthode des éléments finis et à notre connaissance, l'effet de la jauge n'est pas encore discuté dans la méthode des

volumes finis. Dans la littérature, on trouve que la jauge de Coulomb est la plus couramment utilisée [Fetzer 97] :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (\text{I.19})$$

L'introduction de la jauge de Coulomb dans la formulation (I.15) assure l'unicité de la solution du potentiel vecteur magnétique et par conséquent conduit à une meilleure stabilité numérique [Coulomb 81] et [Preis 91]. Il est recommandé d'introduire la jauge de Coulomb par pénalité à travers le terme $\nabla(\nu_p \nabla \cdot \mathbf{A})$ [Nath 93]. Dans ce cas, la formulation jaugée est donnée par l'équation :

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) - \nabla(\nu_p \nabla \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{J}_s \quad (\text{I.20})$$

Cela est démontré aussi par Biro dans [Biro 89]. Afin d'avoir une meilleure approximation du potentiel, le terme ajouté ν_p est remplacé par la reluctivité ν du domaine [Fetzer 96], alors on obtient :

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) - \nabla(\nu \nabla \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{J}_s \quad (\text{I.21})$$

On appelle cette équation : la formulation en potentiel vecteur magnétique jaugée.

I.2.4. Modèle magnétodynamique

Tenant compte des hypothèses simplificatrices, le modèle de la magnétodynamique issu des équations de Maxwell s'écrit :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{I.22})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (\text{I.23})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{I.24})$$

Avec

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (\text{I.25})$$

Pour définir complètement le problème de la magnétodynamique, il est encore nécessaire de considérer les relations constitutives des milieux.

I.2.4.1. Formulations de la magnétodynamique

Plusieurs formulations ont été développées pour représenter le modèle de la magnétodynamique en vue de sa modélisation. Les principales formulations rencontrées peuvent être classées en deux grandes familles [Abakar 01] :

- Formulations de type électrique : \mathbf{E} , \mathbf{A} et $\mathbf{A}-V$
- Formulations de type magnétique : \mathbf{H} et $\mathbf{T}-\Phi$

La formulation en champ électrique \mathbf{E} [Boussavit 90], est obtenue en dérivant par rapport au temps l'équation (I.23) et la combinant avec la relation (I.6). Cette formulation n'est pas utilisable dans tous les cas. Selon le problème étudié et la méthode de discrétisation utilisée, elle nécessite certain traitement [Abakar 01].

A l'heure actuelle, la formulation qui reste attractive surtout quand il s'agit des problèmes de calcul des courants induits en dimension 3, est la formulation en potentiels $\mathbf{A}-V$ (V : potentiel scalaire électrique) [Pascal 03] et [Kanayama 06]. Egalement, la formulation en \mathbf{A} a été introduite par plusieurs auteurs tel que par exemple dans [Kanayama 03]. Dans ces travaux, Kanayama a montré que la convergence des solveurs itératifs, est plus rapide avec le potentiel scalaire V que sans lui.

Dans les problèmes de la magnétodynamique, la formulation en \mathbf{H} a fait l'objet de plusieurs travaux. Etudiée par Boussavit et Vérité dans [Boussavit 83], cette formulation a été intégrée dans le code de calcul éléments finis TRIFOU pour l'étude des courants de Foucault.

Il faut noter que dans l'ensemble des travaux cités ci-dessus, c'est la méthode des éléments finis MEF qui a été employée comme technique de discrétisation. En effet, les travaux de modélisation des problèmes de l'électrotechnique sont très peu étudiés par la méthode des volumes finis (MVF). Dans [Yaoqin 01] et [Yaoqin 02], Yaoqin a utilisé la formulation $\mathbf{T}-\Phi$ (\mathbf{T} : potentiel vecteur électrique, Φ : potentiel scalaire magnétique) pour le calcul de la distribution des courants induits dans une plaque conductrice. Dans ces deux articles, l'auteur a montré l'efficacité de la MVF dans le domaine de calcul des courants induits.

Dans ce travail de thèse, nous avons opté pour la formulation la plus générale $\mathbf{A}-V$. Certains reportent l'inconvénient de cette formulation dans le cas 3D, par le nombre élevé des inconnues (A_x, A_y, A_z, V). A nos jours, avec les progrès des calculateurs (vitesse, mémoires ...) et aussi l'apparition des nouvelles méthodes comme la parallélisation des codes de calcul, la résolution algébrique multiniveaux ou bien la méthode de décomposition des domaines, ce problème n'est plus posé.

I.2.4.2. Formulation en potentiels $\mathbf{A} - V$

En tenant compte de la relation (I.14) du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} , la remplaçant dans (I.1) on trouve :

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{I.26})$$

Cette forme nous permet de définir un potentiel scalaire électrique V , tel que :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \quad (\text{I.27})$$

Combinant les équations (I.6), (I.10), (I.14), (I.23) et (I.27) nous obtenons :

$$\nabla \times (\mathbf{v} \nabla \times \mathbf{A}) + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) = \mathbf{J}_s \quad (\text{I.28})$$

En considérant la loi de conservation (I.25), on trouve comme deuxième équation :

$$\nabla \cdot \left[-\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) \right] = 0 \quad (\text{I.29})$$

Le couple d'équations (I.28) et (I.29) constitue la formulation en potentiels $\mathbf{A} - V$. Si on considère le cas où les sources de courants sont parfaitement de forme sinusoïdale, alors on peut employer la représentation en régime harmonique de pulsation ω . En adoptant le changement de variable suivant [Leonard 88] :

$$\mathbf{v} = \frac{1}{j\omega} \nabla \quad (\text{I.30})$$

Le système s'écrit alors :

$$\nabla \times (\mathbf{v} \nabla \times \mathbf{A}) + j\omega\sigma(\mathbf{A} + \nabla V) = \mathbf{J}_s \quad (\text{I.31})$$

$$\nabla \cdot [-j\omega\sigma(\mathbf{A} + \nabla V)] = 0$$

Avec $j^2 = -1$.

De même que précédemment, les conditions aux limites sur les frontières Γ ou Γ_s s'énoncent :

$$\text{Dirichlet} \quad \mathbf{A} = 0 \text{ et } V = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (\text{I.32})$$

$$\text{Newman} \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ et } \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_s \quad (\text{I.33})$$

Le problème d'unicité de la solution se pose ; on remarque que si le couple (\mathbf{A}, v) est solution de (I.31) alors il existe une infinité de solutions données par le couple $(\mathbf{A} + \nabla\phi, v - j\omega\phi)$. En remplaçant ce dernier dans (I.31) le système reste inchangé. Afin de rendre la solution unique, de même qu'en magnétostatique, la jauge de Coulomb est la plus couramment utilisée [Nath 93]. Egalement, dans la formulation $\mathbf{A} - v$, il est recommandé d'ajouter cette jauge par pénalité à travers le terme :

$$\nabla(v\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (\text{I.34})$$

En effet, si le potentiel \mathbf{A} est fixé par (I.34), v l'est également [Biro 89]. Mettant le terme (I.34) dans la première équation du système (I.31), on obtient la formulation $\mathbf{A} - v$ jaugée :

$$\begin{aligned} \nabla \times (v\nabla \times \mathbf{A}) - \nabla(v\nabla \cdot \mathbf{A}) + j\omega\sigma(\mathbf{A} + \nabla v) &= \mathbf{J}_s \\ \nabla \cdot [-j\omega\sigma(\mathbf{A} + \nabla v)] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.35})$$

Dans notre étude, c'est cette formulation qui nous intéresse. Elle est plus générale et peut être appliquée à divers problèmes d'électrotechnique.

1.2.5. Prise en compte de la non linéarité magnétique

A cause des phénomènes de saturation intervenant dans les matériaux ferromagnétiques, la perméabilité magnétique μ va dépendre du champ \mathbf{H} [Feliachi 81]. De nombreuses techniques ont été développées pour l'étude de ce type de non linéarité.

1.2.5.1. Méthodes existantes

Les principales techniques existantes pour le traitement de la non linéarité magnétique sont [Shyamkumar 88] :

- Algorithme de Newton-Raphson
- Méthode $\mu - \mathbf{B}$
- Technique $\mathbf{M} - \mathbf{B}$

La méthode de Newton-Raphson est la plus utilisée dans la littérature [Ayoub 92]. Elle offre l'avantage d'une convergence au voisinage de la solution exacte en un nombre réduit d'itérations. Et comme cette convergence dépend fortement de la valeur d'initialisation de l'inconnue [Shyamkumar 88], la méthode de Newton-Raphson n'est pas toujours sollicitée. Elle échoue surtout quand il s'agit d'une caractéristique $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ avec une saturation rapide. En revanche, les techniques linéaires ($\mu - \mathbf{B}$, $\mathbf{M} - \mathbf{B}$, ...) mêmes si elles ne sont pas rapides par rapport à Newton-Raphson, elles assurent la convergence quelque soit le type de la caractéristique $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ [Kanai 87].

La méthode $\mu-\mathbf{B}$ a été implémentée dans la méthode des éléments finis et différences finis pour les problèmes 2D par Demerdash [Demerdash 76]. Elle a été appliquée dans le cas 3D pour la première fois dans les éléments finis dans [Demerdash 81], et par la suite par d'autres auteurs dans d'autres méthodes, telle que la méthode des intégrales de frontières MIF [Shao 88]. Dans la pratique, il existe plusieurs manières pour implémenter cette technique, mais le principe est toujours le même. Après chaque itération l , la perméabilité relative μ_r doit être calculée par la relation suivante [Hafla 05] :

$$\mu_r^{(l)} = \begin{cases} \frac{\mathbf{B}(\mathbf{H}^{(l)})}{\mu_0 \mathbf{H}^{(l)}} & \text{si } \mathbf{H}^{(l)} < H_m \\ \frac{\mathbf{B}^{(l)}}{\mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{B}^{(l)})} & \text{si } \mathbf{H}^{(l)} \geq H_m \end{cases} \quad (\text{I.36})$$

Où H_m est la valeur maximale du champ de la caractéristique $\mu_r(\mathbf{H})$ du matériau.

La méthode $\mathbf{M}-\mathbf{B}$ (\mathbf{M} : aimantation) permet de remplacer un problème non linéaire par une série de problèmes linéaires, qui peuvent être résolus successivement par un schéma itératif. Dans [Bloomberg 85] cette méthode est présentée comme nouvelle méthode pour le traitement des problèmes magnétostatiques non linéaires. La méthode $\mathbf{M}-\mathbf{B}$ qui appartient à la famille des méthodes itératives, offre l'avantage d'être efficace concernant l'occupation de mémoire. Un autre avantage, est que la matrice globale du système obtenu par discrétisation reste inchangée, alors elle est calculée et assemblée une fois pour toute [Kurz 97].

Il existe également d'autres techniques, tels que la méthode des points fixes et la méthode TLM (Transmission Line Modeling). De point de vue formulation, la méthode des points fixes ressemble à la méthode $\mathbf{M}-\mathbf{B}$. Dans les deux méthodes, le terme $\nabla \times \mathbf{M}$ est pris en considération pour tenir compte de la non linéarité [Ossart 99]. La méthode TLM, basée sur le principe d'analyse des circuits électriques, a été implémentée dans [Lobry 96]. Dans cette méthode, le matériau non linéaire est remplacé par un matériau linéaire et homogène et la non linéarité est ramenée dans le terme source.

Dans la majorité des travaux cités ci-dessus ce sont les méthodes : éléments finis MEF, la méthode des intégrales de frontières MIF ou bien une méthode mixte MEF-MIF, qui sont utilisées comme méthodes de discrétisation. A notre connaissance, la technique $\mathbf{M}-\mathbf{B}$ a été implémenté dans la méthode MVF pour la première fois par nos soins [Cheriet 06^b], pour le calcul du champ magnétostatique non linéaire dans le cas 3D.

I.2.5.2. Formulation magnétostatique non linéaire en potentiel A

La présence des matériaux non linéaires, dans lesquels μ dépend du champ appliqué nécessite un certain traitement. Cependant et dans l'ordre d'implémenter la méthode

\mathbf{M} – \mathbf{B} dans la méthode des volumes finis, on ajoute l'équation constitutive non linéaire suivante :

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (\text{I.37})$$

Où \mathbf{M} est l'aimantation induite dans le matériau, elle est proportionnelle au champ magnétique appliqué. Les équations (I.11), (I.12) et (I.37) constituent le modèle de la magnétostatique non linéaire. Combinant (I.12) et (I.37), on obtient :

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \right) = \mathbf{J}_s + \nabla \times \mathbf{M} \quad (\text{I.38})$$

En terme de potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} défini par (I.14), on réécrit l'équation (I.38) comme suit :

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} \right) = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_a \quad (\text{I.39})$$

\mathbf{J}_a est le courant d'aimantation, donné par :

$$\mathbf{J}_a = \nabla \times \mathbf{M} \quad (\text{I.40})$$

Tenant compte de la jauge de Coulomb, la formulation devient :

$$\frac{1}{\mu_0} [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A})] = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_a \quad (\text{I.41})$$

I.3. Méthodes numériques de discrétisation

I.3.1. Principales méthodes existantes

Les méthodes numériques ont pour objectif de remplacer un problème continu défini avec un modèle mathématique souvent différentiel par un problème discret sous une forme algébrique. Dans les formulations issues de la physique de l'électrotechnique on peut citer les méthodes : différences finis (MDF), éléments finis (MEF) et intégrales de frontières (MIF) qui sont de plus en plus utilisées. Historiquement, ce sont les différences finies qui ont été les premières méthodes utilisées, substituées après par les éléments finis vers les années 70. La méthode des différences finies est relativement simple de mise en œuvre, mais présente l'inconvénient d'avoir une faible qualité d'approximation des variables et l'incapacité de modéliser les géométries complexes [Mansir 86]. Par ailleurs, elle exige un schéma de maillage très fin, qui peut ainsi se traduire par un coût de calcul prohibitif.

Sans doute ce sont les éléments finis qui occupent une grande place dans les problèmes de modélisation. Contrairement à la MDF, les éléments finis s'adaptent bien aux géométries

complexes ; ainsi ils permettent d'améliorer considérablement la précision de calcul par la prise en compte de différents types de fonctions d'interpolations des variables. La diversité dans le choix de l'élément de maillage donne une flexibilité importante à la méthode.

La méthode des volumes finis qui fait l'objet de ce travail de thèse, commence à prendre place dans le domaine de la modélisation des problèmes d'électrotechnique.

I.3.2. La méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis [Patankar 80], appliquée dans divers problèmes de la physique, commence à prendre place ces dernières années pour la résolution des problèmes d'électrotechnique. Dans [Depeyre 97] la méthode MVF est introduite dans le traitement de problèmes 2D de la mécanique de fluide. Egalement on la retrouve dans les problèmes d'écoulement [Vohralik 04]. Elle a largement été étudiée par l'équipe de l'institut INRIA dans la résolution des problèmes de propagation d'ondes [Cioni 97]. L'équipe travaille sur le développement d'un code de calcul basé sur un schéma volume finis centré au nœud et schéma volumes finis centré à l'élément. Toujours dans le domaine de la propagation, Baumann a exploité la méthode MVF dans le domaine temporel (FVTD) dans ces travaux [Baumann 06]. On trouve aussi les applications de la MVF dans les problèmes d'électrostatique [Davies 96].

En 2001, la méthode des volumes finis a été présentée dans [Cheriet 01] et [Yaoqin 01] comme une nouvelle méthode pour le calcul des courants induits. Suivi par d'autres travaux dans le même domaine tel que dans [Yaoqin 02]. Elle a également été traitée par [Zou 04^b] pour le calcul des courants induits avec la formulation $\mathbf{T}-\Phi$ où le maillage en éléments hexaédriques est considéré. Concernant les problèmes magnétostatiques, nous citons par exemple le travail de Zou dans [Zou 04^a] où un problème 2D dans le cas linéaire est résolu. Les résultats de calcul de l'induction magnétique en 3D dans un matériau saturé dans [Cheriet 06^b], montrent l'efficacité de la MVF dans la résolution des problèmes magnétostatiques non linéaires.

Par rapport aux éléments finis, la discrétisation par la méthode des volumes finis conduit à un système linéaire avec une matrice plus creuse. Cet avantage permet une convergence plus rapide des solveurs itératifs (voir annexe : comparaison entre la MEF et la MVF).

I.4. Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons rappelé les équations de Maxwell, les principales formulations des modèles qui nous intéressent ; le modèle magnétostatique linéaire et le modèle magnétodynamique. Afin de tenir compte de la non linéarité dans les problèmes magnétostatiques, nous avons donné un aperçu sur les techniques souvent employées : Newton-Raphson, $\mu-\mathbf{B}$ et $\mathbf{M}-\mathbf{B}$. Vu qu'elle s'adapte bien à tout type de non linéarité,

nous avons choisi la méthode $\mathbf{M}-\mathbf{B}$. En effet, nous avons insisté sur les trois formulations que nous allons discrétiser dans le second chapitre. Ces formulations sont :

- Formulation en potentiel \mathbf{A} du modèle magnétostatique linéaire
- Formulation $\mathbf{A}-v$ du modèle magnétodynamique
- Formulation en potentiel \mathbf{A} du modèle magnétostatique non linéaire avec la technique $\mathbf{M}-\mathbf{B}$

Dans le suivant chapitre, on va discrétiser avec la méthode des volumes finis, les formes différentielles données par (I.21), (I.35) et (I.41).

Chapitre II.

MISE EN ŒUVRE DE LA METHODE DES VOLUMES FINIS

II.1. Introduction	21
II.2. Discrétisation géométrique	21
II.3. Discrétisation des formulations électromagnétiques	23
II.3.1. Discrétisation de la formulation magnétostatique	23
II.3.1.1. Intégration de $\nabla \times (\mathbf{v} \nabla \times \mathbf{A})$	23
II.3.1.2. Intégration de $\nabla (\mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{A})$	26
II.3.1.3. Intégration du terme source	27
II.3.1.4. Construction du système matriciel	27
II.3.2. Discrétisation de la formulation magnétodynamique	28
II.3.2.1. Intégration de $\sigma(\mathbf{A} + \nabla v)$	28
II.3.2.2. Intégration de l'équation divergence	29
II.3.2.3. Construction du système matriciel	30
II.3.3. Reluctivité et conductivité à l'interface entre milieux différents	31
II.3.4. Implémentation de la technique $\mathbf{M} - \mathbf{B}$	33
II.4. Maillage d'un problème type	34
II.5. Résolution de systèmes d'équations linéaires	36
II.6. Algorithme du code de calcul	37
II.7. Conclusion	38

II.1. Introduction

Le principe de la méthode des volumes finis (MVF) est basé sur le calcul de la forme intégrale de l'équation aux dérivées partielles (EDP) électromagnétique, comme dans le cas de la loi de Gauss pour le champ électrostatique et la loi d'Ampère pour la magnétostatique. Donc on note une signification physique de la méthode plus explicite que dans le cas des autres méthodes numériques [Zou 04^a]. La grande simplicité de sa mise en œuvre a fait que la MVF a connu un essor fulgurant depuis les années quatre vingt.

Considérons un domaine Ω dans lequel un champ \mathbf{U} , scalaire ou vectoriel, est la solution de l'équation EDP suivante :

$$\mathfrak{I}(\mathbf{U}) = \mathbf{F} \quad (\text{II.1})$$

Où \mathfrak{I} est un opérateur différentiel et \mathbf{F} est une fonction connue, appelée terme source. La solution de l'équation (II.1) par la méthode des volumes finis, consiste d'abord à découper le domaine Ω en volumes élémentaires D_i ($i = 1, 2, \dots$). Dans la branche de la physique, différents éléments ont été développés; tétraèdres, hexaèdres et prismes. Concernant les problèmes d'électrotechnique, on trouve souvent l'élément hexaédrique utilisé pour la discrétisation [Davies 96], [Yaoqin 01], [Yaoqin 02] et [Zou 04^b]. En effet, pour un problème donné, l'élément hexaédrique est supérieur par rapport aux autres éléments en termes de temps de calcul et de précision [Nakata 90], [Muramatsu 91] et [Kovalev 05]. La résolution numérique basée sur la MVF consiste à intégrer l'équation (II.1) dans chaque volume élémentaire dans lequel le champ \mathbf{U} est approximé par une fonction linéaire :

$$\int_{D_i} \mathfrak{I}(\mathbf{U}) = \int_{D_i} \mathbf{F} \quad (\text{II.2})$$

Il est à noter que la méthode des volumes finis peut être vue comme une méthode de résidus pondérés dans laquelle les fonctions de poids sont égales à l'unité.

II.2. Discrétisation géométrique

Traditionnellement, comme dans toutes les méthodes numériques de discrétisation on commence par la construction du maillage ; pour cela on découpe le domaine d'étude en volumes élémentaires de taille réduite. Ces éléments sont, dans le cas tridimensionnel, soit de formes hexaèdre, tétraèdres ou des prismes. Nous limiterons cette étude aux formes hexaédriques. A chaque élément hexaédrique de volume D_p ($i = p$), on associe un nœud principal P et six facettes : e et w selon la direction x , n et s selon la direction y , t et b selon la direction z (Fig.II.1). Les volumes élémentaires voisins de l'élément D_p , sont représentés par leurs nœuds principaux : E et W suivant l'axe x , N et S suivant l'axe y , T et B suivant l'axe z .

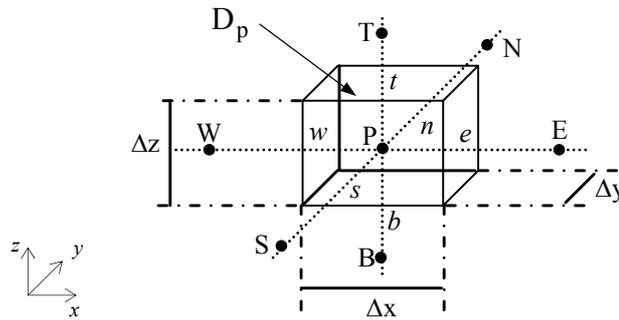


Fig.II.1. Volume élémentaire D_p

Souvent, en particulier dans le cas 3D, les problèmes à modéliser sont constitués de plusieurs objets (régions) ayant différentes dimensions. Afin d'adapter notre maillage à ce type de problème, nous avons considéré deux types de grilles ; régulière et irrégulière (Fig.II.2). Pour éviter une forte discontinuité, le maillage irrégulier est réalisé avec une progression logarithmique dans l'espace (Fig.II.2.b).

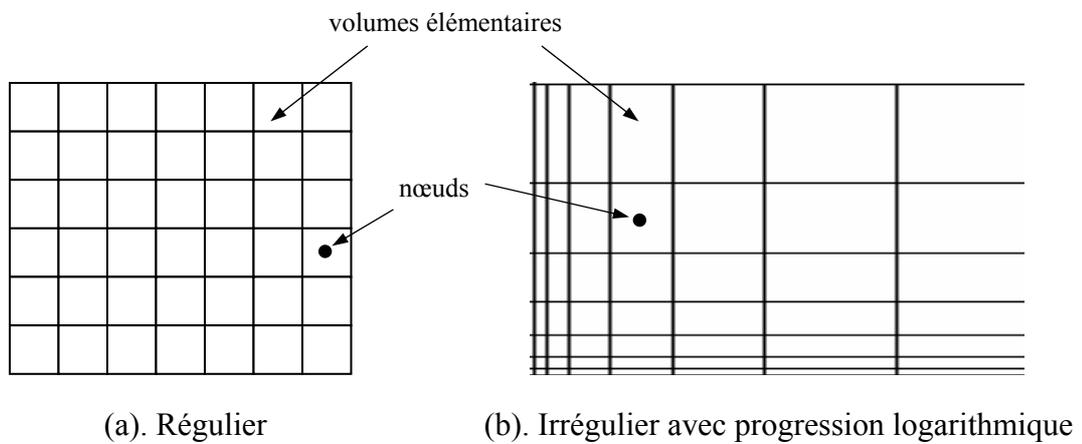


Fig.II.2. Types de maillages réalisés, vue 2D

II.3. Discrétisation des formulations électromagnétiques

II.3.1. Discrétisation de la formulation magnétostatique

La formulation en volumes finis du modèle magnétostatique, consiste à intégrer l'équation (I.21) dans le volume élémentaire D_p , ainsi elle s'écrit :

$$\iiint_{D_p} \nabla \times (\mathbf{v} \nabla \times \mathbf{A}) \, dx dy dz - \iiint_{D_p} \nabla (\mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{A}) \, dx dy dz = \iiint_{D_p} \mathbf{J}_s \, dx dy dz \quad (\text{II.3})$$

Par la suite, on va calculer directement cette intégrale sans faire de transformations sur les opérateurs ∇ . Dans un souci d'alléger le développement, on ne considère par la suite que la composante x de l'intégrale (II.3).

II.3.1.1. Intégration de $\nabla \times (\mathbf{v} \nabla \times \mathbf{A})$

$$\begin{aligned} & \iiint_{D_p} \langle \nabla \times (\mathbf{v} \nabla \times \mathbf{A}) \rangle_x \, dx dy dz \\ &= \iiint_{w s b}^{e n t} \left[\frac{\partial}{\partial y} \mathbf{v} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{v} \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{v} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{v} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right] dx dy dz \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Les quatre termes différentiels dans (II.4), peuvent être représentés par une forme générale donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial i} \mathbf{v} \left(\frac{\partial A_{x,y,z}}{\partial k} \right) \quad \text{avec } i, k = x, y, z \quad (\text{II.5})$$

Tenant compte de cette écriture, on distingue deux cas ; $i=k$ et $i \neq k$. Soit par exemple le calcul du deuxième terme dans (II.4) et qui correspond à $i=k=y$:

$$\begin{aligned} & \iiint_{w s b}^{e n t} \left[\frac{\partial}{\partial y} \mathbf{v} \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right] dx dy dz \\ &= \iint_{wb}^{et} \left[\left\{ \mathbf{v} \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right\} \Big|_s^n \right] dx dz \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

On suppose que les dérivées du potentiel aux facettes n et s sont constantes sur les surfaces de ces facettes, (II.6) conduit à :

$$\left\{ v \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right\} \Big|_s^n \Delta x \Delta z = \left[\left\{ v \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right\} \Big|_n - \left\{ v \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right\} \Big|_s \right] \Delta x \Delta z \quad (\text{II.7})$$

L'idée de base de la MVF est de considérer ensuite une variation linéaire du potentiel à travers les facettes n et s (Fig.II.3), on peut alors écrire :

$$\left\{ v \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right\} \Big|_n = v_n \frac{A_x^N - A_x^P}{\Delta y_n} \quad (\text{II.8})$$

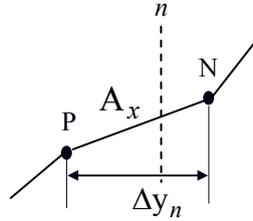


Fig.II.3. Approximation linéaire du potentiel à travers la facette n

De même, on exprime la dérivée sur la facette s . Remplaçant ces dérivées dans (II.7), on aura la combinaison linéaire :

$$c_n A_x^N + c_s A_x^S - (c_n + c_s) A_x^P \quad (\text{II.9})$$

Tel que :

$$c_m = v_m \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y_m} \text{ pour } m = n, s \quad (\text{II.10})$$

Où v_n et v_s sont respectivement, les reluctivités magnétiques des facettes n et s . Si on considère maintenant le troisième terme dans (II.4) soit pour $i=k=z$, on retrouve le même développement du cas $i=k=y$. Afin de donner une idée complète sur le calcul des différents termes, prenons le deuxième cas ($i \neq k$), soit par exemple le terme $i=y$ et $k=x$:

$$\begin{aligned} & \iiint_{wsb}^{ent} \left[\frac{\partial}{\partial y} v \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} \right) \right] dx dy dz \\ & = \left\{ v \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} \right) \right\}_s^n \Delta x \Delta z \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

Ici la dérivée de la composante y du potentiel (A_y) doit être exprimé aux facettes n et s . Une approche qui peut être utilisée, consiste à annuler ce type de termes et de considérer par la suite seulement les dérivées qui sont orthogonales aux facettes, comme par exemple dans (II.8). Toutefois, garder ces termes dans la formulation augmente la précision de la méthode. Cependant, on est amené à ajouter d'autres nœuds qu'on appellera 'nœuds fictifs' (Fig.II.4). Dans ce cas, on peut exprimer la dérivée à la facette n en fonction des potentiels aux nœuds fictifs :

$$\left\{ v \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} \right) \right\}_n = v_n \frac{A_y^{ne} - A_y^{nw}}{\Delta x} \quad (\text{II.12})$$

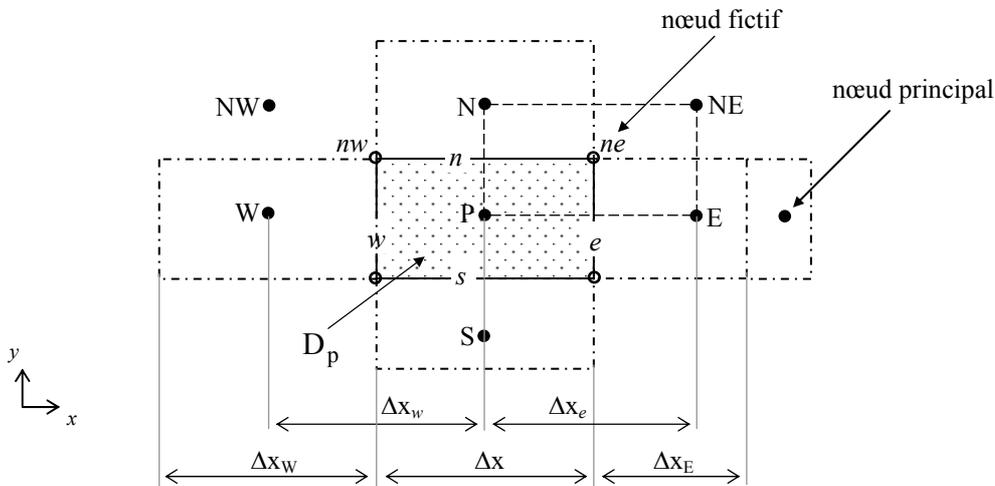


Fig.II.4. Illustration des nœuds fictifs

D_p Avant de poursuivre le calcul, considérons la Fig.II.4. Dans cette figure, il est montré que le maillage peut être régulier ($\Delta x = \Delta x_w$) ou irrégulier ($\Delta x \neq \Delta x_e$), et dans tous les cas les facettes sont situées aux médianes des nœuds, par exemple les facettes e et n sont situées sur les médianes des segments P-E et P-N, respectivement. Cela nous permet d'exprimer le potentiel au nœud fictif ne , comme suit :

$$A_y^{ne} = \frac{1}{4} (A_y^P + A_y^E + A_y^N + A_y^{NE}) \quad (\text{II.13})$$

De même :

$$A_y^{nw} = \frac{1}{4} (A_y^P + A_y^W + A_y^N + A_y^{NW}) \quad (\text{II.14})$$

D'où :

$$\left\{ v \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} \right) \right\} \Big|_n = \frac{1}{4\Delta x} v_n (A_y^E + A_y^{NE} - A_y^W - A_y^{NW}) \quad (\text{II.15})$$

De même on calcule la dérivée de la facette s . Après arrangement, le terme (II.11) aboutit à une combinaison linéaire donnée par la forme suivante :

$$q_n (A_y^{NE} - A_y^{NW}) - q_s (A_y^{SE} - A_y^{SW}) \text{ avec } q_m = \frac{1}{4} v_m \Delta z \text{ pour } m = n, s \quad (\text{II.16})$$

De la même manière, on intègre les autres termes dans (II.4).

II.3.1.2. Intégration de $\nabla(v\nabla \cdot \mathbf{A})$

$$\begin{aligned} & \iiint_{D_p} \langle \nabla(v\nabla \cdot \mathbf{A}) \rangle_x dx dy dz \\ &= \iiint_{w s b}^{e n t} \left[\frac{\partial}{\partial x} v \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} v \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} v \left(\frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Il est clair que les trois termes différentiels dans (II.17) peuvent être écrits sous la forme générale (II.5). Ainsi leurs développements conduit aux mêmes étapes précédemment détaillées. Le résultat de l'intégrale de (II.17) donne une combinaison linéaire, qu'on peut mettre sous la forme :

$$(c_e + c_w) A_x^P + \sum_{\substack{i=x, y, z \\ m=n, s, \dots}} q_m A_i^M \quad (\text{II.18})$$

Où

$$c_m = v_m \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x_m} \text{ pour } m = e, w \quad (\text{II.19})$$

II.3.1.3. Intégration du terme source

On suppose une distribution uniforme et constante du courant source dans le volume élémentaire D_p , on peut alors écrire :

$$\iiint_{D_p} \langle \mathbf{J}_s \rangle_x dx dy dz = J_{sx} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (\text{II.20})$$

II.3.1.4. Construction du système matriciel

Après calcul de l'ensemble des termes provenant du développement de la composante x de l'équation (II.3), on obtient la combinaison algébrique donnée par (II.21). Cette expression donne la composante x du potentiel vecteur magnétique au nœud P (A_x^P) en fonction des potentiels A_x , A_y , et A_z aux nœuds voisins. Le schéma volumes finis ainsi obtenu, est constitué de 14 branches (nombre des nœuds voisins de P).

$$A_x^P = \frac{1}{c_p} \left[\sum_{m=e, w, \dots} c_m A_x^M + \sum_{\substack{i=x, y \\ m=e, w, \dots}} q_m A_i^M + J_{sx} D_p \right], \text{ avec } c_p = \sum_{m=e, w, \dots} c_m \quad (\text{II.21})$$

Notons que (II.21) est évaluée pour l'élément élémentaire D_p ($D_p = \Delta x \Delta y \Delta z$). De même, les composante y et z du potentiel sont :

$$A_y^P = \frac{1}{c_p} \left[\sum_{m=e, w, \dots} c_m A_y^M + \sum_{\substack{i=x, z \\ m=e, w, \dots}} q_m A_i^M + J_{sy} D_p \right] \quad (\text{II.22})$$

$$A_z^P = \frac{1}{c_p} \left[\sum_{m=e, w, \dots} c_m A_z^M + \sum_{\substack{i=x, y \\ m=e, w, \dots}} q_m A_i^M + J_{sz} D_p \right] \quad (\text{II.23})$$

L'écriture de (II.21), (II.22) et (II.23) pour l'ensemble des éléments du maillage, conduit à un système matriciel qu'on peut le mettre sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{sx} \\ J_{sy} \\ J_{sz} \end{bmatrix} \quad (\text{II.24})$$

Sous une forme condensée on écrit :

$$[\mathbf{K}][\mathbf{A}] = [\mathbf{J}_s] \quad (\text{II.25})$$

K est la matrice globale du système, dans le cas général elle est creuse et symétrique.

II.3.2. Discrétisation de la formulation magnétodynamique

La formulation volumes finis du modèle magnétodynamique s'écrit :

$$\begin{aligned} \iiint_{D_p} [\nabla \times (\mathbf{v} \nabla \times \mathbf{A}) - \nabla (\mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{A})] dx dy dz + j\omega \iiint_{D_p} \sigma (\mathbf{A} + \nabla v) dx dy dz = \iiint_{D_p} \mathbf{J}_s dx dy dz \\ \iiint_{D_p} \nabla \cdot [-j\omega \sigma (\mathbf{A} + \nabla v)] dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

Tenant compte des termes calculés dans la partie de la magnétostatique, dans (II.26) il nous ne reste à calculer que les intégrales :

$$\begin{aligned} \iiint_{D_p} \sigma (\mathbf{A} + \nabla v) dx dy dz \\ \iiint_{D_p} \nabla \cdot [-j\omega \sigma (\mathbf{A} + \nabla v)] dx dy dz \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

II.3.2.1. Intégration du terme $\sigma(\mathbf{A} + \nabla v)$

On considère que le potentiel électrique v subit une variation linéaire dans l'élément D_p , on en déduit :

$$\begin{aligned} \iiint_{w s b}^{e n t} \langle \sigma (\mathbf{A} + \nabla v) \rangle_x dx dy dz \\ = \sigma_p \left(A_x^P + \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_P \right) D_p \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

Où σ_p est la conductivité électrique au nœud P. Dans (II.28) la dérivée du potentiel v au nœud P doit être exprimée par une différence de potentiels aux facettes e et w. Et comme les facettes e et w sont situées sur les médianes des segments P-E et P-W, respectivement, cette dérivée devient :

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_p = \frac{v^E - v^W}{\Delta x_e + \Delta x_w} \quad (\text{II.29})$$

En tenant compte des équations (II.21) et (II.29), la composante x de la première équation du système (II.26) aboutit à :

$$A_x^P = \frac{1}{c_p^*} \left[\sum_{m=e, w, \dots} c_m A_x^M + \sum_{\substack{i=y, z \\ m=e, w, \dots}} q_m A_i^M + \frac{D_p}{\Delta x_e + \Delta x_w} (v^E - v^W) + J_{sx} D_p \right] \quad (\text{II.30})$$

Avec

$$c_p^* = c_p + j\omega \sigma_p D_p \quad (\text{II.31})$$

De la même manière les composantes y et z seront calculées :

$$A_y^P = \frac{1}{c_p^*} \left[\sum_{m=e, w, \dots} c_m A_y^M + \sum_{\substack{i=x, z \\ m=e, w, \dots}} q_m A_i^M + \frac{D_p}{\Delta y_n + \Delta y_s} (v^N - v^S) + J_{sy} D_p \right] \quad (\text{II.32})$$

$$A_z^P = \frac{1}{c_p^*} \left[\sum_{m=e, w, \dots} c_m A_z^M + \sum_{\substack{i=x, y \\ m=e, w, \dots}} q_m A_i^M + \frac{D_p}{\Delta z_t + \Delta z_b} (v^T - v^B) + J_{sz} D_p \right] \quad (\text{II.33})$$

II.3.2.2. Intégration de l'équation divergence

Dans la deuxième équation du système (II.26) on pose $\sigma^* = -j\omega \sigma$. Soit :

$$\begin{aligned} & \iiint_{wsb}^{ent} \nabla \cdot [\sigma^* (\mathbf{A} + \nabla v)] dx dy dz \\ &= \iiint_{wsb}^{ent} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma^* \left(A_x + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\sigma^* \left(A_y + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\sigma^* \left(A_z + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \right\} dx dy dz \quad (\text{II.34}) \end{aligned}$$

Prenons par exemple le premier terme dans (II.34), son intégration donne :

$$\left[\sigma_e^* \left(A_x^e + \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_e \right) + \sigma_w^* \left(A_x^w + \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_w \right) \right] \Delta y \Delta z \text{ avec } \sigma_m^* = -j\omega \sigma_m \text{ pour } m=e, w \quad (\text{II.35})$$

En approximant le potentiel vecteur magnétique aux facettes e et w par des combinaisons linéaires des potentiels aux nœuds voisins (par exemple A_x^e par la moyenne des potentiels aux nœuds E et W), et en considérant une variation linéaire du potentiel v à travers les facettes e et w , (II.35) aboutit à :

$$\left[\sigma_e^* \left(\frac{1}{2} (A_x^E + A_x^P) + \frac{v^E - v^P}{\Delta x_e} \right) + \sigma_w^* \left(\frac{1}{2} (A_x^P + A_x^W) + \frac{v^P - v^W}{\Delta x_w} \right) \right] \Delta y \Delta z \quad (\text{II.36})$$

De la même façon sont calculés les deux autres termes dans (II.34). Finalement nous obtenons l'équation du potentiel scalaire au nœud P :

$$v^P = \frac{1}{u_p} \left[\sum_{m=e, w, \dots} u_m v^M + \sum_{\substack{i=x, y, z \\ m=e, n, \dots}} c_m A_i^M \right] \quad (\text{II.37})$$

Les coefficients u_m ($m=e, w, \dots$) caractérisent les propriétés géométriques et électriques des facettes. Par exemple u_e est exprimé par :

$$u_e = \sigma_e^* \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x_e} \quad (\text{II.38})$$

Avec

$$u_p = \sum_{m=e, w, \dots} u_m \quad (\text{II.39})$$

II.3.2.3. Construction du système matriciel

Rappelons que les équations (II.30), (II.32), (II.33) et (II.37) sont évaluées pour le volume élémentaire D_p correspond au nœud principal P. On réécrit ces équations pour l'ensemble des éléments de maillage, ensuite nous les assemblons, et nous obtenons un système d'équations qu'on peut le mettre sous la forme matricielle suivante :

$$[\mathbf{K}] \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ v \end{bmatrix} = [\mathbf{J}_s] \quad (\text{II.40})$$

Avec

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \\ v \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\mathbf{J}_s] = \begin{bmatrix} J_{sx} \\ J_{sy} \\ J_{sz} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.41})$$

De même qu'on magnétostatique, dans (II.40) la matrice globale K est une matrice creuse et symétrique.

II.3.3. Reluctivité et conductivité à l'interface entre milieux différents

On remarque que les coefficients précédemment calculés, par exemple $c_e (m=e)$ dans (II.19)...etc., sont exprimés en fonction de reluctivités des facettes (v_e, \dots). Afin d'établir une formulation complète, il est nécessaire de trouver une expression de la reluctivité quand les facettes coïncident avec une interface physique. En Fig.II.5, on montre les deux configurations des l'interfaces physiques souvent rencontrées dans les problèmes tridimensionnels. Une simple approximation souvent utilisée, à l'interface entre deux milieux de différents reluctivités magnétiques, consiste à prendre une moyenne géométrique [Chung 03].

Dans la Fig.II.5.a, on montre la première configuration dans laquelle l'interface physique représente une surface dans le plan y - z . Dedans, par exemple la facette supérieure t couvre deux parties : grise et blanche. La partie grise appartient à la première région de reluctivité v_1 et la partie blanche appartient à la deuxième région de reluctivité v_2 , ainsi la reluctivité de la facette t est approximé par la moyenne géométrique suivante :

$$v_t = \frac{\Delta x_e v_2 + \Delta x_w v_1}{2\Delta x} \quad (\text{II.42})$$

Egalement, les reluctivités aux facettes s , b et n , sont $v_s = v_b = v_n = v_t$. Aisément aux facettes e et w nous avons $v_e = v_2$ et $v_w = v_1$.

Dans la deuxième configuration (Fig.II.5.b), l'interface physique représente un coin. Pour une facette quelconque m , couvrant deux régions ayant des différentes reluctivités (v_1 et v_2), on a :

$$v_m = \frac{\text{sec}_2 v_2 + (\Delta x_m \Delta y_m - \text{sec}_2) v_1}{\Delta x_m \Delta y_m} \quad (\text{II.43})$$

Où sec_2 est l'aire de la partie facette appartient à la région 2.

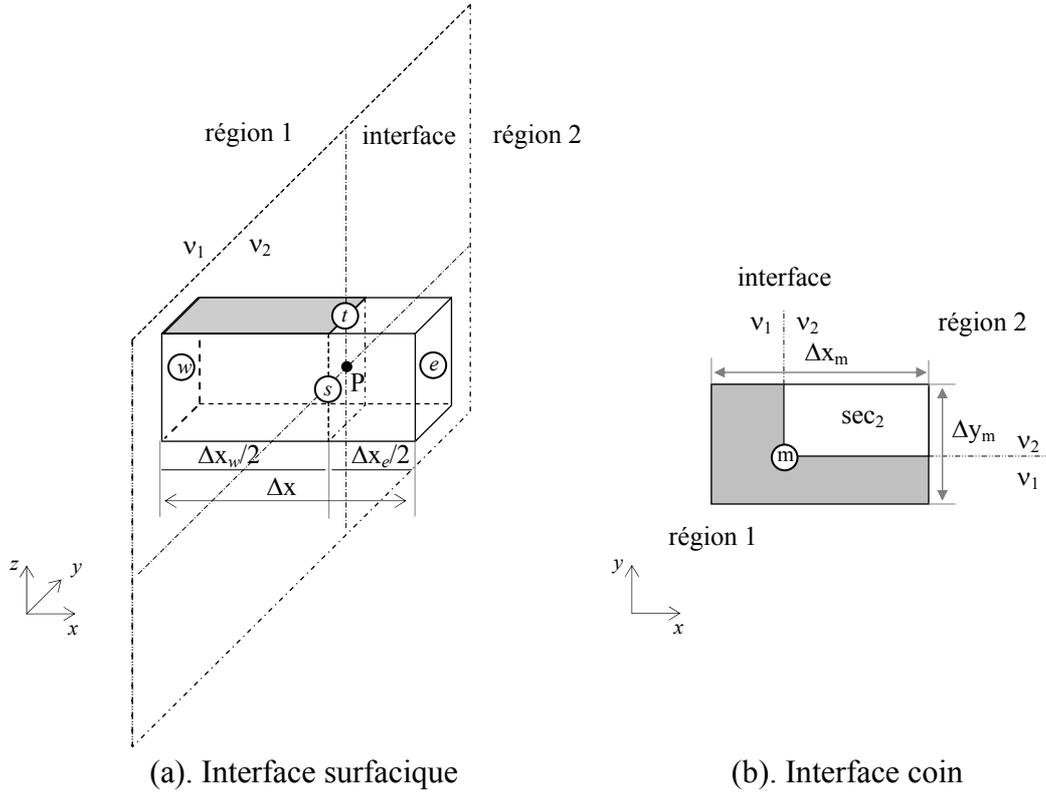


Fig.II.5. Volume élémentaire à l'interface entre deux milieux différents

Egalement dans d'autres termes, il est nécessaire d'exprimer la conductivité σ à l'interface entre deux milieux de propriétés électriques différentes. On considère la Fig.II.5, soit par exemple :

$$\sigma_t = \frac{\Delta x_e \sigma_2 + \Delta x_w \sigma_1}{2\Delta x} \quad (\text{II.44})$$

$$\sigma_m = \frac{\text{sec}_2 \sigma_2 + (\Delta x_m \Delta y_m - \text{sec}_2) \sigma_1}{\Delta x_m \Delta y_m} \quad (\text{II.45})$$

σ_1 et σ_2 sont les conductivités électriques des régions 1 et 2, respectivement.

II.3.4. Implémentation de la technique M–B

L'équation en volumes finis d'un problème magnétostatique non linéaire dans le cas 3D est :

$$\frac{1}{\mu_0} \int_{w s b}^{e n t} [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A})] dx dy dz = \int_{w s b}^{e n t} \mathbf{J}_s dx dy dz + \int_{w s b}^{e n t} (\nabla \times \mathbf{M}) dx dy dz \quad (\text{II.46})$$

Tenant compte de la discrétisation de la formulation magnétostatique linéaire, dans (II.46) il ne reste à calculer que le dernier terme qui représente les courants d'aimantations, soit la composante x :

$$\begin{aligned} & \int_{w s b}^{e n t} \langle \nabla \times \mathbf{M} \rangle_x dx dy dz \\ &= \int_{w s b}^{e n t} \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= M_z \Big|_s^n \Delta x \Delta z - M_y \Big|_b^t \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (\text{II.47})$$

Avec une approximation linéaire de l'aimantation aux facettes, on obtient la combinaison algébrique :

$$\frac{1}{2} \Delta x \Delta z (M_z^N - M_z^S) - \frac{1}{2} \Delta x \Delta y (M_y^T - M_y^B) \quad (\text{II.48})$$

De la même manière les composantes y et z seront déduites. Tenant compte de l'équation (II.25), l'équation matricielle correspondant à (II.46) s'écrit :

$$[\mathbf{K}][\mathbf{A}] = [\mathbf{F}(\mathbf{J}_s, \mathbf{M})] \quad (\text{II.49})$$

Le vecteur source $\mathbf{F}(\mathbf{J}_s, \mathbf{M})$ dépend à la fois du courant source \mathbf{J}_s et de l'aimantation \mathbf{M} induite dans le matériau considéré. La méthode **M–B** consiste à résoudre le système (II.49) avec un double schéma d'itérations (Fig.II.6).

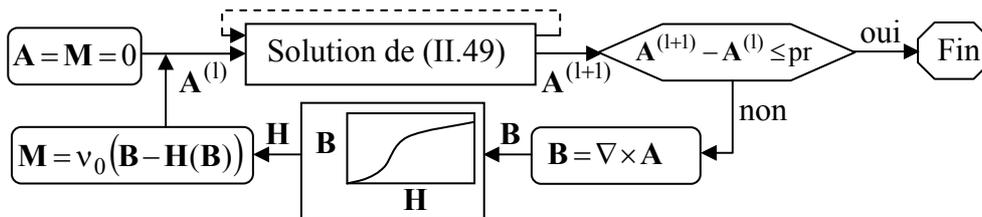


Fig.II.6. Organigramme de l'algorithme M–B

Comme dans toute les méthodes itératives, la première étape est l'initialisation des inconnues ($\mathbf{A}=\mathbf{M}=0$). Pour \mathbf{M} donnée, l'équation (II.49) est itérée jusqu'à la convergence du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} . Ce premier schéma itératif est représenté par une ligne discontinue. Une fois le potentiel \mathbf{A} obtenu, on fait un test de convergence sur le deuxième schéma itératif. Si la différence $\mathbf{A}^{(l+1)} - \mathbf{A}^{(l)}$ est suffisamment petite le processus itératif est arrêté à l'itération $(l+1)$; Sinon on procède à la mise à jour du vecteur \mathbf{F} comme suit :

- L'induction magnétique est calculée avec $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$
- Ensuite à l'aide de l'inverse de la caractéristique $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ du matériau et l'induction \mathbf{B} , nous obtenons \mathbf{H}
- En utilisant l'équation constitutive (I.37) avec les valeurs de l'induction \mathbf{B} et du champ $\mathbf{H}(\mathbf{B})$, on calcule la nouvelle valeur de l'aimantation \mathbf{M} . A cette étape un terme de relaxation λ ($\lambda\leq 2$) peut être utilisé :

$$\mathbf{M}^{(l+1)} = \mathbf{M}^{(l)} + \lambda(\mathbf{M} - \mathbf{M}^{(l)}) \quad (50)$$

- Par la suite, on procède au calcul du potentiel \mathbf{A} à l'aide du premier schéma itératif (ligne discontinue dans la Fig.II.6).

Ainsi de suite, ce cycle se répète jusqu'à convergence ($\mathbf{A}^{(l+1)} - \mathbf{A}^{(l)} \leq pr$), où pr représente la précision de calcul. On remarque que dans l'ensemble du processus itératif, la matrice globale \mathbf{K} de l'équation (II.49) reste inchangée. Alors elle est calculée et stockée une fois pour toute.

II.4. Maillage d'un problème type

On rappelle le problème type du premier chapitre, il est constitué de quatre objets : source de courant, matériau conducteur, matériau magnétique linéaire et matériau magnétique non linéaire. Dans l'implémentation classique de la MVF, on rencontre souvent un seul type de disposition des objets dans le maillage. Cela est due peut être à la nature du problème que ce soit de la mécanique des fluides, par exemple, ou dans d'autres domaines. En effet, pour la mise en œuvre du maillage sur notre problème type rappelé au début de ce paragraphe, on va définir deux types de disposition des objets dans le maillage (Fig.II.7). D'après notre expérience, cette définition a un intérêt dans la précision de calcul et même dans la convergence du processus de calcul.

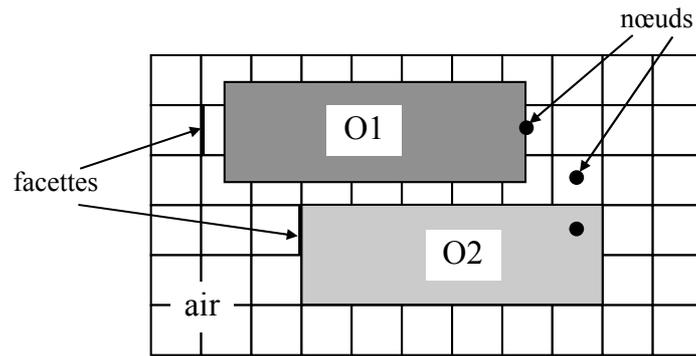


Fig.II.7. Disposition des objets dans un maillage, vue 2D

Dans la Fig.II.7 on montre une boîte d'air maillée avec une grille de volumes élémentaires et contenant deux objets. Le premier (O1) est maillé de telle sorte que sa frontière coïncide avec les nœuds du maillage et non avec les facettes. Par contre l'objet O2 est maillé différemment, sa frontière coïncide avec les facettes des volumes élémentaires et pas avec les nœuds. En effet, la mise en place d'un objet est en fonction de la nature de l'interface objet/air.

Interface source/air :

Rappelons, d'après le calcul précédent que le courant source (\mathbf{J}_s) doit être affecté aux nœuds et il est considéré constant dans le volume élémentaire correspondant. Pour cette raison un objet source doit prendre la disposition O2. Sinon (O1) on va approximer par une moyenne le courant \mathbf{J}_s à l'interface, et cela va diminuer l'effet de la source à sa frontière.

Interface fer/air :

La reluctivité ν doit être affectée aux facettes des volumes. D'après notre expérience, la mise en place d'un matériau de reluctivité ν ($\nu \gg \nu_0$) comme l'objet O2 conduit à une divergence dans le processus de calcul. Cela est peut être dû au fait qu'on a considéré une variation linéaire du potentiel entre deux nœuds voisins. Une meilleure disposition d'un matériau magnétique est celle de l'objet O1.

Interface conducteur/air :

Différemment de la source et la reluctivité, la conductivité σ doit être affectée aux nœuds et aux facettes des éléments de maillage. En effet, le processus de calcul ne pose pas de problème quelque soit la disposition du matériau conducteur dans le maillage. Une différence importante peut exister, dans le cas d'un maillage grossier au voisinage de cette interface physique.

Interface aimantation/air :

Dans les problèmes magnétostatiques non linéaires résolus avec la technique $\mathbf{M}-\mathbf{B}$, nous avons v_0 partout dans le domaine d'étude et la non linéarité est prise en compte avec le calcul des courants d'aimantation \mathbf{J}_a . Notons que ces courants sont calculés aux nœuds et considérés constants dans les volumes élémentaires correspondants. Dans ce cas les objets non linéaires ont le même comportement que les courants source. Alors, leurs meilleures dispositions sont celle de l'objet O2.

II.5. Résolution de systèmes d'équations linéaires

Après discrétisation des équations aux dérivées partielles par la méthode des volumes finis, le problème se ramène à l'inversion des systèmes d'équations matricielles (II.25), (II.40) et (II.49). Du fait que ces systèmes sont souvent de grandes tailles, il devient alors impossible de les inverser par une méthode directe. Les solveurs itératifs, sont principalement :

- Stationnaires (Jacobi, Gauss-Seidel,...)
- Non stationnaires (Gradient conjugué,...)

Récemment, les solveurs implémentés sous l'environnement Matlab de types Gradient conjugué, tels que GMRES, CGS, BICG et BICGTAB sont de plus en plus employés [Gheorghe 05]. Par rapport aux solveurs stationnaires, ces derniers produisent une solution plus proche de la solution exacte dans un temps de calcul réduit. Mais du point de vue consommation de mémoire, les solveurs stationnaires sont les plus favorables. En effet, pour des systèmes de très grande taille parfois la mise en œuvre des solveurs gradient conjugué devient délicate. Dans notre code de calcul nous avons employé deux types de solveurs BICGSTAB [Sleijpen 93] et Gauss-Seidel.

Dans le but d'améliorer la convergence du processus de calcul, on transforme souvent le système linéaire à résoudre en un autre système qui possède la même solution mais avec des propriétés spectrales plus favorables, donné par la forme :

$$[\mathbf{P}]^{-1}[\mathbf{K}][\mathbf{A}] = [\mathbf{P}]^{-1}[\mathbf{J}_s] \quad (\text{II.51})$$

Dans cette équation la matrice \mathbf{P} s'appelle préconditionneur. En général un bon préconditionneur doit être facile à inverser et ne doit pas être cher à construire. Dans la bibliographie, on trouve plusieurs technique de préconditionnement comme par exemple : la décomposition incomplète LU (ILU), la décomposition incomplète Cholesky (ICHOL) et la matrice diagonale (DIAG).

En effet il n'existe pas une règle générale pour le choix du préconditionneur. Le préconditionnement diagonal, dit aussi de Jacobi, que nous avons choisi et qui consiste à prendre les éléments de \mathbf{P} comme suit :

$$P_{mn} = \begin{cases} K_{mn} & \text{pour } m = n \\ 0 & \text{pour } m \neq n \end{cases} \quad (\text{II.52})$$

Offre l'avantage d'être facile à concevoir, nécessite peu de mémoire de stockage et il converge rapidement avec le solveur BICGSTAB (voir annexe : choix du solveur).

II.6. Algorithme du code de calcul

L'organigramme de la Fig.II.8 résume les principales étapes du code de calcul que nous avons développé sous Matlab.

La fonction de chaque bloc peut être résumée comme suit :

- Affectation des données géométriques et physiques des régions constituant le domaine d'étude, tels que les dimensions des objets, propriétés magnétiques et électriques...etc. Egalement, les conditions aux limites sont introduites à ce niveau.
- Selon les dimensions des objets, on détermine suivant les axes x , y et z pour chaque région le type du maillage (régulier ou irrégulier). A ce niveau là, on définit également la disposition de chaque objet dans le maillage.
- Après définition des types de maillage et les différentes dispositions de chaque région, on construit le maillage global du domaine de calcul.
- Avant la résolution, on commence d'abord par le choix du type de la formulation (AG : avec jauge de Coulomb, SG : sans jauge).
- Ensuite, c'est le choix du solveur à employer (GS : Gauss Seidel, PCG : BICGSTAB avec préconditionnement diagonale).
- Selon le problème considéré (MSL : magnétostatique linéaire, MSNL : magnétostatique non linéaire, MD : magnétodynamique), on résout le système matriciel correspondant.
- Dans le bloc résultats on récupère, selon le type du problème, la distribution des variables calculées en 3D. Les résultats obtenus, permettent aisément ainsi de déterminer la distribution des différentes grandeurs électromagnétiques.

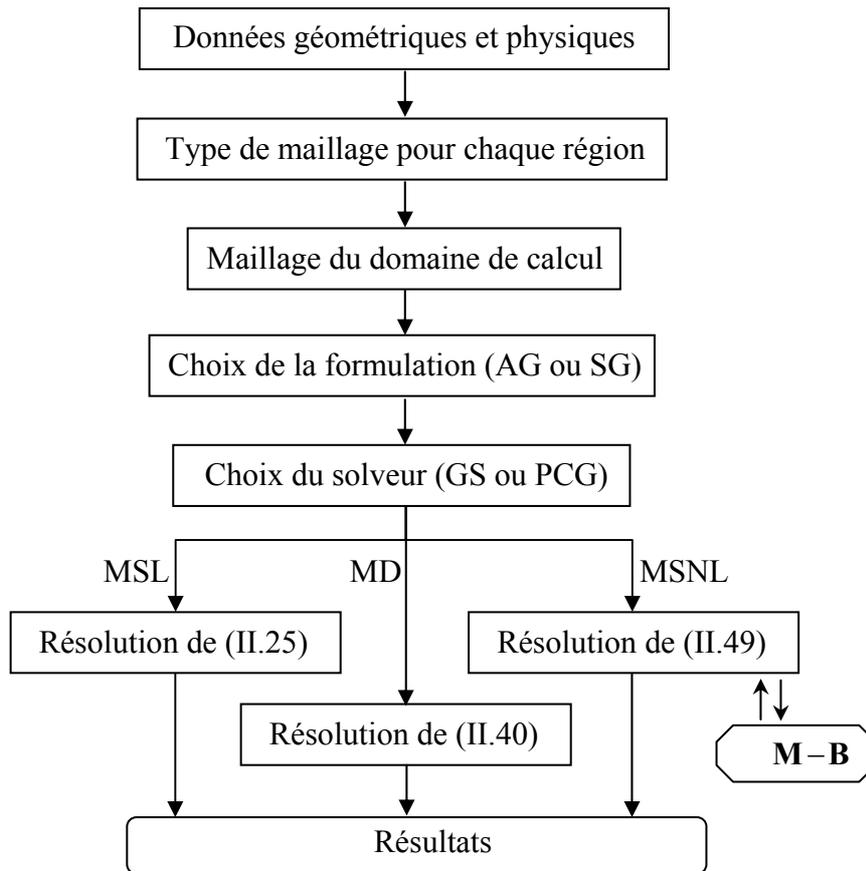


Fig.II.8. Organigramme de l'algorithme du code de calcul

II.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la méthode des volumes finis aux équations aux dérivées partielles établies au chapitre I. Les formes discrétisées correspondantes sont implémentées dans un code de calcul sous l'environnement Matlab, auquel est associé un mailleur tridimensionnel qui génère deux types de maillage ; régulier et irrégulier avec progression logarithmique. Deux différentes dispositions dans le maillage sont représentées par les objets O1 et O2. Cela se fait en fonction de la nature de l'interface objet/air. Une disposition incorrecte peut conduire à un système divergent.

En utilisant deux différents solveurs (PCG et GS), on donne une souplesse importante pour la résolution des systèmes d'équations algébriques. Par rapport au solveur GS, le solveur PCG produit une solution plus proche de la solution exacte dans un temps de calcul réduit. Mais du point de vue consommation de mémoire, le solveur GS est le plus favorable. En effet, pour des systèmes de très grande taille, dans certains cas, la mise en œuvre du solveur PCG est irréalisable.

Afin de modéliser des géométries nécessitant :

- Un maillage localement raffiné
- Une prise en compte du déplacement

Et augmenter, par la suite, la possibilité de la méthode des volumes finis de modéliser des problèmes tridimensionnels particuliers, nous avons développé un maillage de type non conforme, ce qui est le sujet du chapitre suivant.

Chapitre III.

GENERATION DE MAILLAGE NON-CONFORME

ET PRISE EN COMPTE DU DEPLACEMENT

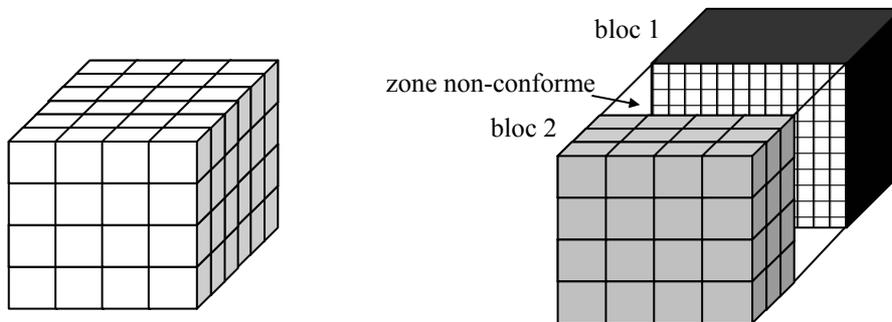
III.1. Introduction	40
III.2. Génération de maillage non-conforme dans la MVF	41
III.2.1. Décomposition du domaine	41
III.2.2. Méthode de connexion	42
III.2.3. Algorithme	46
III.3. Prise en compte du déplacement des parties mobiles	49
III.3.1. Remaillage partiel	49
III.3.2. Bande du mouvement	50
III.3.3. Surface de glissement	51
III.3.4. Multiplicateurs de Lagrange	52
III.3.5. Méthodes d'interpolations	52
III.4. Simulation du déplacement avec le maillage non-conforme	53
III.5. Conclusion	55

III.1. Introduction

Les géométries nécessitant un maillage localement raffiné dans une ou plusieurs régions sont très présentes dans les dispositifs électromagnétiques. La mise en place d'un maillage standard (Fig.III.1.a) est parfois délicate et peut conduire à la résolution de système de grande taille. Plusieurs techniques ont été développées afin de surmonter ce problème, en intervenant soit au niveau du maillage soit au niveau de la résolution du système matriciel obtenu, tels que par exemple, la méthode de décomposition de domaines [Lavers 96], les méthodes Multigrid [De-Gersem 01], les méthodes de maillage unstructuré [Davies 96] ou les méthodes de maillage non-conforme.

La génération de maillage non-conforme a pris une grande place dans de nombreux travaux, appliquée avec succès à une variété de problèmes [Charao 01], [Muramatsu 02] et [Cheriet 07]. Dans la pratique on trouve deux types de maillage non-conforme ; non-conformité entre éléments de maillage et non-conformité multiblocs. Nous nous intéressons dans ce travail par le maillage non-conforme multibloc (Fig.III.1.b), ce type de maillage permet :

- La génération de maillage localement raffiné.
- La prise en compte du déplacement des parties mobiles.
- La parallélisation du processus de calcul.



(a). Maillage standard (conforme)

(b). Maillage non-conforme

Fig.III.1. Maillage 3D en éléments hexaédriques

En plus il permet aisément le couplage entre différents codes de calcul de natures différentes [Talukdar 05]. Pour analyser l'effet de la zone non-conforme sur la continuité du potentiel vecteur magnétique, des travaux ont été réalisés. En effet, la présence de la région non-conforme n'affecte pas la continuité du potentiel vecteur magnétique [Muramatsu 00].

III.2. Génération de maillage non-conforme dans la MVF

Afin de simplifier la compréhension, nous allons illustrer la méthode dans le cas 2D. On choisit également comme modèle d'application, par exemple le modèle magnétostatique linéaire. On rappelle aussi, le domaine d'étude Ω de frontière Γ du premier chapitre (Fig.I.1).

III.2.1. Décomposition du domaine

La première étape dans la stratégie de génération de maillage non-conforme, consiste à décomposer le domaine de calcul en plusieurs blocs (on limite notre étude à deux blocs). Dans la Fig.III.2.a on montre le nouveau domaine de calcul, il est constitué de deux sous régions Ω_1 et Ω_2 interconnectés par une zone dite non-conforme (N-C).

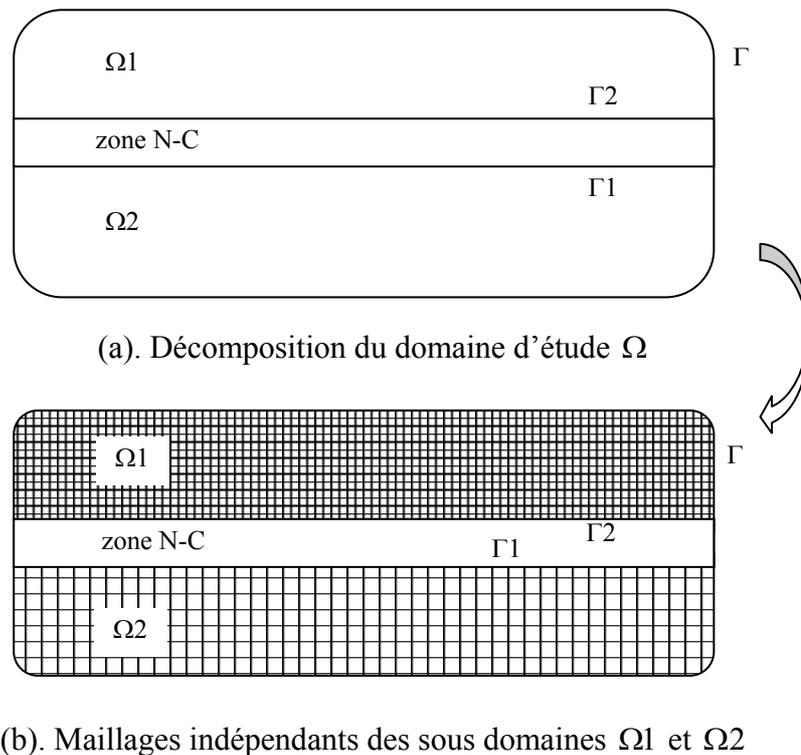


Fig.III.2. Construction du maillage non-conforme

Les régions Ω_1 et Ω_2 sont connectées à la zone N-C à travers les frontières Γ_2 et Γ_1 , respectivement. On a :

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup (\text{zone N-C}) \quad (\text{III.1})$$

La deuxième étape, consiste à mailler indépendamment les deux sous régions Ω_1 et Ω_2 , d'une manière régulière ou irrégulière (Fig.III.2.b). Par la suite, on discrétise indépendamment le modèle de la magnétostatique par la méthode des volumes finis sur ces deux régions. Cela conduit à deux systèmes d'équations matriciels similaires à (II.25). On suppose que le courant source est seulement dans la région Ω_1 , on aura alors :

$$[K_1][A_1]=[J_s] \text{ dans } \Omega_1 \quad (\text{III.2})$$

$$[K_2][A_2]=[0] \text{ dans } \Omega_2 \quad (\text{III.3})$$

Dans (III.2) et (III.3), les indices 1 et 2 représentent respectivement les régions Ω_1 et Ω_2 (par exemple A_1 est le potentiel dans la région Ω_1). En effet, ces deux dernières équations constituent un système incomplet pour la résolution. Cependant, il est nécessaire d'ajouter une équation de couplage qui assure la continuité du potentiel à travers la région N-C. Cette équation est couramment appelée 'équation de connexion'.

III.2.2. Méthode de connexion

Les méthodes de connexion sont nombreuses et elles dépendent de la structure de la zone N-C. D'abord on définit deux types de la zone non-conforme :

- Zone non-conforme d'épaisseur nulle (structure sans recouvrement)
- Zone non-conforme d'épaisseur non nulle (structure avec recouvrement)



(a). Structure avec recouvrement

(b). Structure sans recouvrement

Fig.III.3. Types de la zone non-conforme

Dans le cas sans recouvrement (Fig.III.3.b), la méthode de connexion la plus employée est celle de Mortar [Rapetti 00] et [Bouillault 03]. L'implémentation de cette méthode nécessite une formulation rigoureuse à l'interface de contact. Elle peut être vue comme une version la méthode de Lagrange. Dans [Ben-Belgac 01] on trouve les détails de la mise en œuvre de la méthode de Mortar dans le cas tridimensionnel.

Dans le cas d'un maillage non-conforme avec recouvrement (Fig.III.3.a), on trouve les méthodes d'interpolations nodales qui occupent une grande place. Souvent une interpolation linéaire est considérée pour exprimer le potentiel aux frontières de la zone N-C [Muramatsu 00]. En effet, l'interpolation linéaire est convenable surtout dans le cas 2D ou bien dans les problèmes 3D avec seulement deux directions de non-conformités. Dans le cas d'une non-conformité selon les trois directions (x , y et z), nous avons proposé une méthode de connexion basée sur l'interpolation bilinéaire [Cheriet 07]. Pour sa mise en œuvre, intéressons nous aux nœuds qui se situent sur les deux cotés de la zone N-C. Pour mieux expliquer la méthode, on considère un maillage grossier de faible non-conformité (Fig.III.4.a).

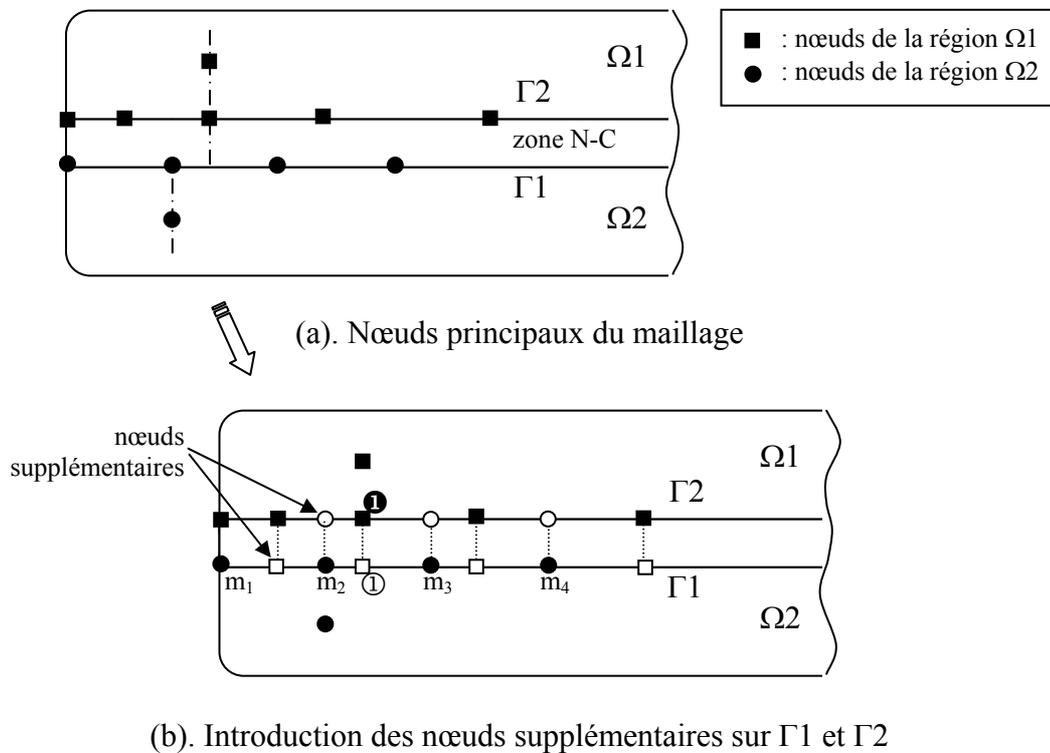


Fig.III.4. Illustration des nœuds de la zone non-conforme

Rappelons qu'une équation de couplage est nécessaire pour la solution de (III.2) et (III.3). Dans l'objectif de la construire, on commence par introduire des nœuds supplémentaires sur les frontières Γ_1 et Γ_2 de la zone non-conforme, comme suit ; à chaque nœud principal des deux cotés de la zone N-C, on ajoute un nœud supplémentaire opposé. Par exemple ① est le nœud supplémentaire ajouté sur la frontière Γ_1 et qui correspond au nœud principal ②. L'étape suivante, consiste à exprimer à l'aide d'une combinaison bilinéaire le potentiel aux différents nœuds supplémentaires en fonction des potentiels aux nœuds principaux voisins. Pour le nœud ①, par exemple, on écrit :

$$\mathbf{A}^{\textcircled{1}} = \sum_{i=2}^3 h_i \mathbf{A}_2^{m_i} \quad (\text{III.4})$$

Où h_i sont des coefficients géométriques correspondants aux distances entre le nœud $\textcircled{1}$ et les nœuds principaux m_i . Dans cette illustration bidimensionnelle, l'expression (III.4) n'est qu'une interpolation linéaire. Cependant, dans le cas 3D on est amené à introduire la notion de l'interpolation bilinéaire ; le nœud $\textcircled{1}$ sera entouré par quatre nœuds principaux sur le plan Γ_1 (Fig.III.5).

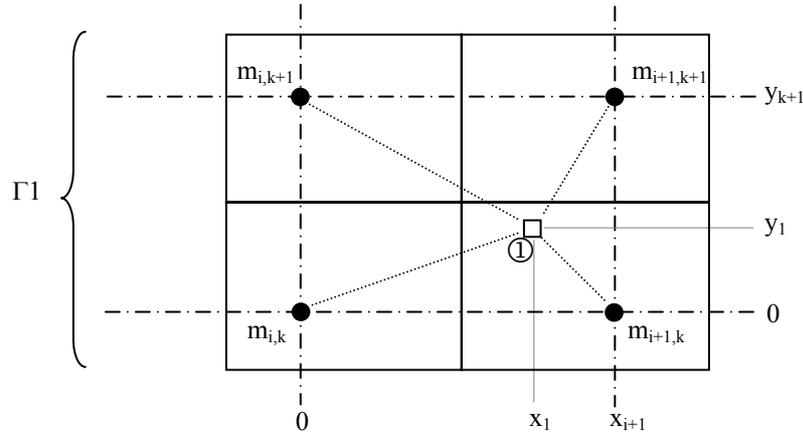


Fig.III.5. Nœud $\textcircled{1}$ sur la surface Γ_1 dans le cas d'une non-conformité 3D

Une fois les indices (i,k) de ces quatre nœuds sont localisés, le potentiel au nœud $\textcircled{1}$ sera exprimé à l'aide d'une interpolation bilinéaire comme suit :

$$\mathbf{A}^{\textcircled{1}} = h_{i,k} \mathbf{A}_2^{(i,k)} + h_{i+1,k} \mathbf{A}_2^{(i+1,k)} + h_{i,k+1} \mathbf{A}_2^{(i,k+1)} + h_{i+1,k+1} \mathbf{A}_2^{(i+1,k+1)} \quad (\text{III.5})$$

Les coefficients de cette expression décrivent les coordonnées locales :

$$\begin{cases} h_{i,k} = \left(1 - \frac{x_1}{x_{i+1}}\right) \left(1 - \frac{y_1}{y_{k+1}}\right) \\ h_{i,k+1} = \left(1 - \frac{x_1}{x_{i+1}}\right) \left(\frac{y_1}{y_{k+1}}\right) \\ h_{i+1,k} = \left(\frac{x_1}{x_{i+1}}\right) \left(1 - \frac{y_1}{y_{k+1}}\right) \\ h_{i+1,k+1} = \left(\frac{x_1}{x_{i+1}}\right) \left(\frac{y_1}{y_{k+1}}\right) \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

Appliquant la même interpolation à l'ensemble des noeuds supplémentaires ajoutés sur la frontière Γ_1 , conduit à la première équation de couplage. Cette équation qui nous garantit la continuité du potentiel de la frontière Γ_1 vers la région Ω_1 , peut être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} [I] & [K_{12}] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\Gamma_1} \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.7})$$

Avec

$$\mathbf{A}_{\Gamma_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{\textcircled{1}} \\ \mathbf{A}^{\textcircled{2}} \\ \mathbf{A}^{\textcircled{3}} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (\text{III.8})$$

Les éléments de la matrice K_{12} représentent les relations géométriques entre les noeuds ajoutés sur Γ_1 et leurs voisins appartenant à la région Ω_2 . I est la matrice identité. Faisons la même chose sur les noeuds supplémentaires ajoutés sur la frontière Γ_2 , nous obtenons la deuxième équation de connexion :

$$\begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [K_{21}] & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_{\Gamma_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

Le vecteur \mathbf{A}_{Γ_2} représente les valeurs du potentiel aux noeuds supplémentaires ajoutés sur la frontière Γ_2 . La matrice K_{21} représente la relation géométrique entre les noeuds supplémentaires sur Γ_2 et leurs voisins principaux de la région Ω_1 .

Une fois les deux relations de connexions (III.7) et (III.9) sont obtenues, on procède à la construction du système matriciel global. Tenant compte de (III.2) et (III.3), on aura :

$$\begin{bmatrix} [K_1] & [K_1^{\Gamma_1}] & [0] & [0] \\ [0] & [I] & [K_{12}] & [0] \\ [0] & [0] & [K_2] & [K_2^{\Gamma_2}] \\ [K_{21}] & [0] & [0] & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_{\Gamma_1} \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_{\Gamma_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.10})$$

Sous une forme condensée, on écrit :

$$[K^{N-C}] [\mathbf{A}] = [\mathbf{J}_s] \quad (\text{III.11})$$

On appelle K^{N-C} la matrice globale de la discrétisation non-conforme. Les sous matrices $K_1^{\Gamma_1}$ et $K_2^{\Gamma_2}$ dans (III.10) relient respectivement, Γ_1 à Ω_1 et Γ_2 à Ω_2 (Fig.III.6).

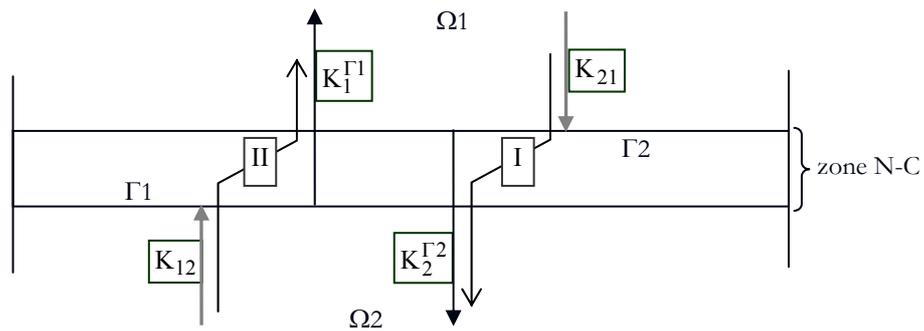


Fig.III.6. Différentes sous matrices de connexions de la zone N-C

Dans la Fig.III.6, on montre aussi les deux cycle (I) et (II) qui ont un intérêt dans la parallélisation du processus de calcul.

III.2.3. Algorithme

Les principales étapes de génération et de connexion du maillage non-conforme sont résumées par l'organigramme de la Fig.III.7, dont la fonction de chaque bloc est donnée comme suit :

- La décomposition du domaine global en un nombre de sous domaines. Ici nous avons considéré seulement deux sous domaines. Cependant, avec un simple changement, on peut passer à plusieurs sous domaines.
- Maillage des différents sous domaines, avec des grilles indépendantes d'un sous domaine à l'autre.
- Calcul des coefficients des matrices principales de chaque sous domaine.
- Localisation des nœuds des différents maillages coïncidant avec les frontières de la zone non-conforme.
- A l'aide d'un sous programme, on ajoute pour chaque nœud principal situé sur Γ_1 ou Γ_2 un nœud supplémentaire opposé.
- Ensuite, on calcule l'ensemble des sous matrices données par la Fig.III.6. Ces matrices font l'objet de la connexion des frontières de la zone N-C avec les sous domaines.
- Enfin, selon la taille du système global à résoudre, on fait le choix du solveur.

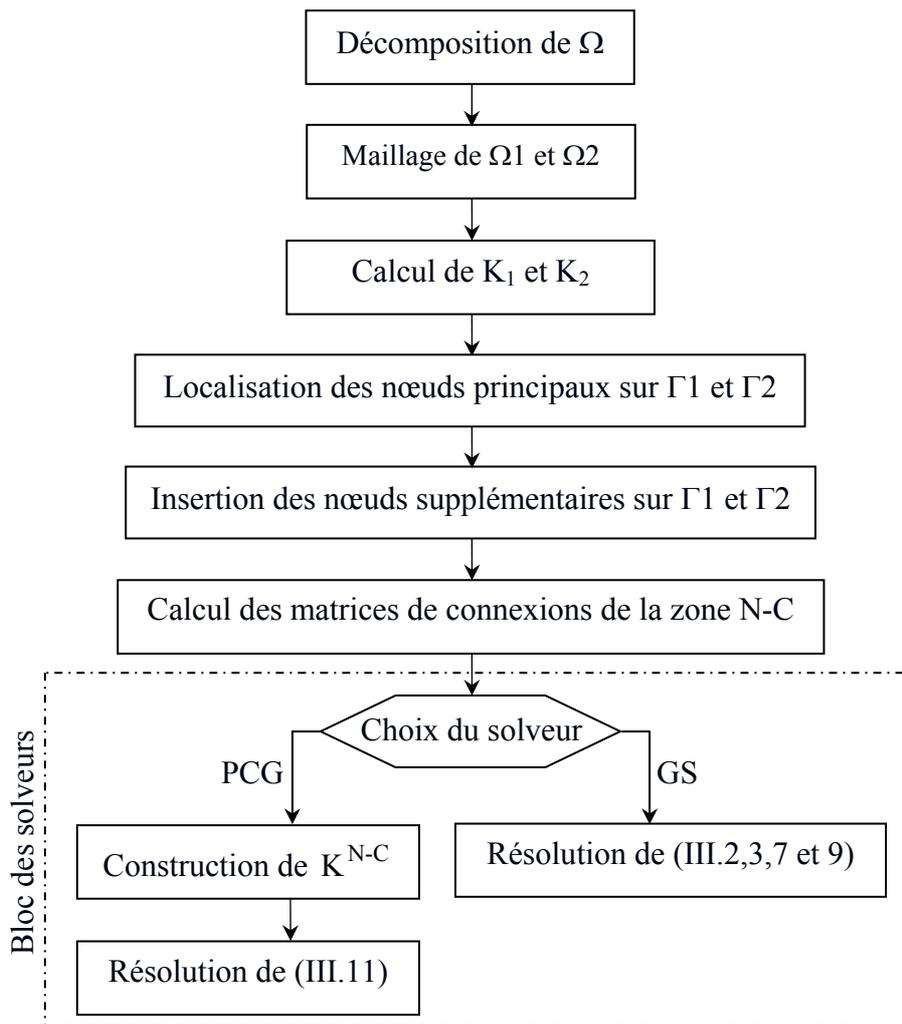


Fig.III.7. Algorithme de génération de maillage 3D non-conforme

Dans le cas du solveur PCG, on résout le système suivant :

$$[P]^{-1} [K^{N-C}][A] = [P]^{-1} [J_s] \quad (III.12)$$

Ici, les éléments du préconditionneur P sont :

$$P_{mn} = \begin{cases} K_{mn}^{N-C} & \text{pour } m = n \\ 0 & \text{pour } m \neq n \end{cases} \quad (III.13)$$

Dans le cas du solveur Gauss Seidel, on résout comme suit. Itérer successivement les deux sous systèmes (III.2) et (III.3) en tenant compte des relations de couplage (III.7) et (III.9) au lieu de résoudre directement le système global (III.11). Cela peut réduire considérablement le temps de calcul, en plus la construction de deux sous systèmes au lieu

le système global est beaucoup moins cher concernant l'espace mémoire. Ainsi, on résume la boucle d'itération comme suit :

Initialisation $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = 0$
tant que $\text{err} > \text{pr}$
 calculer \mathbf{A}_1 de (III.2)
 interpoler \mathbf{A}_{Γ_1} de (III.7)
 calculer \mathbf{A}_2 de (III.3)
 interpoler \mathbf{A}_{Γ_2} de (III.9)
fin

III.3. Prise en compte du déplacement des parties mobiles

Les parties mobiles sont très nombreuses dans les systèmes d'électrotechnique ; comme dans les machines électriques (rotation du rotor), les applications de contrôle non destructif par courant de Foucault (translation de la bobine),...etc. La modélisation de tels systèmes demeure nécessaire, afin d'avoir le plus d'informations possibles sur leurs comportement pour plusieurs positions.

Dans la littérature, on trouve deux familles de méthodes pour la prise en compte du déplacement des parties mobiles. La première, basée sur l'utilisation d'un seul référentiel, utilise explicitement le terme de déplacement dans la formulation. Elle peut être appliquée à des structures simples, ayant la partie mobile homogène et invariante par le déplacement [Golovanov 97]. En effet, dans ce régime dynamique, la modélisation est parfois délicate lorsqu'il s'agit de suivre en même temps le déplacement et la diffusion des champs notamment dans le cas tridimensionnel [Mezani 04].

Souvent on fait recours à la deuxième famille, qui consiste à décomposer le calcul en deux étapes. Alors pour une position donnée, on calcule les variables (potentiels, champs,...). La solution globale est construite par l'ensemble des solutions correspondantes aux différentes positions.

Plusieurs méthodes ont été développées pour l'analyse statique, qui fait appel à la modélisation pour différentes positions de la partie mobile. La plus standard est celle basée sur la génération d'un nouveau maillage pour chaque position. Cette méthode conduit souvent à un poste pré-processeur fastidieux et coûteux, notamment dans les problèmes tridimensionnels. Dans cette deuxième partie de ce chapitre, nous allons exposer les méthodes les plus rencontrées dans la pratique et appartenant à la deuxième famille. Par la suite, nous montrons l'implémentation de la technique de maillage non-conforme pour la prise en compte du déplacement.

III.3.1. Remaillage partiel

La stratégie du remaillage partiel consiste à diviser le maillage du domaine en trois zones, représentées par trois rectangles dans la Fig.III.8 :

- Zone 1 : Comprend la partie en déplacement (maillage mobile).
- Zone 2 : Entourant la zone 1, fait l'objet d'un maillage compressible pour chaque position de la zone 1. Dans la Fig.III.8, nous avons dessiné deux parties du maillage de cette zone, pour montrer l'effet de la compression.
- Zone 3 : Le reste de la géométrie (maillage fixe).

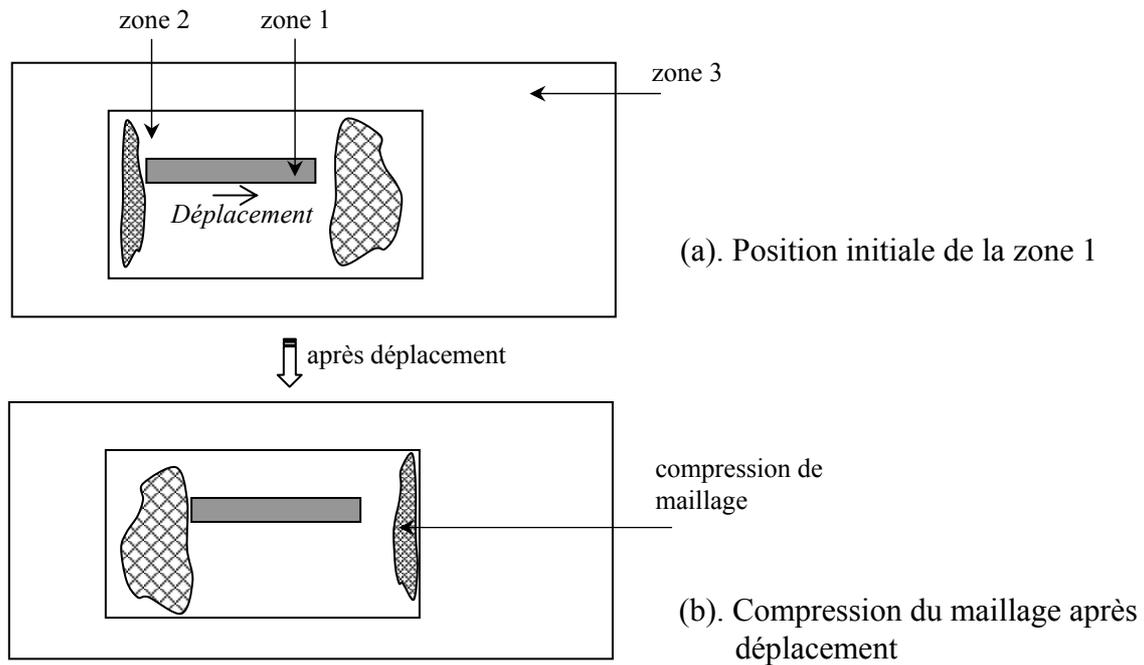


Fig.III.8. Technique de remaillage partiel

Le choix d'un maillage de départ grossier suivant le sens positif du déplacement et fin dans le sens contraire, peut être utile pour éviter un taux important de compression. Notons que, malgré la déformation que subit le maillage de la zone 2, le maillage global constitué par les trois zones reste conforme.

Cette première méthode est très simple, elle ne nécessite ni l'introduction de inconnues supplémentaires ni formulation spécifique. Cependant, elle est très coûteuse en terme de temps écoulé au niveau du poste pré-processeur. En plus, l'implémentation en 3D est très délicate. Notons que dans cette méthode la matrice globale du système change selon le déplacement. Cela conduit à un bruit dans la solution numérique, parce que la précision de calcul change également d'une position à l'autre [Perrin-Bitt 95]. Cette technique peut être employée comme une technique complémentaire à une autre quand celle-ci devient insuffisante. Par exemple dans [Sadowski 92], on la trouve associée à la méthode de la bande de mouvement.

III.3.2. Bande du mouvement

La technique de la bande de mouvement [Davat 85] est très utilisée pour prendre en compte le mouvement dans les machines électriques. Dans le cas 2D, elle consiste à créer une zone intermédiaire (bande d'éléments conformes) entre les parties mobiles et fixes (Fig.III.9). Durant le déplacement, les maillages des parties mobiles et fixes restent

inchangés et le maillage de la bande de mouvement est modifié (distorsion d'éléments) pour assurer une meilleur connexion. Cependant, au fur et à mesure que le déplacement augmente, la distorsion des éléments de la bande augmente aussi. Lorsque la déformation est importante, il devient nécessaire de remailler la bande [Vassent 91].

L'inconvénient majeur de la bande de mouvement c'est que la précision de la solution est trop affectée par le changement de connectivité entre nœuds mobiles/fixes. Il reste à noter que l'extension de cette technique pour le cas 3D, est conditionnée par un maillage régulier [Kawase 95].

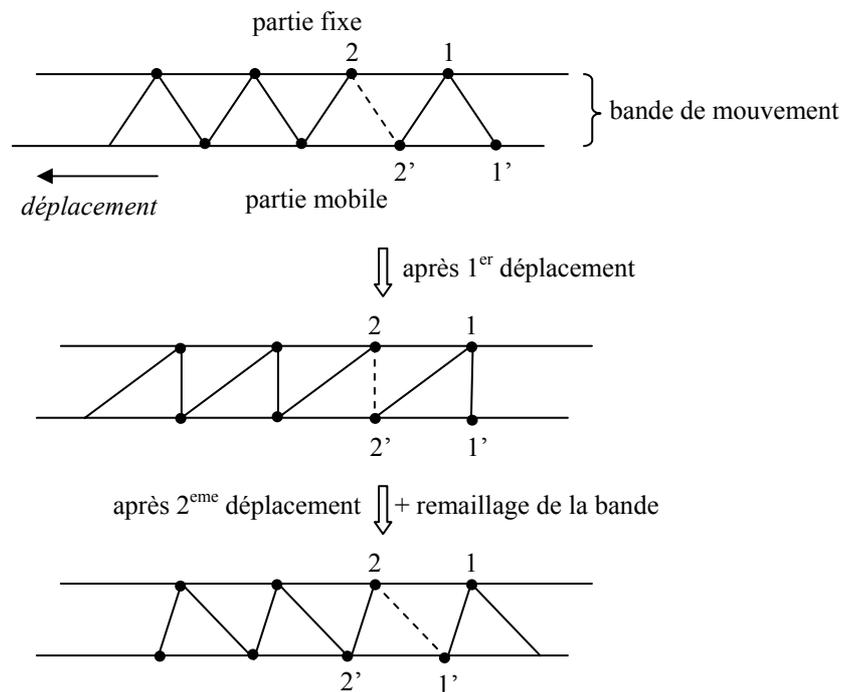


Fig.III.9. Technique de la bande de mouvement

III.3.3. Surface de glissement

Dans le cas 3D, les maillages des parties mobiles et fixes sont liés par l'intermédiaire d'une surface dite surface de glissement [Boualem 98]. Une telle technique impose une contrainte sur le maillage, cependant elle exige un pas de déplacement égal au multiple du pas de maillage de la zone de connexion. En plus, il faut s'assurer que le maillage reste conforme quel que soit le déplacement. Cette méthode est relativement facile à mettre en œuvre, elle utilise une permutation des inconnues au niveau de la surface de glissement. La Fig.III.10, illustre la méthode en 2D (ligne de glissement).

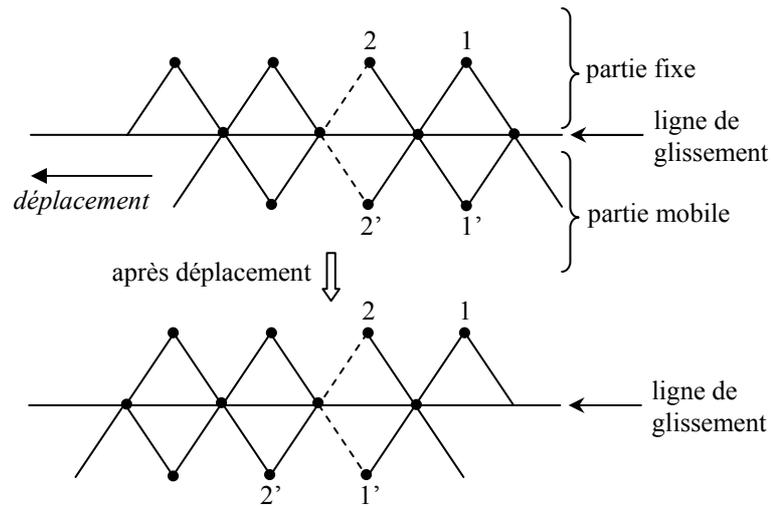


Fig.III.10. Technique de la ligne de glissement

III.3.4. Multiplicateurs de Lagrange

Les multiplicateurs de Lagrange, font l'objet d'une méthode de connexion de deux maillages indépendants (mobiles et fixes) [Lai 92]. Cette technique, en considérant les éléments finis, est basée sur la modification du fonctionnel classique à minimiser [Golovanov 98] pour assurer la continuité du potentiel à travers la zone de couplage. Cette méthode peut être appliquée à n'importe quel type de formulation, en plus le pas de déplacement est indépendant des maillages des deux régions. Néanmoins, le système global obtenu par discrétisation contient des inconnues supplémentaires (multiplicateurs de Lagrange). En outre, le calcul numérique des intégrales de couplage est assez complexe [Maréchal 92].

III.3.5. Méthodes d'interpolations

Dans la majorité des travaux traitant le terme du déplacement, sont les méthodes d'interpolations qui sont les plus employées [Perrin-Bitt 95], [Golovanov 98], [Muramatsu 00] et [Muramatsu 05]. La plupart de ces travaux confirment l'efficacité des interpolations dans l'analyse des problèmes de déplacements. Dans ces méthodes, souvent les valeurs nodales du potentiel aux nœuds du maillage mobile sont exprimées par une fonction d'interpolation en fonction du potentiel aux nœuds du maillage fixe.

Ce type de méthodes est plus performant que les méthodes basées sur les multiplicateurs de Lagrange du point de vue convergence du système matriciel global [Golovanov 98]. Par la suite, nous allons employer les interpolations nodales pour la simulation du déplacement

dans la méthode des volumes finis, cela en exploitant le maillage non-conforme que nous avons développé.

III.4. Simulation du déplacement avec le maillage non-conforme

On considère la configuration de la Fig.III.4.b. On appelle maillage mobile celui de la région Ω_1 et maillage fixe celui de la région Ω_2 . Après un déplacement de δx de Ω_1 , on retrouve une nouvelle configuration donnée par la Fig.III.11. Notons que le déplacement δx est indépendant des pas de maillage.

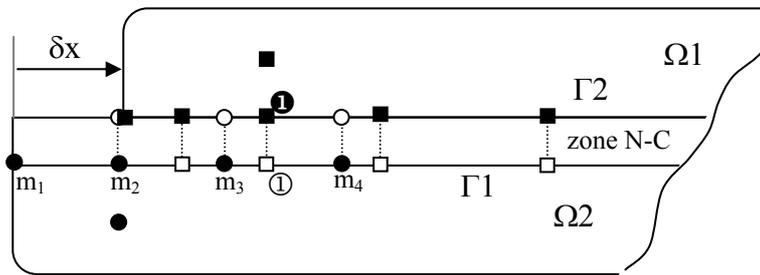


Fig.III.11. Après un déplacement de δx du maillage mobile (Ω_1)

Dans cette nouvelle configuration bidimensionnelle, les nœuds supplémentaires ajoutés sur les frontières Γ_1 et Γ_2 acquièrent une nouvelle position. Par exemple le nœud ① se retrouve ici entre les nœuds principaux m_3 et m_4 . Ainsi, on réécrit :

$$\mathbf{A}^{\textcircled{1}} = \sum_{i=3}^4 h_i \mathbf{A}^{m_i} \quad (\text{III.14})$$

En 3D le potentiel au nœud ① sera exprimé à l'aide d'une interpolation bilinéaire similaire à celle donnée par l'équation (III.5), sauf que les coefficients qui décrivent les coordonnées locales ($h_{i,k} \dots$), possèdent des valeurs différentes.

En appliquant l'interpolation bilinéaire sur l'ensemble des nœuds supplémentaires, nous obtenons deux nouvelles relations de connexions substituant ceux de la position de départ (III.7) et (III.9) :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{I}] \\ [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{12}^{\delta x} \\ [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\Gamma_1} \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] \\ [0] \end{bmatrix} \quad (\text{III.15})$$

$$\begin{bmatrix} [0] \\ [K_{21}^{\delta x}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0] \\ [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_{\Gamma 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.16})$$

Les sous matrices de connexion $K_{12}^{\delta x}$ et $K_{21}^{\delta x}$ sont relatives à la nouvelle position. Le système global ainsi obtenu est donné par :

$$\begin{bmatrix} [K_1] & [K_1^{\Gamma 1}] & [0] & [0] \\ [0] & [I] & [K_{12}^{\delta x}] & [0] \\ [0] & [0] & [K_2] & [K_2^{\Gamma 2}] \\ [K_{21}^{\delta x}] & [0] & [0] & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_{\Gamma 1} \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_{\Gamma 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.17})$$

Remarquons qu'à l'exception de $K_{12}^{\delta x}$ et $K_{21}^{\delta x}$, les autres sous matrices dans (III.17) restent inchangées. Alors pour plusieurs déplacements successives, la mise à jour du système (III.17) est effectuée seulement au niveau de $K_{12}^{\delta x}$ et $K_{21}^{\delta x}$. Le schéma de la Fig.III.12 illustre le cas de plusieurs déplacements. On rappelle que le pas de déplacement pas(i) est indépendant du maillage.

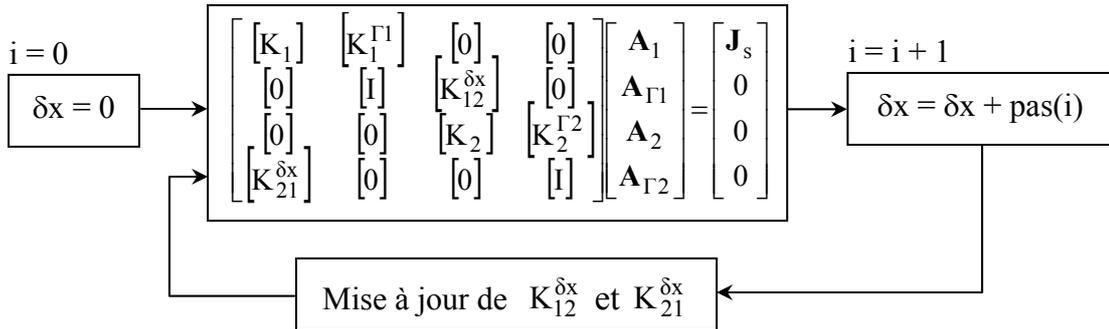


Fig.III.12. Plusieurs positions du maillage mobile

Dans l'algorithme de génération du maillage non-conforme donné par la Fig.III.7, nous avons intégré un sous programme supplémentaire qui permet la prise en compte du déplacement. Ce sous programme représenté par le bloc δx , est inséré entre le bloc des solveurs et le bloc d'insertion des nœuds supplémentaires (Fig.III.13).

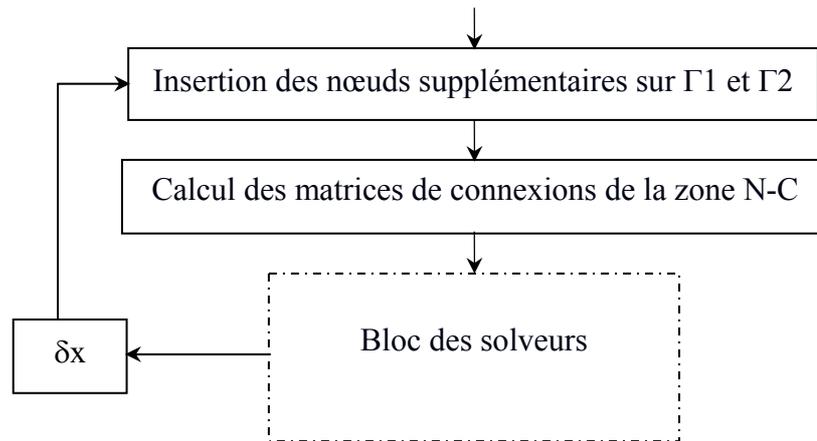


Fig.III.13. Prise en compte du déplacement dans l'algorithme

III.5. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons introduit deux nouveaux aspects dans le domaine de la modélisation par les volumes finis des problèmes d'électrotechnique :

- La génération de maillage non-conforme multiblocs
- La prise en compte du déplacement des parties mobiles

Dans un premier temps, nous avons insisté sur l'intérêt de la technique du maillage non-conforme pour les problèmes nécessitant un maillage localement raffiné ou la prise en compte du déplacement des parties mobiles. En effet, cette technique est basée essentiellement sur l'utilisation de deux méthodes, la première est la décomposition du domaine et la deuxième est l'interpolation bilinéaire. La mise en œuvre de la méthode des volumes finis sur un maillage non-conforme, permet en plus de décomposer la matrice du système global obtenue par une méthode standard en sous matrices de tailles inférieures et qui peuvent être résolus plus rapidement. Afin de simplifier l'explication de la méthode, nous avons considéré le problème magnétostatique où l'interpolation bilinéaire est appliquée sur le potentiel vecteur magnétique. Pour le modèle magnétodynamique, la même procédure d'interpolation sera appliquée aussi sur le potentiel scalaire électrique.

La deuxième partie de ce chapitre a été consacrée à la prise en compte du déplacement. Nous avons cité les méthodes les plus rencontrées dans la bibliographie (bande de mouvement, surface de glissement,...etc.). La plupart de ces méthodes exigent soit un pas de déplacement conforme aux pas du maillage soit une formulation spécifique. Le choix de l'extension du maillage non-conforme qui nécessite une généralisation de l'algorithme de l'interpolation bilinéaire pour différentes positions, permet facilement de prendre un pas de déplacement indépendant du maillage.

Dans le chapitre suivant, nous allons appliquer la technique du maillage non-conforme sur quelques cas tests de problèmes de Workshop. Egalement, nous allons tester l'algorithme de prise en compte du déplacement sur un dispositif concernant un problème de contrôle non destructif par courant de Foucault. Il s'agit de simuler le déplacement de la bobine d'inspection.

Chapitre IV.

TESTS ET VALIDATIONS: PROBLEMES WORKSHOP

IV.1. Introduction	57
IV.2. Magnétostatique linéaire	58
IV.2.1. Le problème IEEJ standard	58
IV.2.1.1. Description du problème	59
IV.2.1.2. Modélisation avec maillage standard	59
IV.2.1.2.1. Maillage	59
IV.2.1.2.2. Résultats	61
IV.2.1.3. Modélisation avec maillage non-conforme	65
IV.2.1.3.1. Maillage	65
IV.2.1.3.2. Résultats	66
IV.2.2. Le problème IEEJ avec armature	69
IV.2.2.1. Description du problème	69
IV.2.2.2. Modélisation avec maillage standard	69
IV.2.2.2.1. Maillage	70
IV.2.2.2.2. Résultats	71
IV.2.2.3. Modélisation avec maillage non-conforme	73
IV.2.2.3.1. Maillage	73
IV.2.2.3.2. Résultats	74
IV.3. Magnétostatique non linéaire : problème TEAM#13	77
IV.3.1. Description du problème	77
IV.3.2. Maillage	78
IV.3.3. Résultats	80
IV.3.4. Effet du terme de relaxation λ	83
IV.4. Magnétodynamique : problème JSAEM#6	86
IV.4.1. Description du problème	86
IV.4.2. Modélisation avec maillage standard	87
IV.4.2.1. Maillage	87
IV.4.2.2. Résultats	87
IV.4.3. Modélisation avec maillage non-conforme : simulation du déplacement	92
IV.4.3.1. Maillage	92
IV.4.3.2. Résultats	93
IV.5. Conclusion	97

IV.1. Introduction

Les trois modèles volumes finis développés ; magnétostatique linéaire (MSL), magnétostatique non linéaire (MSNL) et magnétodynamique (MD), sont implémentés dans le code de calcul MVF3D. Sous l'environnement Matlab, le mailleur tridimensionnel du code MVF3D qui est à base d'éléments hexaédriques, génère trois types de maillage : régulier, irrégulier et non-conforme. Pour prendre en compte le déplacement d'une partie mobile il suffit de fixer, dans le maillage non-conforme à deux blocs, le point de départ et le point d'arrêt ainsi que le ou les pas de déplacements du bloc mobile. Dans la Fig.IV.1, on montre un schéma descriptif du code.

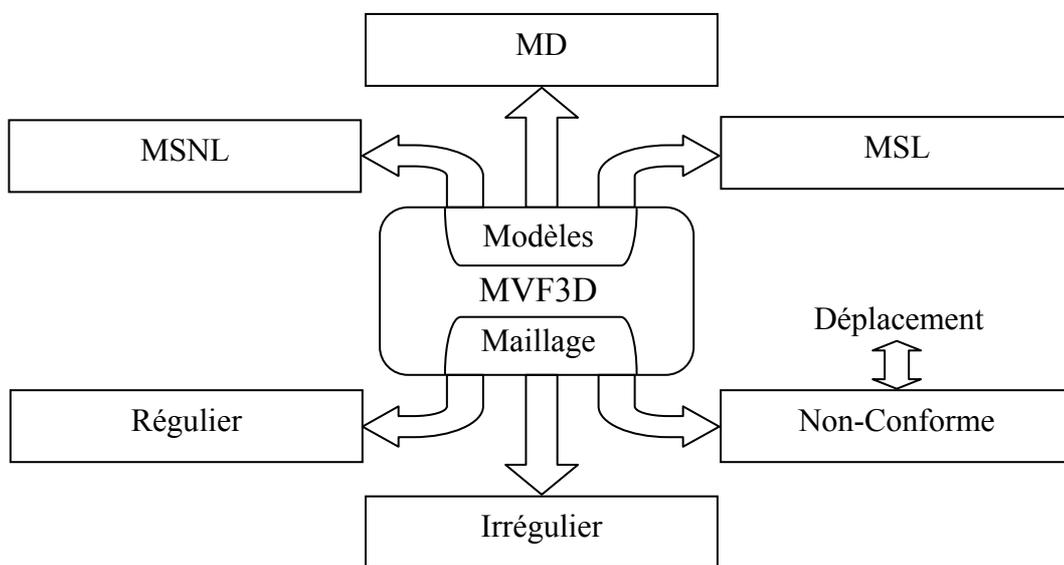


Fig.IV.1. Schéma descriptif du code MVF3D

Dans ce chapitre, nous allons tester le code MVF3D sur quelques cas tests du Workshop destinés à comparer et valider les codes de calcul des champs électromagnétiques :

- En magnétostatique linéaire, deux problèmes proposés par IEEJ 'Institute of Electrical Engineers of Japan'.
- En magnétostatique non linéaire, un exemple de TEAM Workshop, c'est le plus rencontré dans la bibliographie pour l'analyse des formulations magnétostatiques non linéaires.
- En magnétodynamique, nous avons considéré un quatrième problème qui concerne un dispositif de contrôle non destructif par courant de Foucault proposé par JSAEM 'Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics'. Ce problème, fait l'objet de calcul des courants induits dans une plaque conductrice ainsi que le calcul de l'impédance de la bobine.

La validation de l'algorithme de prise en compte du déplacement sera effectuée à l'aide du problème test de contrôle non destructif. Il s'agit de simuler, avec le maillage non-conforme, le déplacement de la bobine d'inspection. Afin d'étudier l'effet de la jauge de Coulomb sur la convergence, ces problèmes tests sont modélisés successivement à l'aide des formulations jaugées et non jaugées. Il reste à noter, que dans l'ensemble des calculs, seul les conditions aux limites types Dirichlet sont considérées. Ainsi, pour un problème donné, le dispositif doit être enfermé dans une boîte d'air qui est assez grande pour imposer les potentiels \mathbf{A} et v nuls aux frontières.

Par la suite, on va utiliser les notations suivantes :

N_t : nombre total des volumes finis (ou nœuds) dans le domaine du calcul.

N_{ch} : nombre des volumes finis dans la charge.

N_{ind} : nombre des volumes finis dans l'inducteur (bobine).

N_{air} : nombre des volumes finis dans l'air.

AG : formulation avec la jauge de Coulomb.

SG : formulation sans jauge.

IV.2. Magnétostatique linéaire

Dans cette première partie de ce chapitre, on va modéliser deux problèmes proposés par IEEJ, connus dans la bibliographie par :

- IEEJ standard
- IEEJ avec armature

Après une brève description, chaque problème sera modélisé avec les deux types de maillage : maillage conventionnel (standard) et maillage non-conforme.

IV.2.1. Le problème IEEJ standard

Le problème IEEJ standard, traité par plusieurs auteurs, fait l'objet d'évaluation de l'erreur de calcul du champ magnétostatique aux voisinages de l'interface air/fer [Sawa 90] et [Kanayama 90]. Par la suite, on va résoudre ce problème et on va calculer l'induction magnétique aux voisinages de cette interface. Ensuite on va comparer les résultats obtenus avec les mesures expérimentales données par [Minciunescu 98].

IV.2.1.1. Description du problème

Le problème IEEJ standard consiste en un noyau de fer (charge) et une bobine d'excitation avec 3000AT. La perméabilité relative du noyau est $\mu_r = 1000$ (Fig.IV.2).

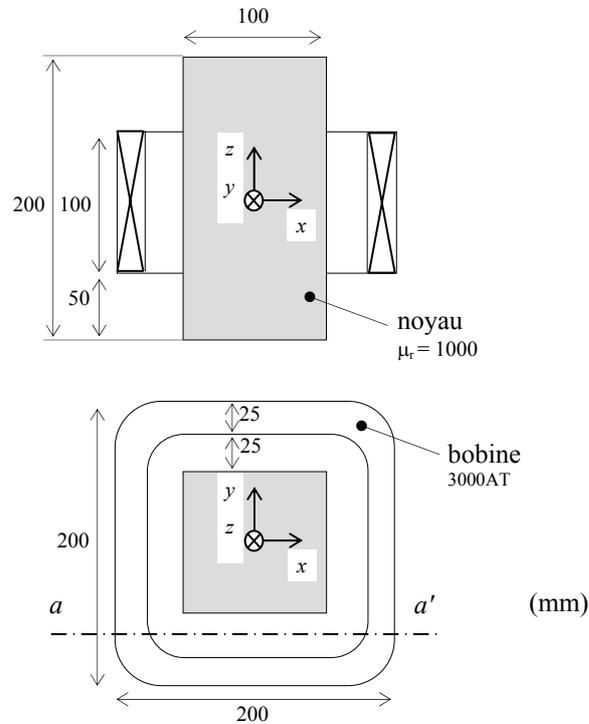


Fig.IV.2. Description du problème IEEJ standard

IV.2.1.2. Modélisation avec maillage standard

Nous avons considéré deux cas :

Cas 1 : $N_t = 91035$, $N_{ch} = 9261(21 \times 21 \times 21)$, $N_{ind} = 3976$, $N_{air} = 77798$.

Cas 2 : $N_t = 42025$, $N_{ch} = 2197(13 \times 13 \times 13)$, $N_{ind} = 2912$, $N_{air} = 36916$.

IV.2.1.2.1. Maillage

Les Fig.IV.3 et Fig.IV.4 montrent respectivement le domaine de calcul entier (boite d'air contenant le dispositif) et le dispositif IEEJ standard. Le maillage est réalisé avec $N_t = 91035$, $N_{ch} = 9261$, $N_{ind} = 3976$ et $N_{air} = 77798$. Une vue dans le plan x - y montre la conformité d'un maillage de type standard (Fig.IV.5).

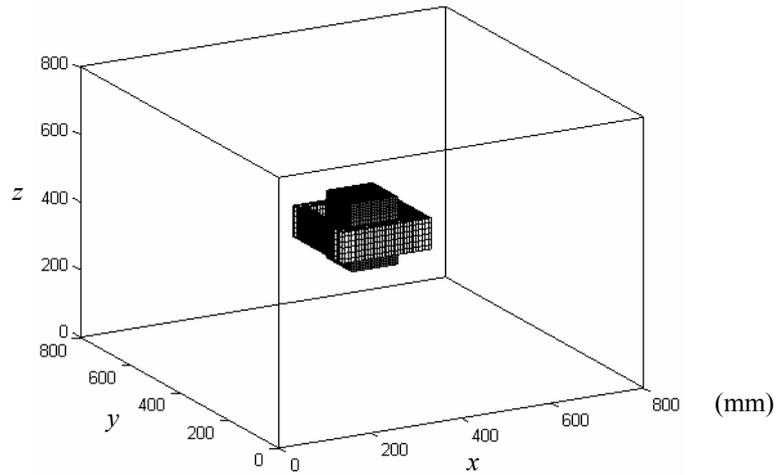


Fig.IV.3. Description de la boîte d'air du problème IEEJ standard, $N_t = 91035$

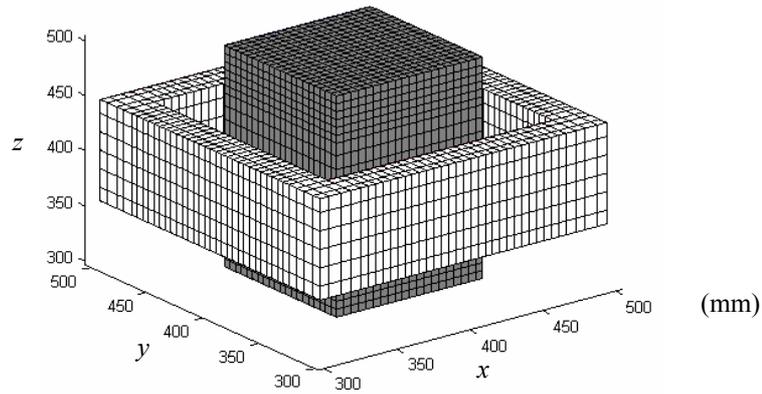


Fig.IV.4. Maillage du dispositif IEEJ standard

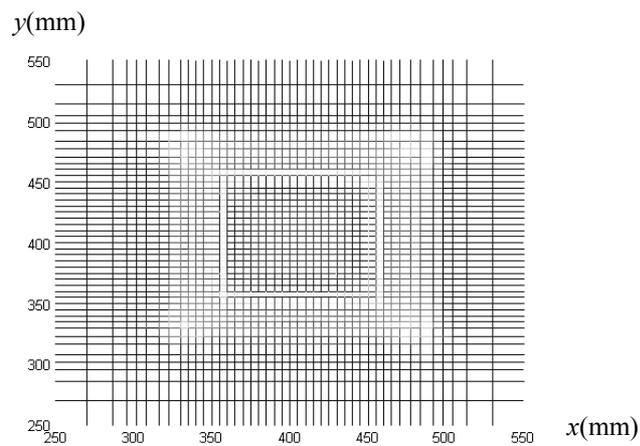


Fig.IV.5. Conformité du maillage standard dans le plan x-y

IV.2.1.2.2. Résultats

La résolution des systèmes matriciels correspondants aux formulations avec jauge (AG) et sans jauge (SG), est effectuée par le solveur BICGSTAB avec préconditionneur Jacobien. La précision de calcul est 10^{-6} et le nombre maximal d'itérations est fixé à 10000.

On considère le repère des coordonnées de la Fig.IV.2. La composante z de l'induction magnétique (B_z) dans l'air avec 10mm au dessus de la surface supérieure du noyau est montrée sur la Fig.IV.6. Ce trajet ($y = 6.25\text{mm}$, $z = 110\text{mm}$) est souvent choisi pour évaluer la précision de calcul aux voisinage de l'interface air/fer [Sawa 90]. Dans la Fig.IV.6, sont comparés les résultats de calcul obtenus avec $N_t = 91035$ et les résultats expérimentaux.

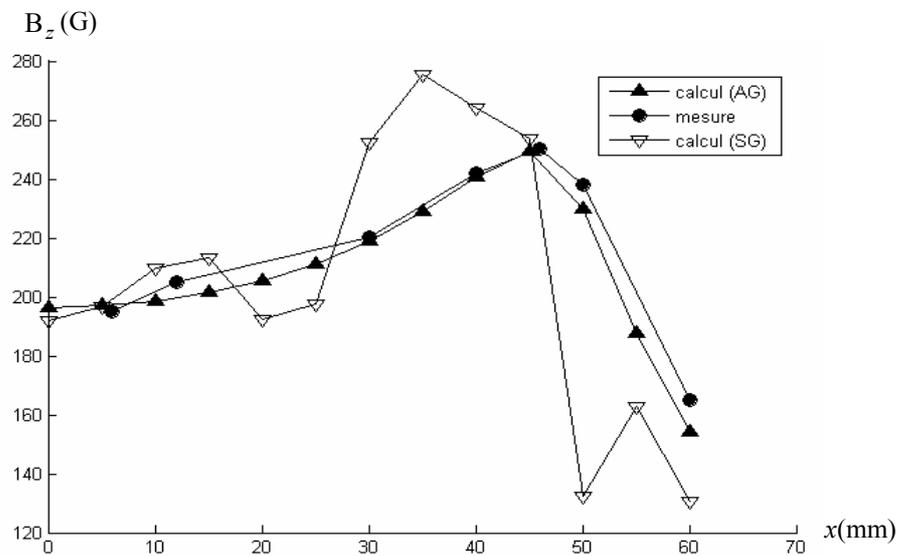


Fig.IV.6. Composante z de l'induction magnétique pour $y = 6.25\text{mm}$ et $z = 110\text{mm}$, $N_t = 91035$

Egalement, dans la Fig.IV.7 sont montrés les résultats pour $N_t = 42025$. Le fait d'introduire la jauge de Coulomb dans la formulation (AG) entraîne une stabilité de calcul et une meilleure répartition de l'induction magnétique. En revanche, la distribution de l'induction magnétique est erronée en l'absence de la jauge de Coulomb. On note aussi le nombre élevé d'itérations dans le cas de la formulation SG (tableau IV.1). Ce phénomène lent de la convergence est confirmé également dans plusieurs travaux de modélisation par éléments finis, tel que par exemple dans [Biro 96].

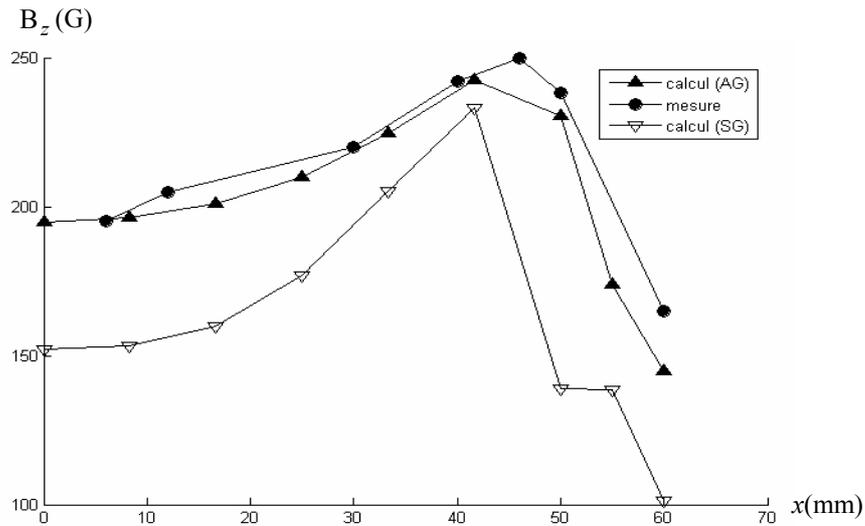


Fig.IV.7. Composante z de l'induction magnétique pour $y = 6.25\text{mm}$ et $z = 110\text{mm}$, $N_t = 42025$

Bien entendu, la convergence n'est pas assurée dans le cas sans jauge (SG). Dans la Fig.IV.7, la précision de la formulation AG est légèrement affectée par la diminution de la densité du maillage. Le tableau.IV.1, résume les données du calcul pour les deux cas de densité de maillage, en considérant les deux formulations AG et SG.

N_t	Formulation	CPU (s)	Itérations	Err.moy (%)	Err.max (%)
91035	AG	113	158	2.38	6.47
	SG	10873	9560	14.62	44.33
42025	AG	37	117	3.79	12.15
	SG	4976	8822	24.25	41.65

Tableau.IV.1. Données du calcul du problème IEEJ standard

L'erreur moyenne (Err.moy) et l'erreur maximale (Err.max) de la composante z de l'induction magnétique sont calculées selon le trajet x donné par la Fig.IV.7. La formule utilisée pour évaluer l'erreur à chaque point du trajet est la suivante :

$$\text{Err} = \frac{B_{z \text{ num}} - B_{z \text{ exp}}}{B_{z \text{ exp}}} 100 \% \quad (\text{IV.1})$$

Où $B_{z_{num}}$ et $B_{z_{exp}}$ représentent, respectivement, les valeurs calculée et mesurée de la composante z de l'induction magnétique. Dans la Fig.IV.8, pour $N_t = 91035$, sont montrés les distributions des vecteurs de l'induction magnétique dans le plan $x-z$, avec y : centre du noyau. Il est clair qu'une bonne distribution est obtenue avec les deux formulations.

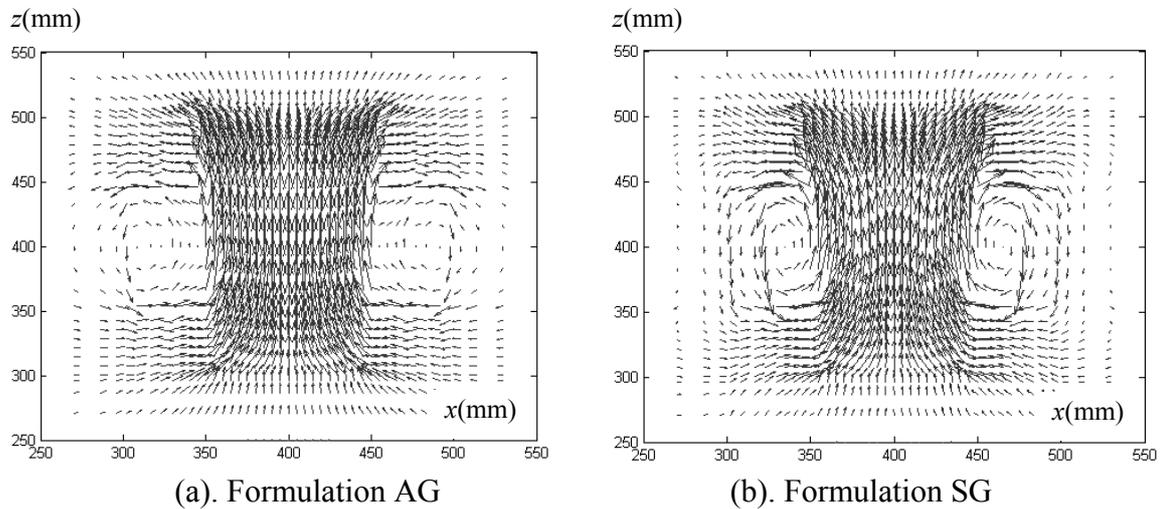


Fig.IV.8. Distribution de l'induction magnétique dans le plan $x-z$, y : centre du noyau

En revanche, dans la Fig.IV.9 on montre la distribution des vecteurs de l'induction magnétique dans l'entrefer ; plan $a-a'$ (Fig.IV.2). La formulation SG produit une répartition désordonnée des vecteurs de l'induction magnétique. Le résultat obtenu avec la formulation AG montre une bonne concordance selon la loi d'Ampère. Cette différence entre les deux formulations est également montrée sur la Fig.IV.10, il devient clair que les résultats obtenus par la formulation SG sont sous estimés.

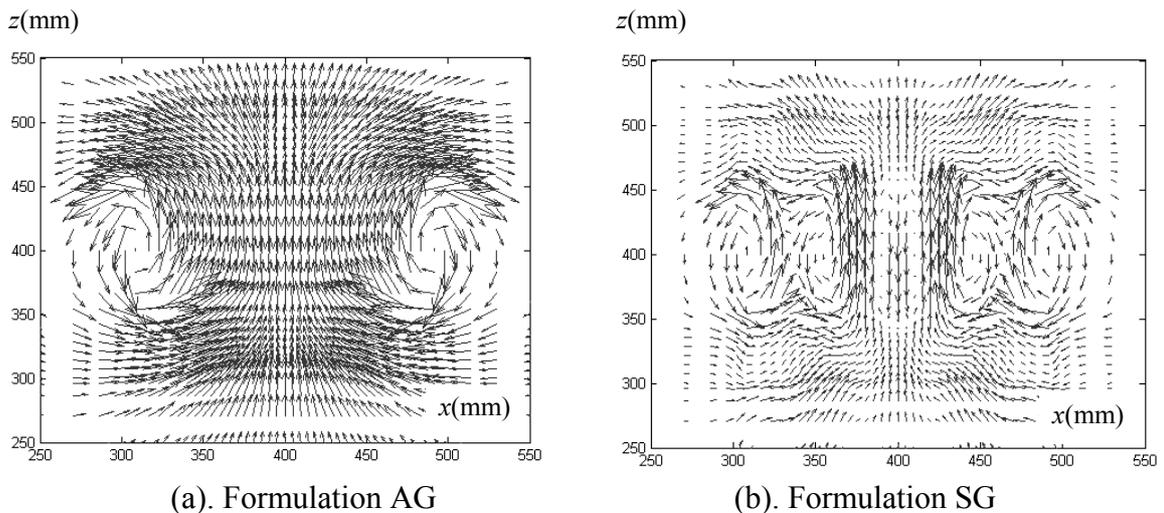


Fig.IV.9. Distribution de l'induction magnétique dans le plan $a-a'$

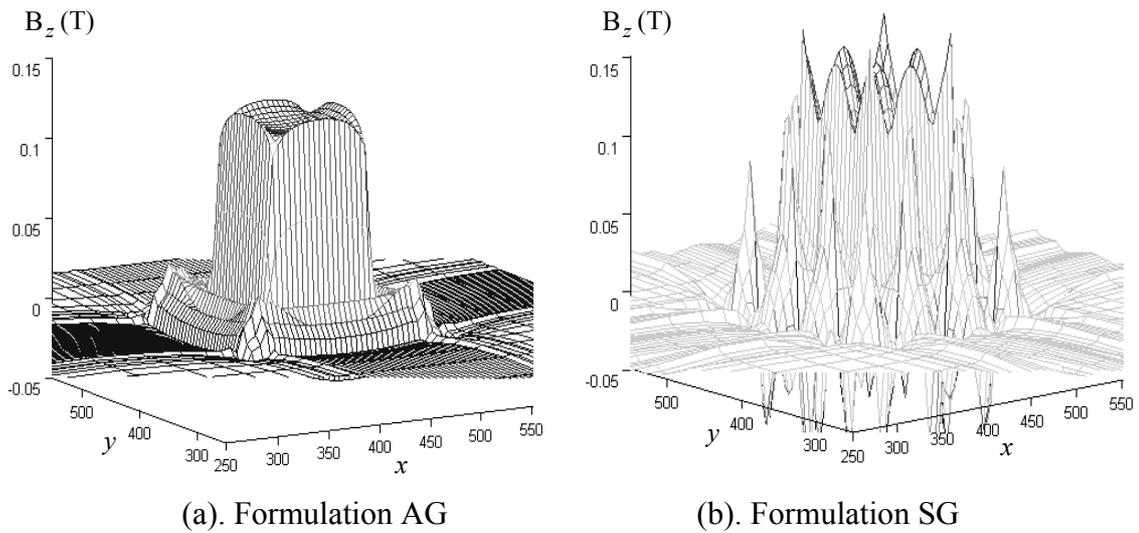


Fig.IV.10. Composante z de l'induction dans le plan x - y , z : centre du noyau

A titre d'illustration, dans la Fig.IV.11 on montre la distribution des vecteurs de l'induction magnétique \mathbf{B} en 3D.

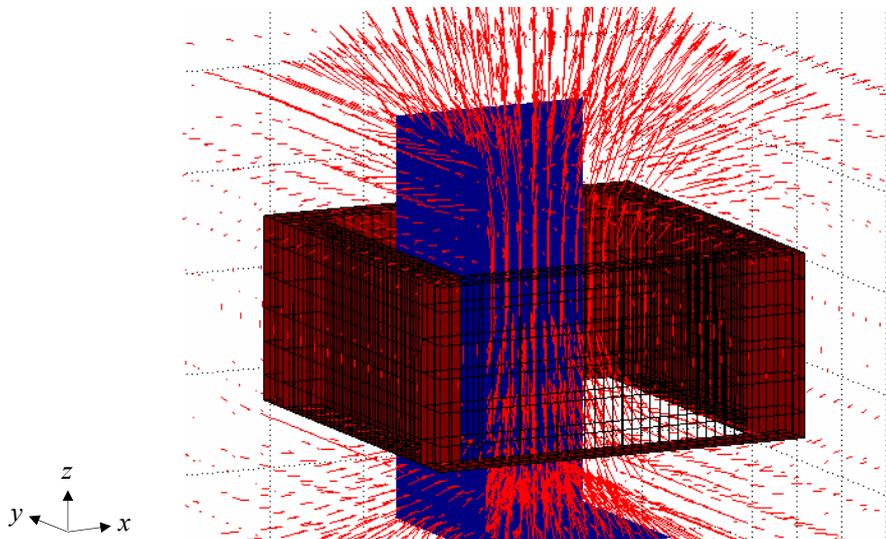


Fig.IV.11. Distribution des vecteurs de l'induction en 3D, formulation AG

Comme résultat de ce premier calcul, il est nécessaire d'ajouter la jauge de Coulomb dans la formulation afin d'avoir une stabilité du calcul et par conséquent une solution du problème.

IV.2.1.3. Modélisation avec maillage non-conforme

L'objectif de ce calcul est de valider la technique de maillage non-conforme en utilisant le problème IEEJ standard. Ici, cette technique fait l'objet de génération de maillage localement raffiné dans le noyau de fer. La zone non-conforme représentée par la région hachurée (Fig.IV.12) sert à décomposer, le long de l'axe z , la géométrie du problème en deux sous domaines (intérieur et extérieur). La partie intérieure est constituée du noyau et une partie de l'entrefer ($\Omega 1$), la partie extérieure est constituée de la bobine et de l'air ($\Omega 2$). Soit 5mm l'épaisseur de la zone non-conforme (voir annexe : effet de l'épaisseur de la zone non-conforme).

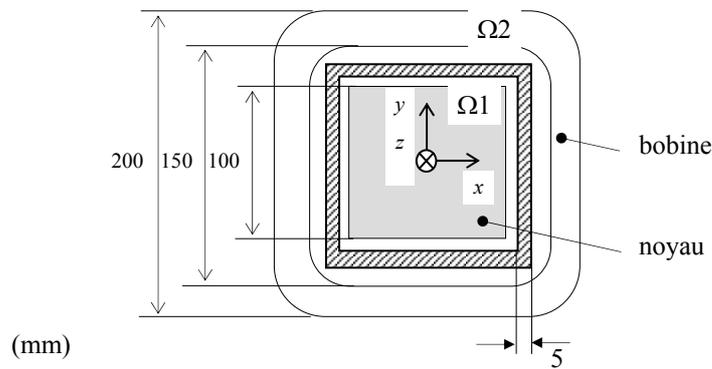


Fig.IV.12. Définition de la zone non-conforme

On considère, dans le noyau, le même maillage réalisé précédemment avec le maillage standard. Alors $21 \times 21 \times 21$ est le nombre des volumes finis dans le noyau. Pour les autres régions : $N_{ind} = 1596$ et $N_{air} = 38418$, d'où le nombre total est $N_t = 49275$.

IV.2.1.3.1. Maillage

La Fig.IV.13, représente le maillage 3D du problème IEEJ standard avec la technique de maillage non-conforme. Pour mieux exposer la non-conformité, dans la Fig.IV.14 on montre le maillage dans le plan x - y .

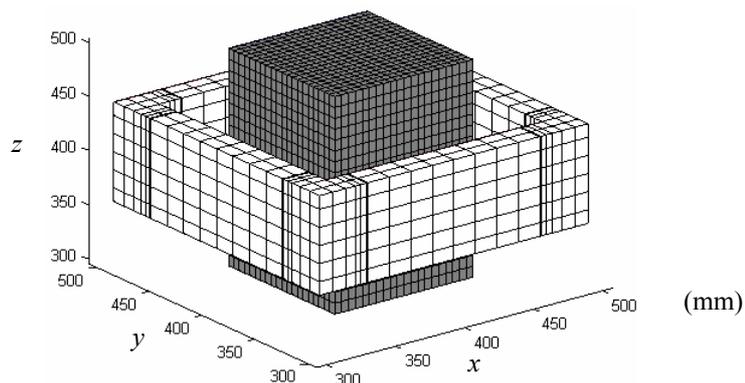


Fig.IV.13. Maillage non-conforme du problème IEEJ standard, $N_t = 49275$

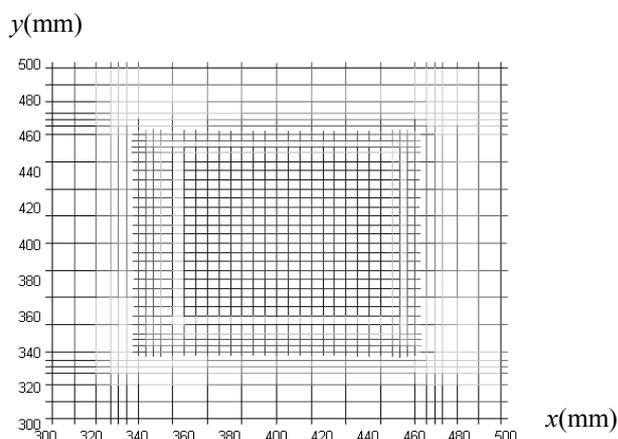


Fig.IV.14. Non-conformité du maillage dans le plan x - y

IV.2.1.3.2. Résultats

Nous considérons seulement la formulation avec jauge (AG). La résolution du système matriciel obtenu par la méthode des volumes non-conforme est effectuée par le même solveur que celui correspondant au maillage standard.

La composante z de l'induction magnétique dans l'air selon le même trajet précédent (10mm au dessus de la surface supérieure du noyau) est montrée sur la Fig.IV.15. Dans cette figure, on compare les résultats obtenus avec maillage standard avec $N_t = 91035$ aux résultats du maillage non-conforme avec $N_t = 49275$ et avec les résultats expérimentaux. Par rapport à la méthode des volumes finis avec maillage standard, la méthode avec maillage non-conforme produit des résultats très proches de ceux mesurés. On explique cela comme suit : le nombre d'éléments dans le noyau dans les deux types de maillage est $21 \times 21 \times 21$ volumes finis. Dans le maillage non-conforme (N-C) la présence de la zone non-conforme nous a permis de mailler finement la zone d'air entourant le noyau des deux

cotés haut et bas, sans que le maillage se prolonge vers la région de la bobine. Cela entraîne une bonne répartition du maillage aux voisinages de l'interface air/fer, et par conséquent conduit à une meilleure précision de calcul.

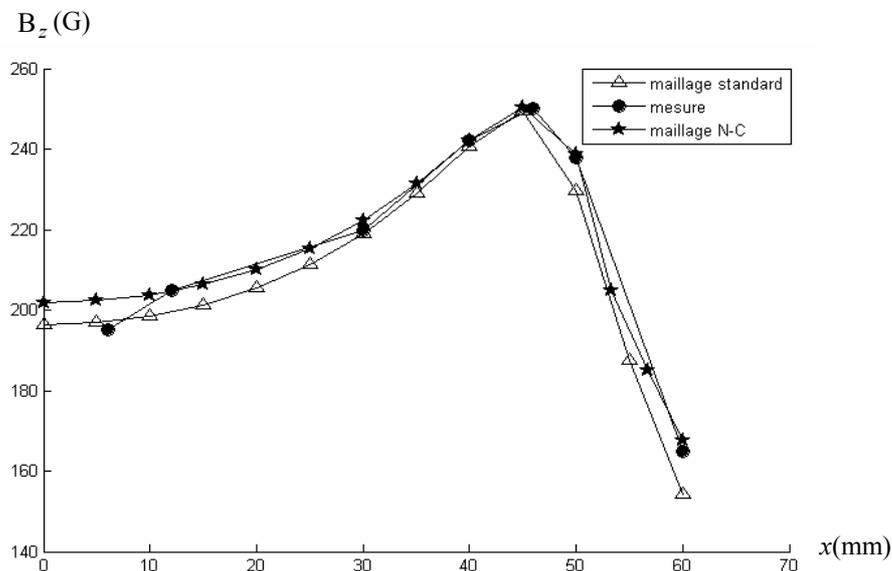


Fig.IV.15. Comparaison de la composante z de l'induction magnétique obtenue avec les deux types de maillage et celle mesurée pour $y = 6.25\text{mm}$ et $z = 110\text{mm}$

Dans le tableau.IV.2, on compare les données du calcul des deux types de maillage. Les résultats obtenus avec maillage standard et non-conforme sont en bons accords avec les résultats de mesure. Cependant, avec le maillage N-C le temps CPU est réduit d'une manière considérable presque de moitié, sans oublier le gain en espace mémoire; $N_t = 49275$ (maillage N-C) devant $N_t = 91035$ (maillage standard).

Maillage	N_t	CPU (s)	Itérations	Err.moy (%)	Err.max (%)
Standard	91035	113	158	2.38	6.47
N-C	49275	70	157	1.14	3.89

Tableau.IV.2. Données du calcul des deux types de maillage

Dans la Fig.IV.16 est illustrée la distribution des vecteurs de l'induction magnétique dans le plan x - z . On remarque que la présence de la zone non-conforme n'a pas affecté la distribution des vecteurs de l'induction magnétique.

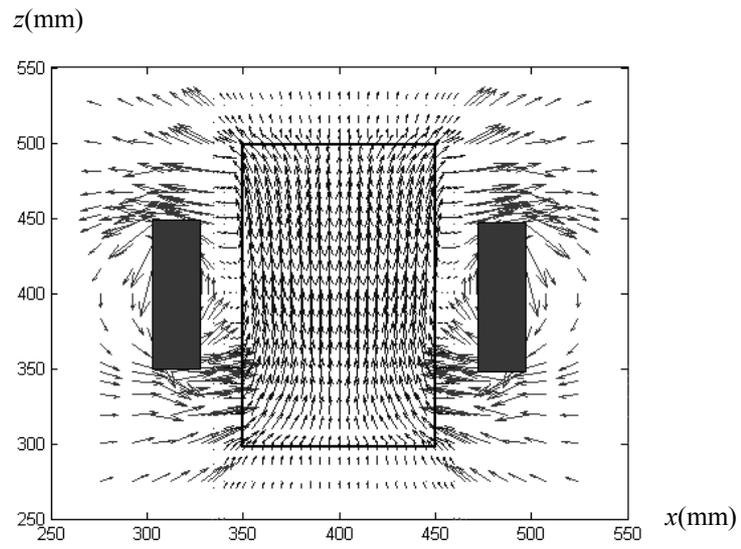


Fig.IV.16. Distribution de l'induction magnétique obtenue avec maillage N-C pour y : centre du noyau

IV.2.2. Le problème IEEJ avec armature

L'objectif de la modélisation d'un tel problème consiste à déterminer la valeur moyenne de l'induction magnétique canalisée dans le noyau de fer [Kanai 90] et [Biro 96]. La valeur mesurée de l'induction dans le noyau permet de valider les modèles numériques de calcul des champs magnétostatiques. Par la suite, ce problème sera résolu par le code de calcul MVF3D. Dans un premier temps, on va calculer l'induction canalisée dans le noyau avec les deux types de formulations AG et SG. Ensuite, on va tester la technique de maillage non-conforme avec la présence d'une armature.

IV.2.2.1. Description du problème

Le dispositif du problème IEEJ avec armature, correspond au dispositif du problème précédent (IEEJ standard) avec un blindage refermant l'ensemble bobine et noyau (Fig.IV.17). Le blindage est de même matériau que le noyau ($\mu_r = 1000$). Le courant d'excitation de la bobine est de 3000AT.

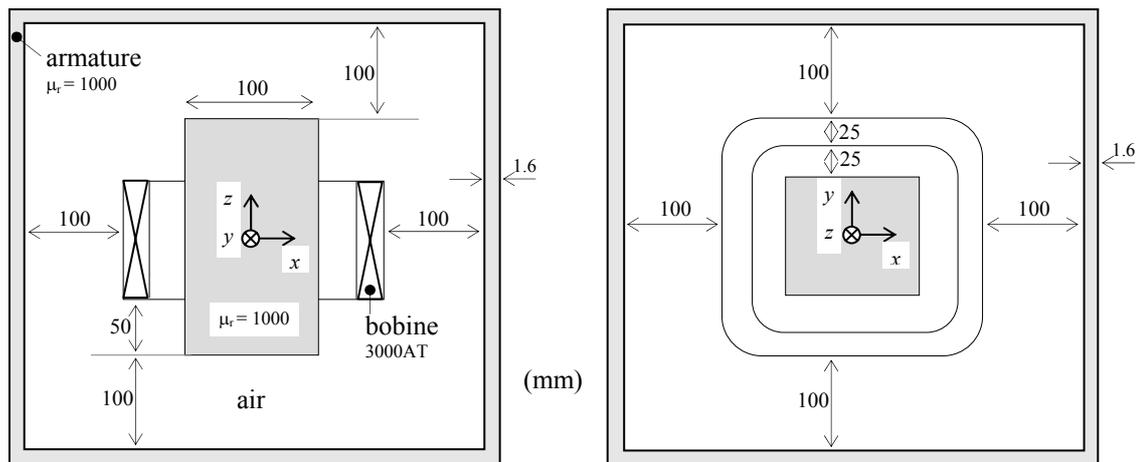


Fig.IV.17. Description du problème IEEJ avec armature

IV.2.2.2. Modélisation avec maillage standard

Nous considérons par la suite le seul cas de maillage : $N_t = 189771$.

IV.2.2.2.1. Maillage

Le maillage que nous avons utilisé est de type standard avec une distribution régulière dans le blindage et son intérieur et irrégulière à l'extérieur (boite d'air). Le maillage 3D du dispositif est représenté sur la Fig.IV.18 et la Fig.IV.19.

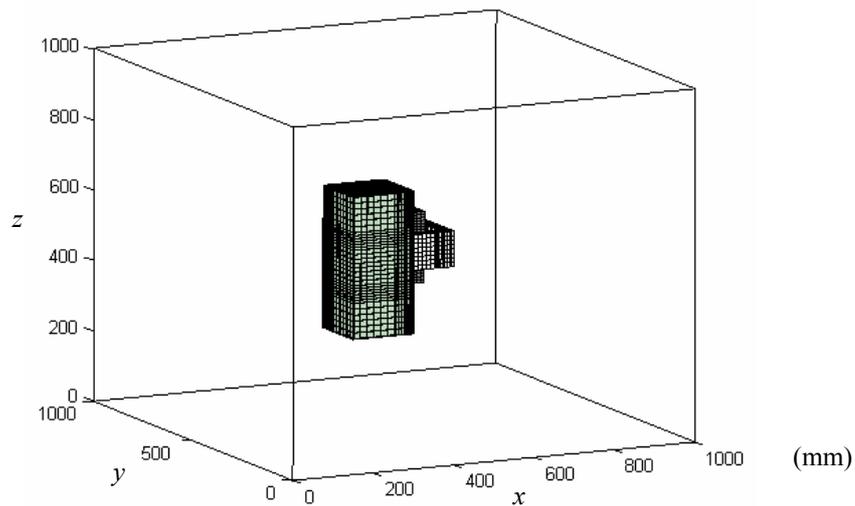


Fig.IV.18. Description de la boite d'air du problème IEEJ avec armature, $N_t = 189771$

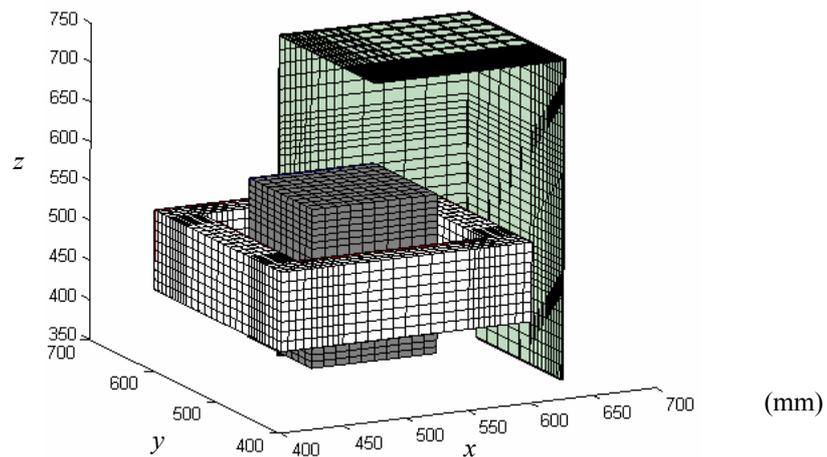


Fig.IV.19. Maillage du dispositif IEEJ avec armature

IV.2.2.2.2. Résultats

La résolution des systèmes matriciels est effectuée par le solveur BICGSTAB avec préconditionneur Jacobien. La précision de calcul est 10^{-6} et le nombre maximal d'itérations est fixé à 10000.

Soit le repère de la Fig.IV.17 où le point (0,0,0) correspond au centre du noyau. La composante z de l'induction magnétique est montrée sur la Fig.IV.20.

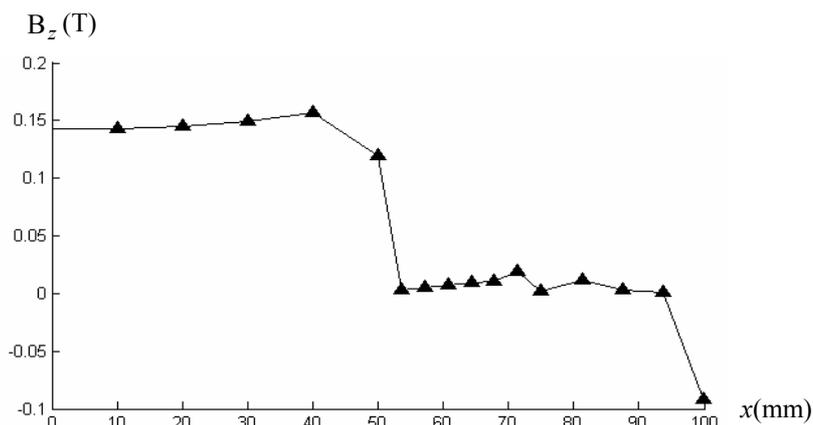


Fig.IV.20. Composante z de l'induction magnétique pour y : centre du noyau et z : centre du noyau, maillage standard

Les données de calcul sont fournies dans le tableau.IV.3.

N_t	Formulation	CPU (s)	Itérations	$B_{z\text{ moy}} (T)$	Err (%)
189771	AG	671	419	0.1395	0.85
	SG	divergence après la 5 ^{ème} itération			

Tableau.IV.3. Données du calcul du problème IEEJ avec armature

La valeur moyenne de l'induction mesurée dans le noyau est 0.1407T [Biro 96]. Les résultats montrent une bonne concordance entre la valeur moyenne de l'induction magnétique calculée ($B_{z\text{ moy}}$) par le code MVF3D et celle mesurée. L'erreur de calcul est de 0.85%.

La distribution des vecteurs de l'induction magnétique dans le plan $x-z$, est montrée dans la Fig.IV.21. Cette répartition est obtenue par la formulation AG. La composante z de l'induction magnétique dans le plan $x-y$ pour z : centre du noyau, est donnée par la Fig.IV.22. Il est montré que l'induction est maximale dans le noyau.

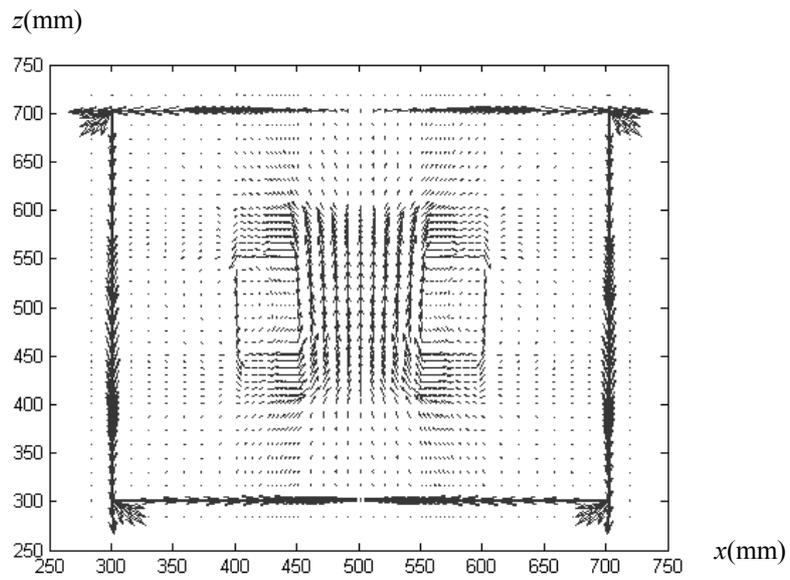


Fig.IV.21. Distribution de l'induction magnétique dans le plan x - z pour y : centre du noyau

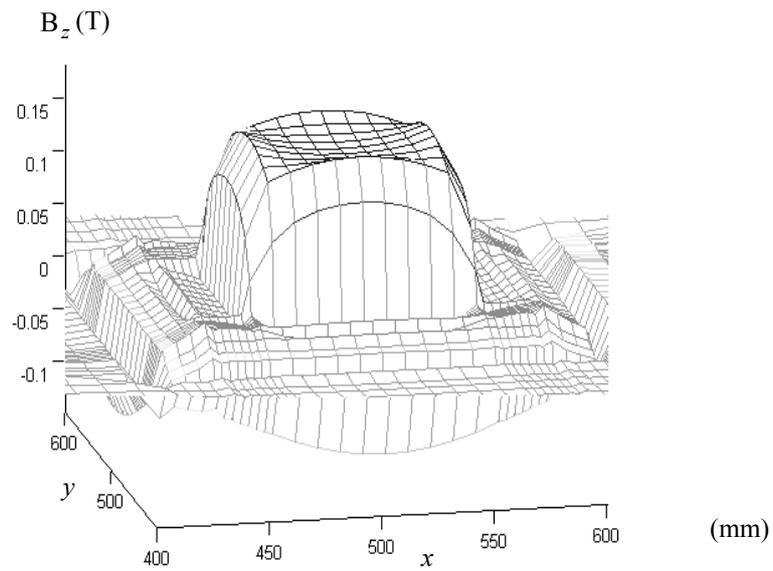


Fig.IV.22. Composante z de l'induction magnétique

IV.2.2.3. Modélisation avec maillage non-conforme

Nous avons choisi le même emplacement de la zone non-conforme que dans le problème IEEJ standard. Notons que dans ce cas, la zone non-conforme passe par le fer du blindage, comme il est montré dans la Fig.IV.23. L'épaisseur de la zone non-conforme (zone hachurée) est égale 5mm. La géométrie du problème est décomposée en deux sous domaines ; Ω_1 (noyau + partie air + partie du blindage) et Ω_2 (bobine + reste du domaine).

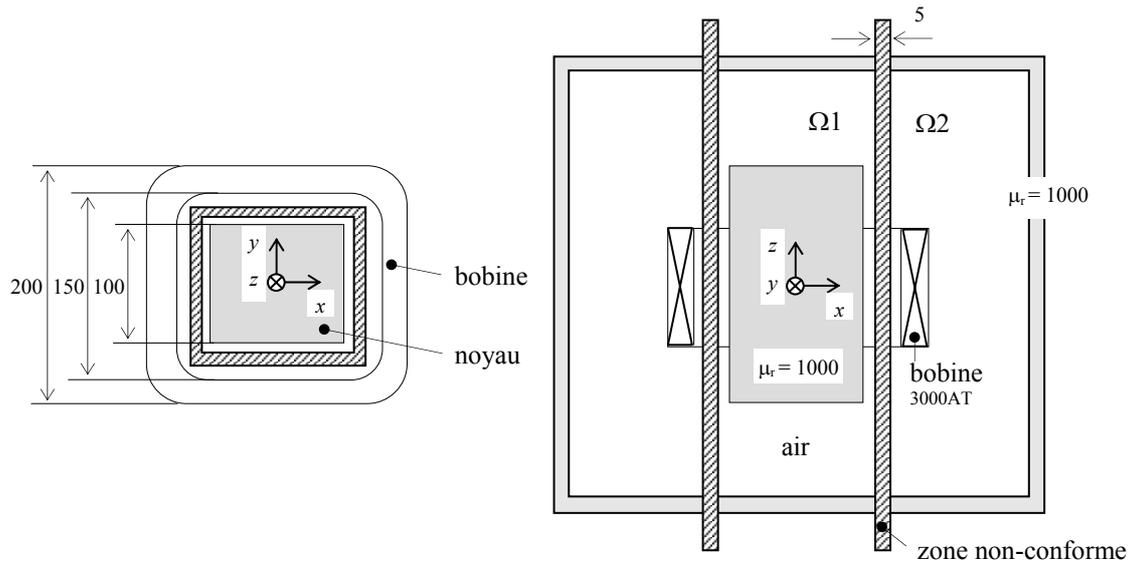
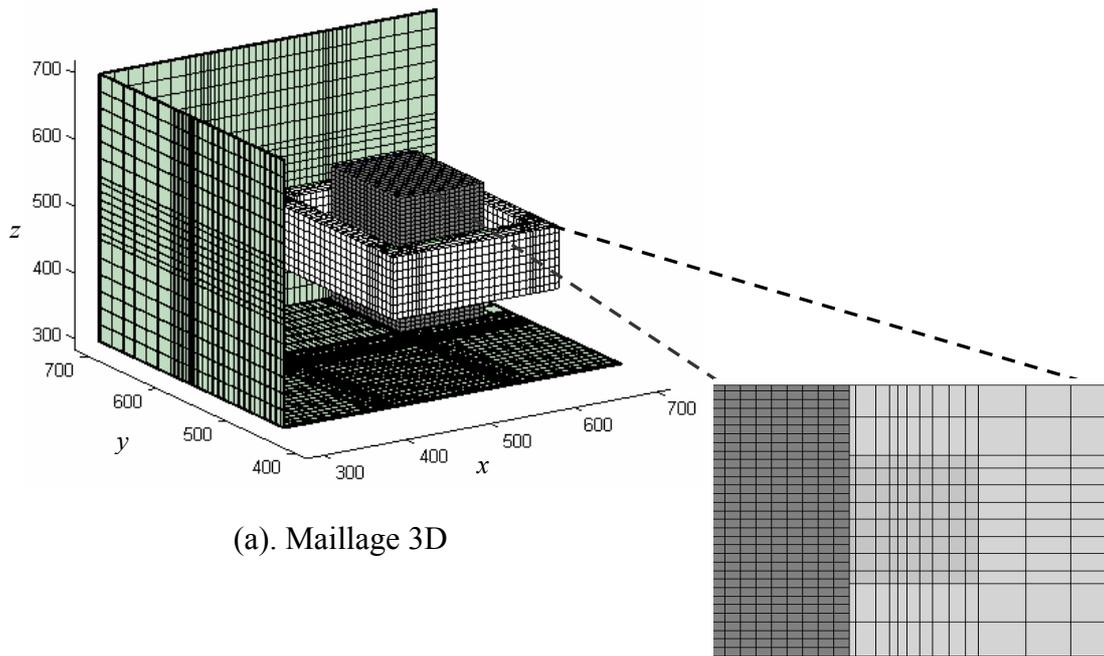


Fig.IV.23. Zone non-conforme dans le problème IEEJ avec armature

Par la suite, cette géométrie sera discrétisée avec $N_t = 150436$.

IV.2.2.3.1. Maillage

La Fig.IV.24 montre le maillage non-conforme du problème IEEJ avec armature. Le maillage est réalisé indépendamment dans les deux sous domaines séparés par la zone non-conforme (Fig.IV.24.a). Une vue dans le plan $x-z$ montre la non-conformité des maillages des deux sous domaines (Fig.IV.24.b).



(a). Maillage 3D

(b). Non-conformité dans le plan $x-z$

Fig.IV.24. Maillage non-conforme du problème IEEJ avec armature, $N_t = 150436$

IV.2.2.3.2. Résultats

On utilise le même solveur BICGSTAB avec préconditionnement Jacobien. On considère seulement la formulation jaugée AG. Les résultats de la modélisation montrent une bonne concordance entre le maillage standard et le maillage non-conforme. Dans la Fig.IV.25, on donne la composante z de l'induction magnétique calculée dans les trois régions constituant le maillage non-conforme (région Ω_1 , région Ω_2 et la zone N-C). Pour montrer la continuité de l'induction magnétique à travers la zone N-C, nous avons fait un agrandissement de cette région donnée sur la Fig.IV.26. Les résultats obtenus avec les deux types de maillage sont superposés. On constate que la présence de la zone N-C n'a pas affecté la continuité de l'induction [Muramatsu 00].

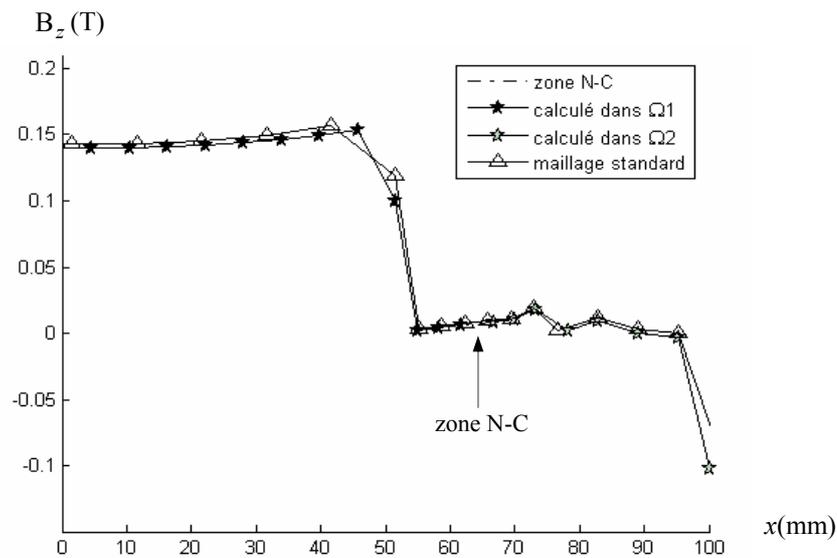


Fig.IV.25. Composante z de l'induction magnétique pour y : centre du noyau et z : centre du noyau, maillage N-C

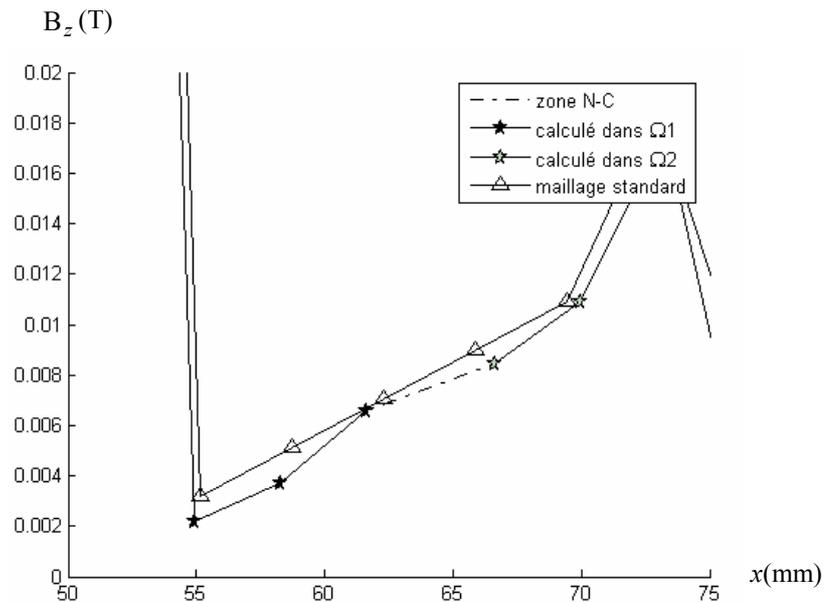


Fig.IV.26. Zoom de la zone N-C

Le tableau.IV.4 résume les données du calcul obtenues avec les deux types de maillage en considérant la formulation AG. La valeur moyenne de l'induction magnétique ($B_{z \text{ moy}}$) est presque la même dans les deux cas. En termes de temps de calcul et nombre d'itérations, le maillage non-conforme est préférable au maillage standard.

Maillage	N_t	CPU (s)	Itérations	$B_{z \text{ moy}} \text{ (T)}$	Err (%)
Standard	189771	671	419	0.1395	0.85
N-C	150436	356	705	0.1394	0.92
valeur mesurée de l'induction				0.1407T	

Tableau.IV.4. Données du calcul des deux types de maillage

Dans la Fig.IV.27.a et la Fig.IV.27.b, on montre les distributions des vecteurs de l'induction magnétique obtenues dans la région Ω_1 et la région Ω_2 , respectivement. L'assemblage des vecteurs des deux régions montre une bonne répartition à travers la zone non-conforme (Fig.IV.27.c).

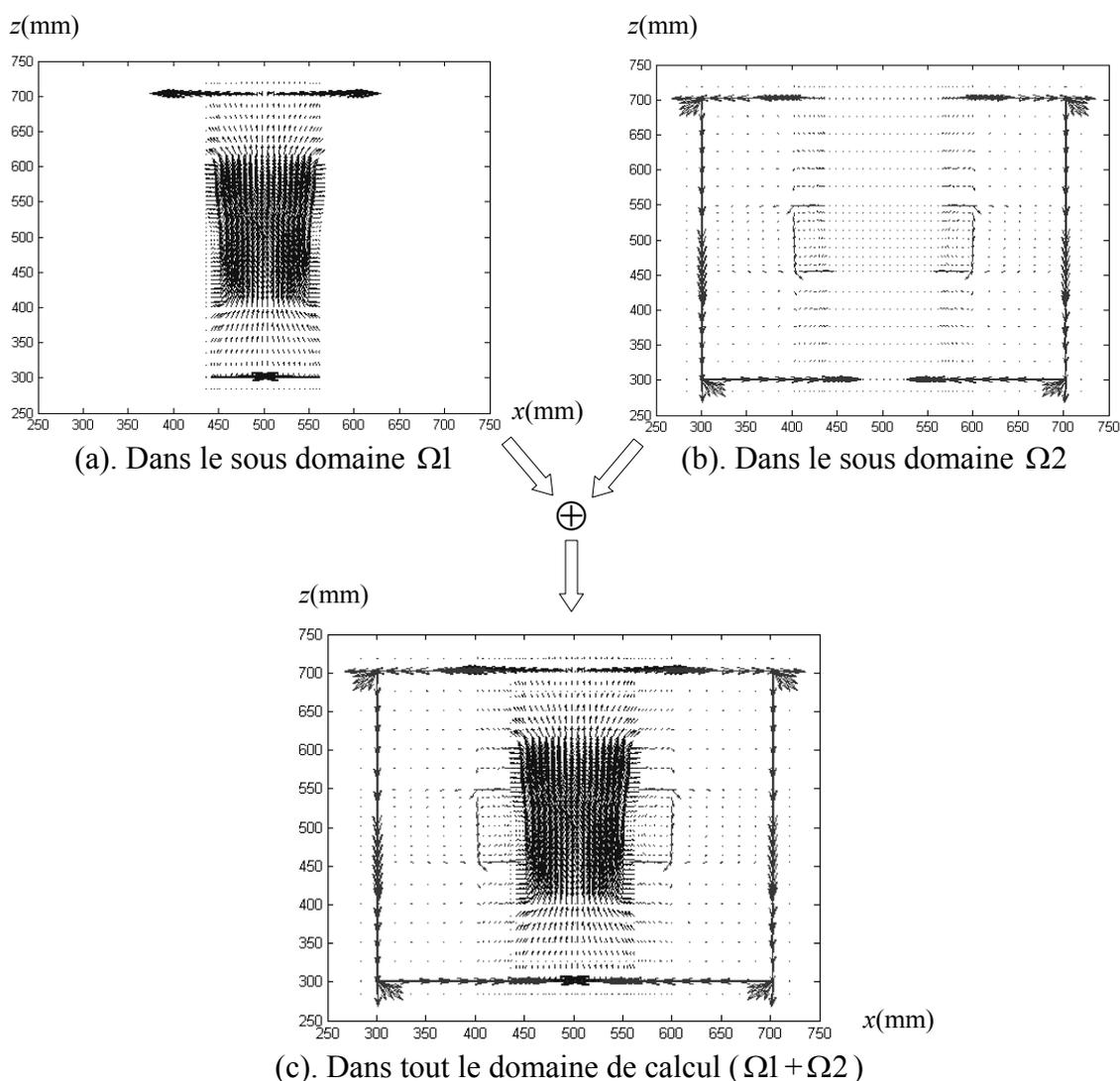


Fig.IV.27. Distribution de l'induction magnétique avec maillage non-conforme dans le plan $x-z$ pour y : centre du noyau

IV.3. Magnétostatique non linéaire : problème TEAM#13

L'objectif de cette deuxième partie du quatrième chapitre consiste à tester le code MVF3D sur un problème de magnétostatique non-linéaire. Pour cette raison, nous avons choisi le problème de Workshop TEAM#13. Ce problème, constitue un problème de référence dans la plupart des travaux traitant les problèmes magnétostatiques non linéaires [Muramatsu 93], [Fetzer 97] et [Balasubrama 02].

IV.3.1. Description du problème

La géométrie du problème TEAM#13 est représentée dans la Fig.IV.28. Une bobine de section carrée est insérée entre deux canaux en acier disposés symétriquement de part et d'autre d'une plaque centrale, de façon à ce qu'il y ait quatre entrefers. La bobine est parcourue par un courant de 3000AT.

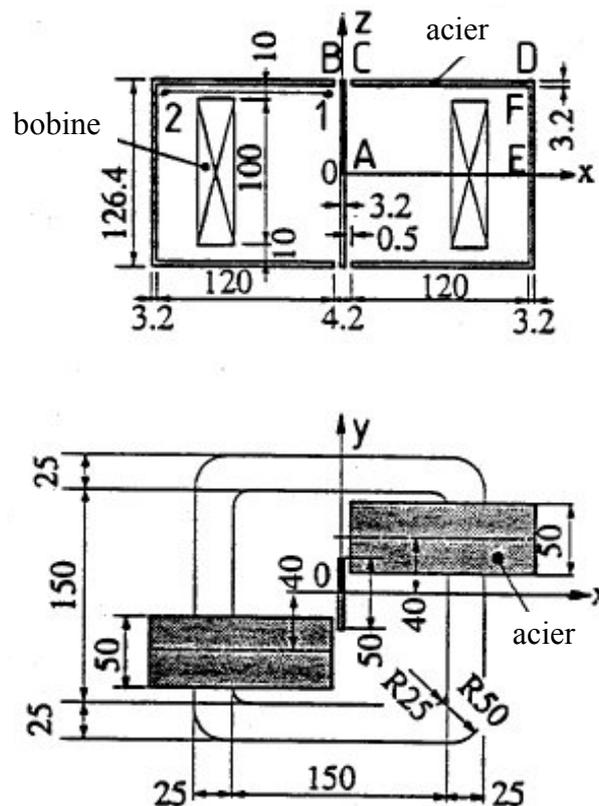


Fig.IV.28. Description du problème TEAM#13

Les trois parties d'acier sont supposées non linéaires, la courbe d'aimantation $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ étant donnée par la Fig.IV.29.

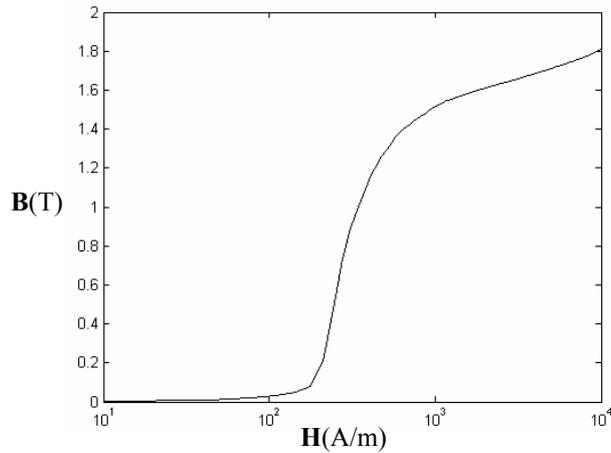


Fig.IV.29. Caractéristique $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ de l'acier utilisé dans TEAM#13

Pour les grandes intensités ($\mathbf{B} \geq 1.8 \text{ T}$) la courbe est approximée par les deux relations suivantes :

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0 \mathbf{H} + (a\mathbf{H}^2 + b\mathbf{H} + c) & \text{pour } 1.8 \leq \mathbf{B} \leq 2.22 \text{ T} \\ \mu_0 \mathbf{H} + M_s & \text{pour } \mathbf{B} \geq 2.22 \text{ T} \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

Avec $a = -2.38 \cdot 10^{-10}$, $b = 2.327 \cdot 10^{-5}$ et $c = 1.59$.

M_s est l'aimantation de saturation ($M_s = 2.16 \text{ T}$).

Rappelons que l'objectif de la modélisation d'un tel problème est de valider notre modèle numérique non linéaire basé sur la technique $\mathbf{M}-\mathbf{B}$. Pour cette raison, on va calculer l'induction magnétique dans les différentes parties de l'acier selon les parcours : A-B, C-D et E-F (Fig.IV.28). Ensuite, on va comparer les résultats de calcul avec ceux mesurés [Fetzer 97].

Dans ce problème, nous n'avons considéré que le maillage standard avec $N_t = 243712$.

IV.3.2. Maillage

La Fig.IV.30 et la Fig.IV.31, montrent respectivement, la boîte d'air et le maillage du dispositif TEAM#13. La Fig.IV.32 représente une vue du maillage dans le plan x - y , dans laquelle sont représentés les trois niveaux a - a' , b - b' et c - c' . Par la suite, on va tracer la distribution des vecteurs de l'induction magnétique dans les plans correspondants à ces niveaux.

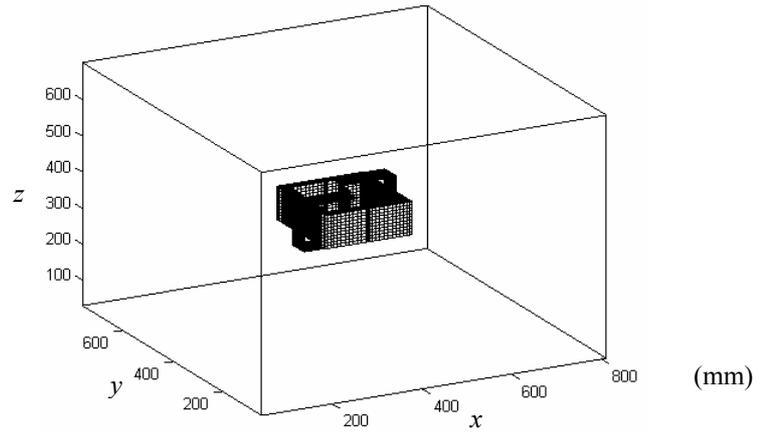


Fig.IV.30. Boite d'air du TEAM#13, $N_t = 243712$

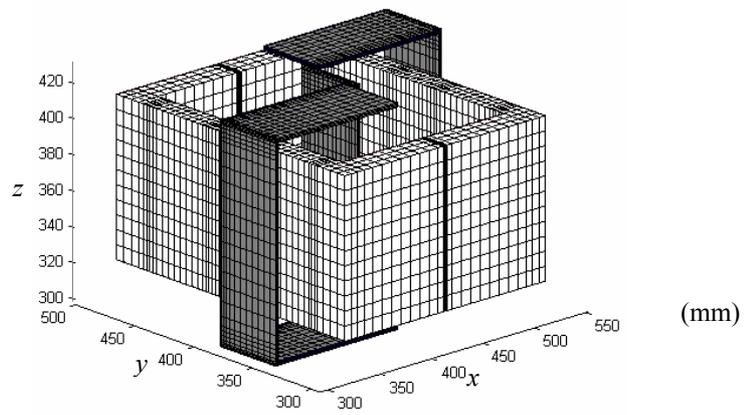


Fig.IV.31. Maillage 3D du dispositif TEAM#13

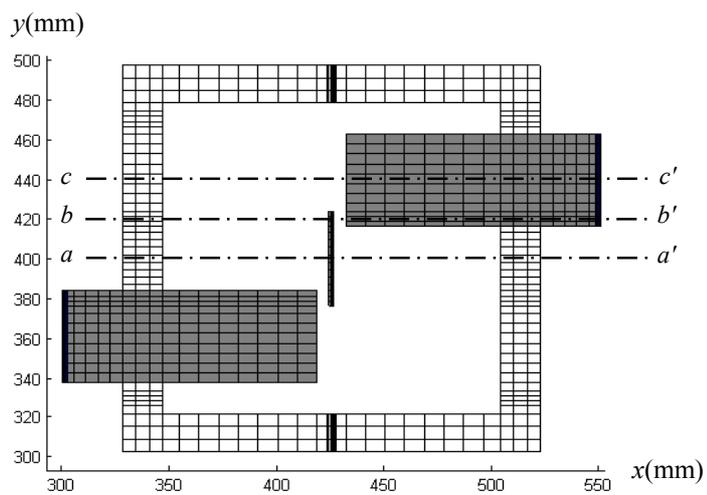
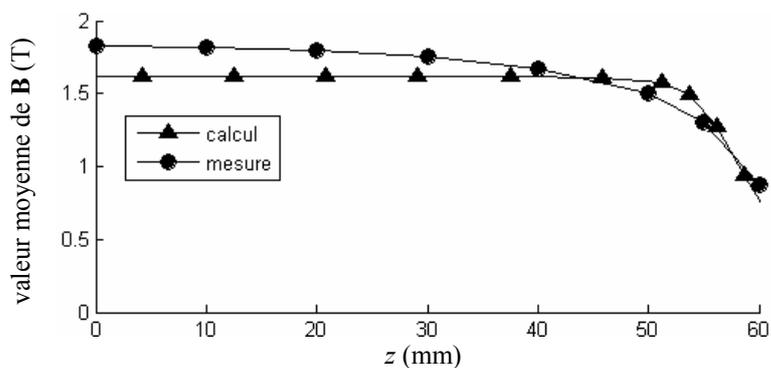


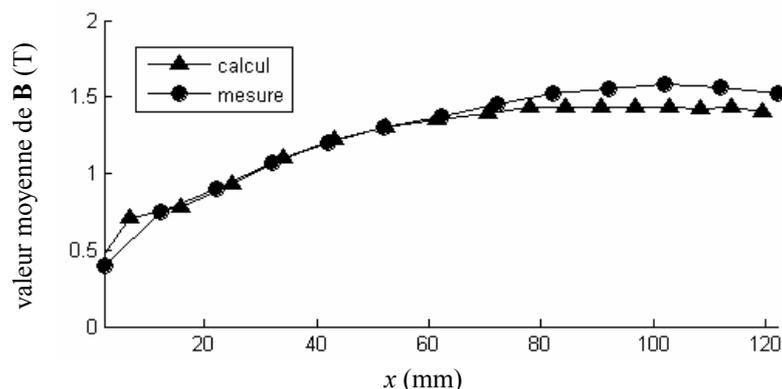
Fig.IV.32. Vue du haut du maillage

IV.3.3. Résultats

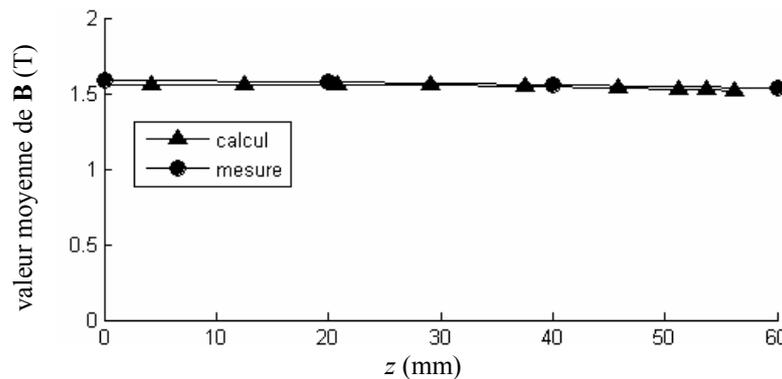
La résolution des systèmes matriciels correspondants aux formulations AG et SG, est effectuée par le solveur BICGSTAB avec préconditionneur Jacobien. La précision de calcul est 10^{-6} et le nombre maximal d'itérations est fixé à 10000. Le critère de convergence des itérations $\mathbf{M} - \mathbf{B}$ est 10^{-3} .



(a). Trajet A-B



(b). Trajet C-D



(c). Trajet E-F

Fig. IV.33. Induction magnétique dans les différentes parties de l'acier

On considère le repère des coordonnées de la Fig.IV.28. Dans la Fig.IV.33, sont montrées les confrontations des valeurs calculées avec la formulation AG et ceux mesurées de l'induction magnétique selon les différents trajets.

Les résultats obtenus avec le code MFV3D, montrent une bonne concordance avec les résultats de mesures [Fetzer 97]. Les faibles écarts observés dans les trajets A-B et C-D (Fig.IV.33.a et b), sont dus aux faibles densités de maillage aux voisinages des interfaces acier/air. Les essais avec la formulation SG que nous avons tentés n'ont pas donné de résultats, la convergence du solveur étant impossible. Le tableau.IV.5 fournit les données de calcul des tests réalisés. La taille de la matrice K du système algébrique est de 731136^2 dont 5232384 éléments non nuls (Nnz). La convergence de l'algorithme **M-B** est obtenue au bout de 26 itérations, avec un temps CPU de 791s pour chaque itération. Pour chaque itération **M-B** le solveur BICGSTAB converge au bout de 439 itérations. Dans le tableau.IV.5, sont résumées les données du calcul.

Nombre des nœuds		243712
Nombre des inconnues		731136
Nnz(K)		5232384
Formulation AG	Itérations M-B	26
	CPU (s) / itération M-B	~ 791
	Itérations BICGSTAB	~ 439
	Err.moy - trajet A-B	8.33%
	Err.moy - trajet C-D	5.03%
	Err.moy - trajet E-F	1.52%
Formulation SG		divergence

Tableau.IV.5. Données du calcul de TEAM #13

Le symbole ~ désigne : la valeur moyenne.

L'erreur moyenne (Err.moy) du calcul de l'induction selon les différents trajets est évaluée à la base de l'équation (IV.1).

La Fig.IV.34, montre la distribution des vecteurs de l'induction magnétique dans le plan $x-z$ et selon les niveaux $a-a'$, $b-b'$ et $c-c'$. Cette figure montre nettement la canalisation de l'induction magnétique dans l'acier.

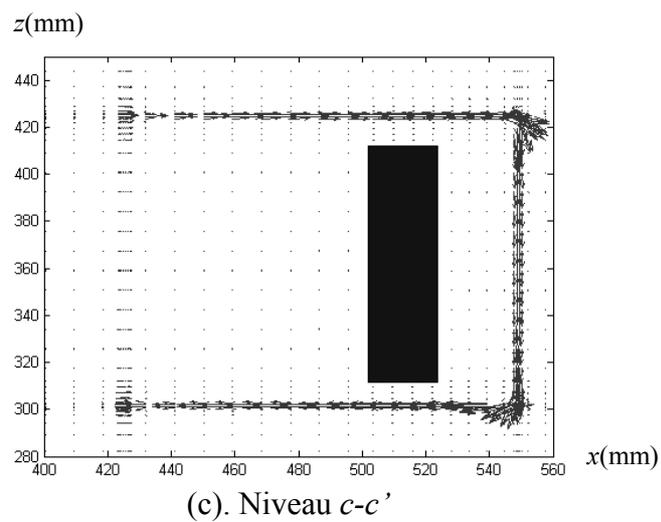
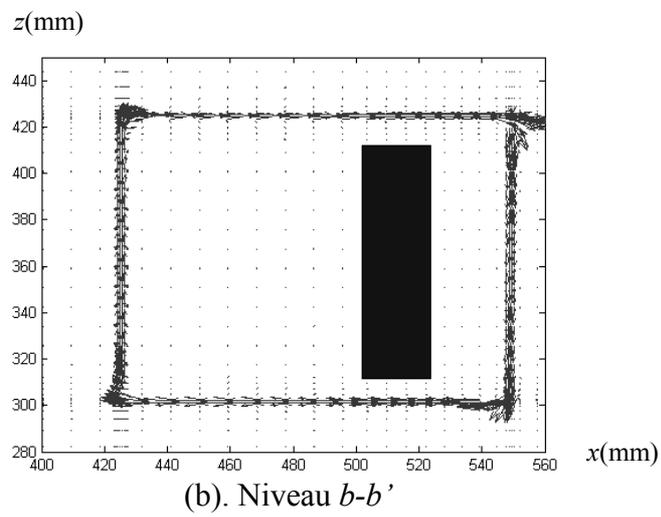
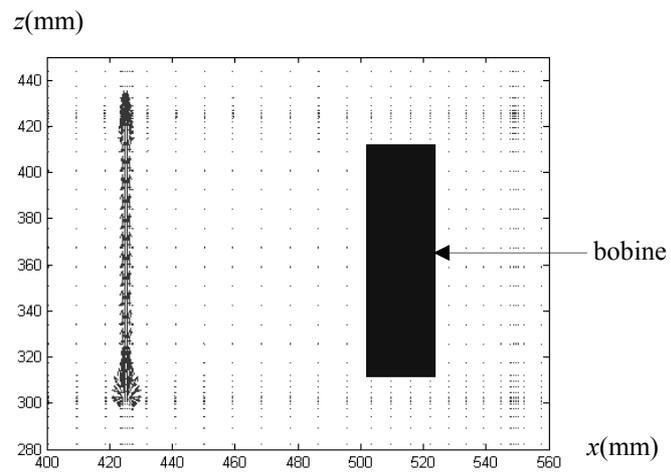


Fig.IV.34. Distribution des vecteurs de l'induction magnétique dans le plan $x-z$

A titre d'illustration, les répartitions des trois composantes de l'induction magnétique dans les trois parties de l'acier sont données dans la Fig.IV.35.

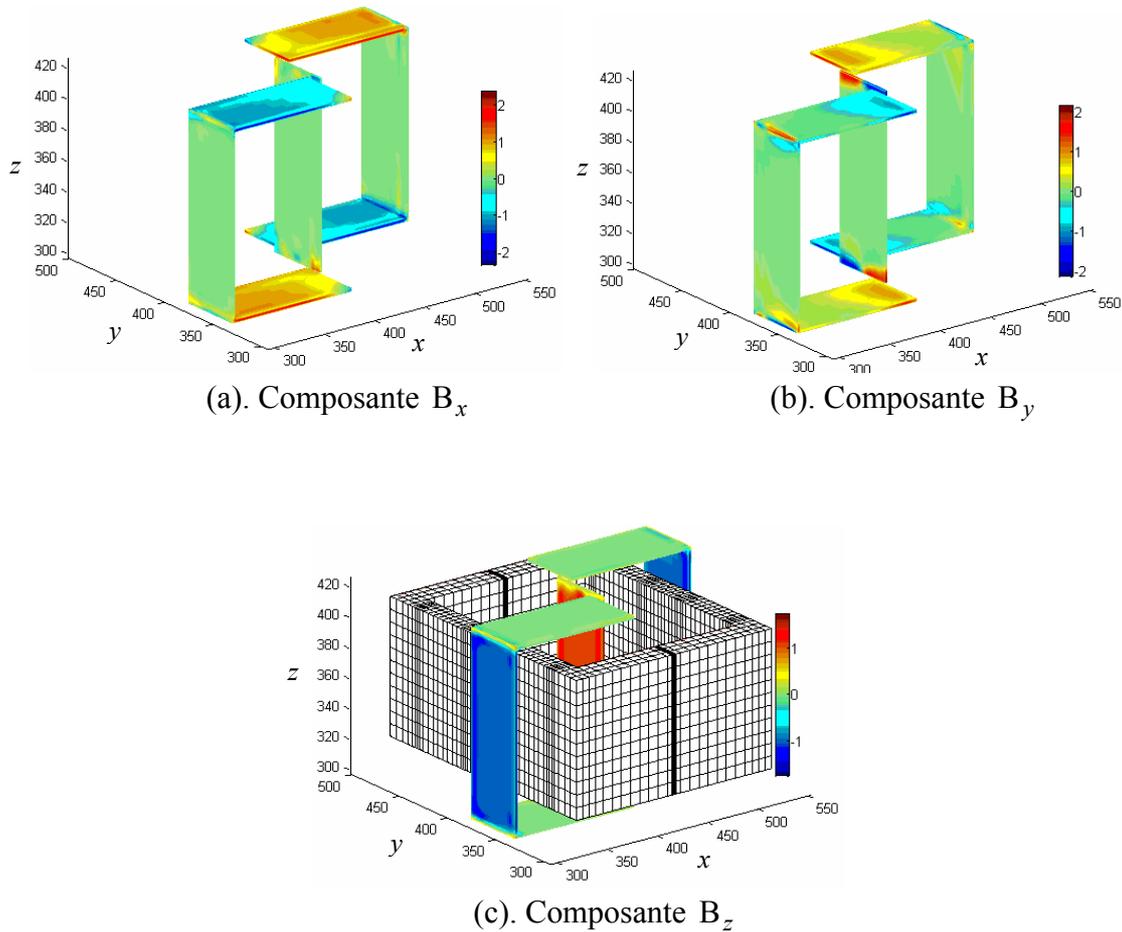


Fig.IV.35. Colormap 3D des composantes de \mathbf{B} dans les trois parties de l'acier

IV.3.4. Effet du terme de relaxation λ

Dans cette section on va montrer l'effet du terme de relaxation λ sur la convergence de l'algorithme $\mathbf{M}-\mathbf{B}$ ainsi que son effet sur la précision. Pour cette raison, le problème TEAM#13 a été modélisé successivement avec différentes valeurs de λ . Le tableau.IV.6, donne le nombre d'itérations de l'algorithme $\mathbf{M}-\mathbf{B}$ pour $0.8 \leq \lambda \leq 1.8$.

En effet pour $0.8 \leq \lambda \leq 1.8$, on obtient presque la même distribution de l'induction magnétique. Par exemple pour le trajet C-D, quelques soit $0.8 \leq \lambda \leq 1.8$, les valeurs de \mathbf{B} sont presque identiques (Fig.IV.36). La différence qu'on peut remarquer est au niveau de la convergence. Avec $\lambda = 1.8$, nous avons une convergence plus rapide, avec un nombre d'itérations $\mathbf{M}-\mathbf{B}$ réduit.

λ	Itérations M-B
1	26
1.5	21
1.8	19
0.8	30

Tableau.IV.6. Nombre d'itérations **M-B** pour quelques valeurs de λ

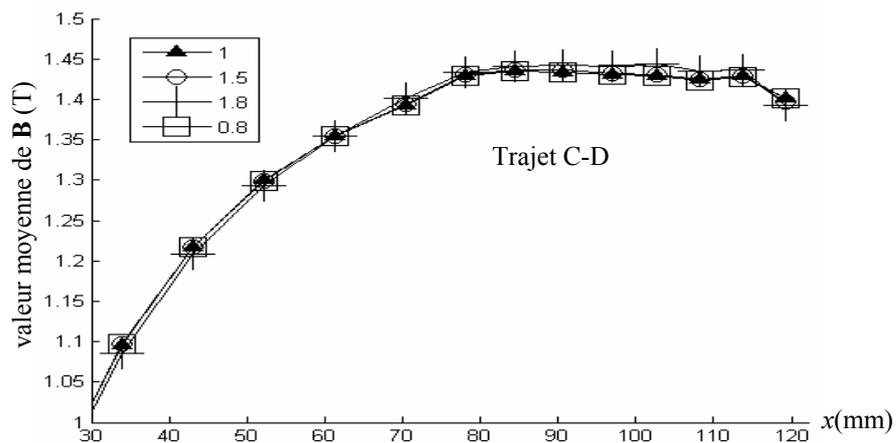


Fig.IV.36. Induction magnétique pour les différentes valeurs de λ

Dans le cas général, la méthode **M-B** offre une bonne stabilité de calcul. La caractéristique de convergence de l'algorithme **M-B** pour $\lambda = 1$, est montrée sur la Fig.IV.37. Dans cette figure, l'erreur relative du potentiel vecteur magnétique $Err(\mathbf{A})$ est donnée en fonction du nombre d'itérations **M-B**. Pour les autres valeurs de λ , on retrouve la même allure sauf que le nombre total d'itérations est différent.

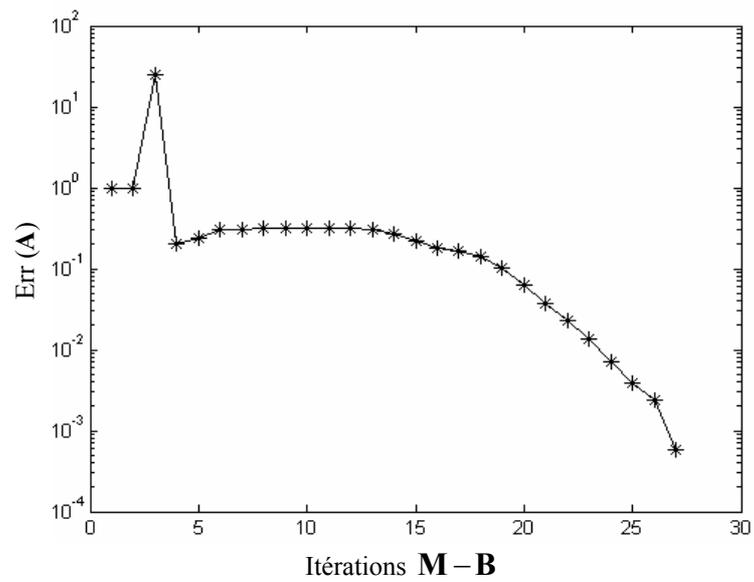


Fig.IV.37. Convergence de l'algorithme $\mathbf{M}-\mathbf{B}$ pour $\lambda = 1$

IV.4. Magnétodynamique : problème JSAEM#6

Cette troisième et dernière partie du présent chapitre est consacrée à la validation de la formulation en volumes finis des problèmes magnétodynamiques. Alors, nous avons à modéliser le problème JSAEM#6. Ce problème fait l'objet d'un exemple test pour les applications de contrôle non destructif [Fukutomi 98], [Burascano 00] et [Rachek 07^b]. Il s'agit de calculer la variation de l'impédance de la bobine en la présence d'une fissure dans la plaque conductrice à inspecter. Dans un premier temps, on considère que la plaque est saine et on calcule la distribution des champs dans le domaine. Dans un deuxième temps, on introduit une fissure dans la plaque (Fig.IV.38) et on refait le calcul.

Après une brève description, le problème JSAEM#6 va être modélisé avec deux cas différents. Dans le premier cas, nous avons considéré une seule position de la bobine comme montrée dans la Fig.IV.38. Ce premier calcul nous a permis de tester le modèle magnétodynamique en considérant le maillage standard. Le deuxième cas consiste à prendre en compte le déplacement de la bobine d'inspection en utilisant la technique du maillage non-conforme.

IV.4.1. Description du problème

Le problème JSAEM#6 consiste en une bobine placée au dessus d'une plaque conductrice à inspecter, avec un lift-off = 0.5mm. Les dimensions de la bobine et la plaque sont montrées sur la Fig.IV.38. Dans cette figure, une fissure de longueur 10mm, largeur 0.22mm et de profondeur de 0.75mm, est introduite dans la partie supérieure de la plaque. La bobine est constituée de 140 spires. Le courant d'excitation est $I = 8\text{mA}$ avec une fréquence $f = 150\text{kHz}$. La conductivité de la plaque est $\sigma = 10^6 \text{ S/m}$.

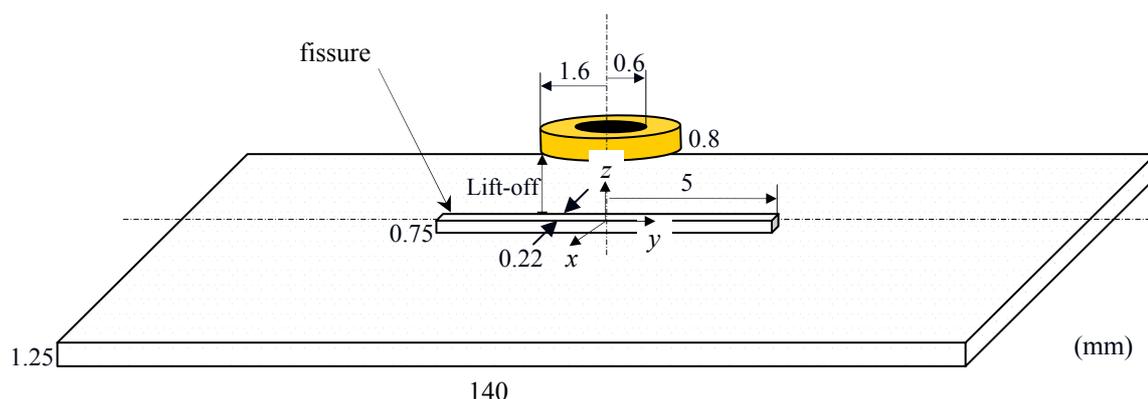


Fig.IV.38. Description du problème JSAEM#6

IV.4.2. Modélisation avec maillage standard

Nous considérons ici une seule position de la bobine (Fig.IV.38). Soit le nombre total des volumes finis dans le domaine de calcul $N_t = 26624$.

IV.4.2.1. Maillage

La Fig.IV.39, montre le maillage tridimensionnel du dispositif JSAEM#6. Vu que notre mailleur utilise des éléments hexaédriques, nous avons adopté une approche qui consiste à approximer la forme circulaire de la bobine par une forme rectangulaire de même section et de même longueur moyenne [Shaikh 88] et [Rachek 07^a].

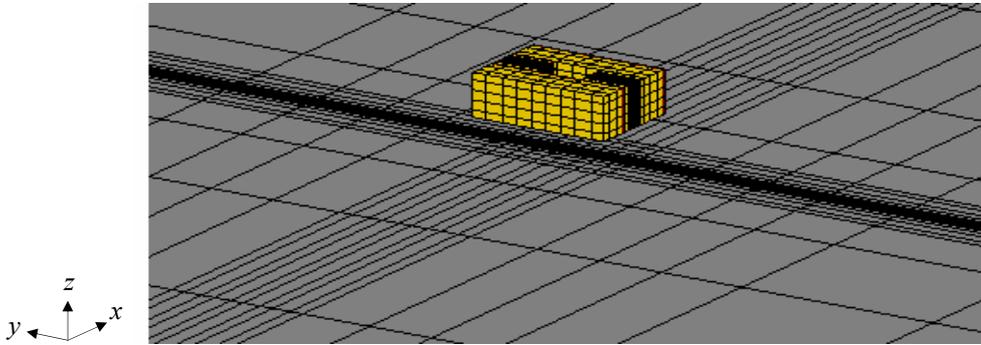


Fig.IV.39. Maillage 3D du problème JSAEM#6, $N_t = 26624$

IV.4.2.2. Résultats

La résolution des systèmes algébriques est effectuée par le solveur BICGSTAB avec préconditionneur Jacobien. La précision de calcul est 10^{-6} et le nombre maximal d'itérations est fixé à 10000. Dans ce problème il s'agit d'évaluer la variation de l'impédance due à la présence de la fissure. En effet, plusieurs formules existaient pour le calcul de l'impédance. Pour notre part, nous avons employé celle qui se base sur le calcul des énergies [Bakhtiari 99] :

$$R = \frac{1}{I^2} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{J}_i^2}{\sigma} d\Omega \quad (\text{IV.3})$$

$$X = j2\pi f \frac{1}{I^2} \int_{\Omega} \mathbf{B} \mathbf{H} d\Omega \quad (\text{IV.4})$$

R et X représentent respectivement la résistance et la réactance de la bobine.

Les distributions de la densité des courants induits (\mathbf{J}_i) dans la plaque pour les deux cas : plaque saine et plaque avec fissure, sont montrées dans la Fig.IV.40 et la Fig.IV.41, respectivement. Les données du calcul sont résumées dans le tableau.IV.7. Les résultats obtenus avec le code MVF3D sont très proches des résultats expérimentaux.

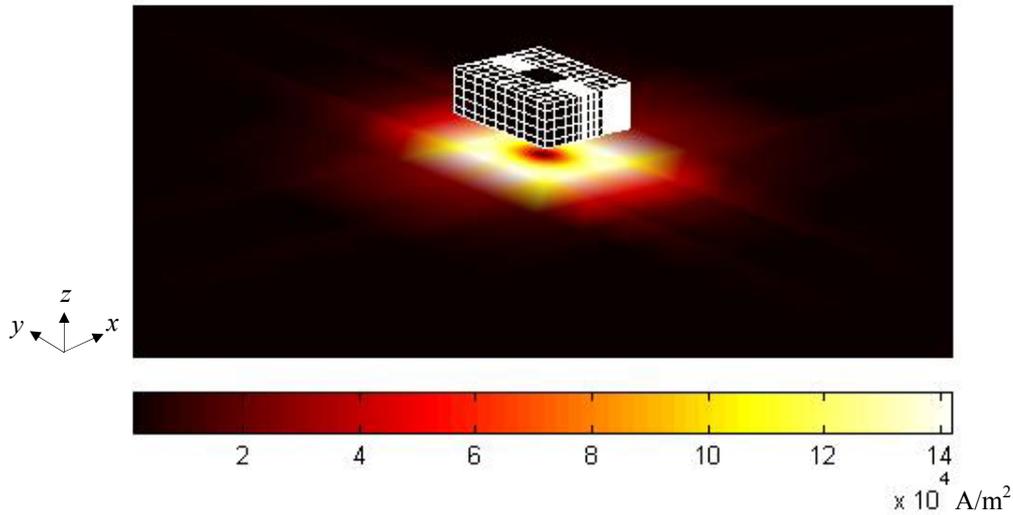


Fig.IV.40. Densité des courants induits dans la plaque saine

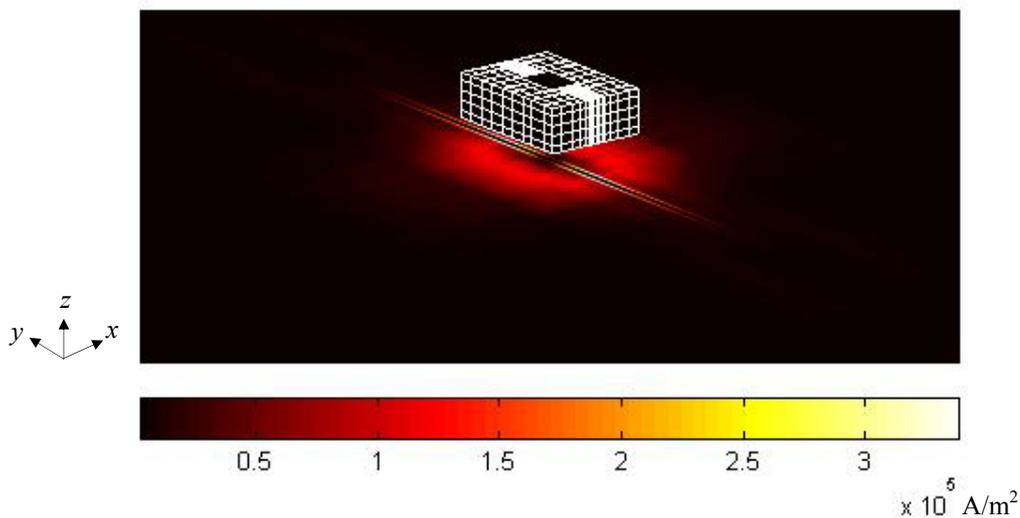


Fig.IV.41. Densité des courants induits dans la plaque fissurée

N_t	Inconnues	Formulation	CPU (s)	Itérations	$\Delta R(\Omega)$	$\Delta X(\Omega)$
26624	106496	AG	145	277	0.21	0.20
		SG	divergence			
mesures [Burascano 00]					0.19	0.21

Tableau.IV.7. Données du calcul du problème JSAEM # 6

La variation de l'impédance représentée par les variations de la résistance (ΔR) et la réactance (ΔX) est évaluée par la différence entre les valeurs R et X obtenues dans le cas de la plaque fissurée et ceux obtenues dans le cas de la plaque saine.

A titre d'illustration, les figures Fig.IV.42 et Fig.IV.43 montrent respectivement les intensités des composantes et modules des potentiels \mathbf{A} et \mathbf{v} , dans les cas deux cas de la plaque (saine et fissurée).

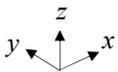
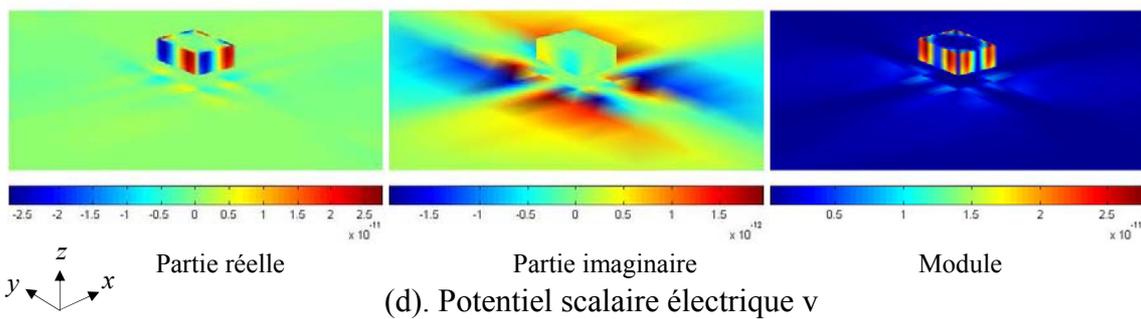
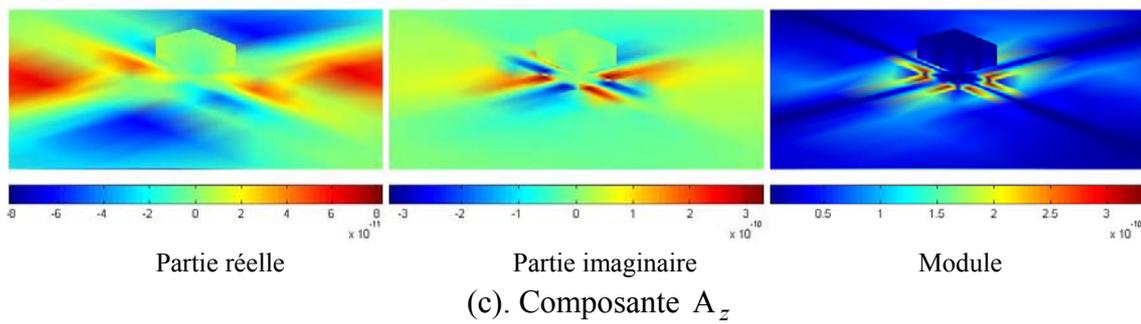
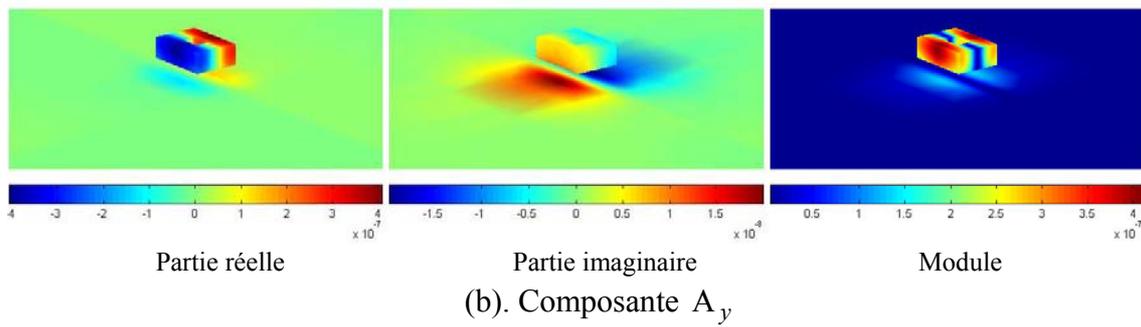
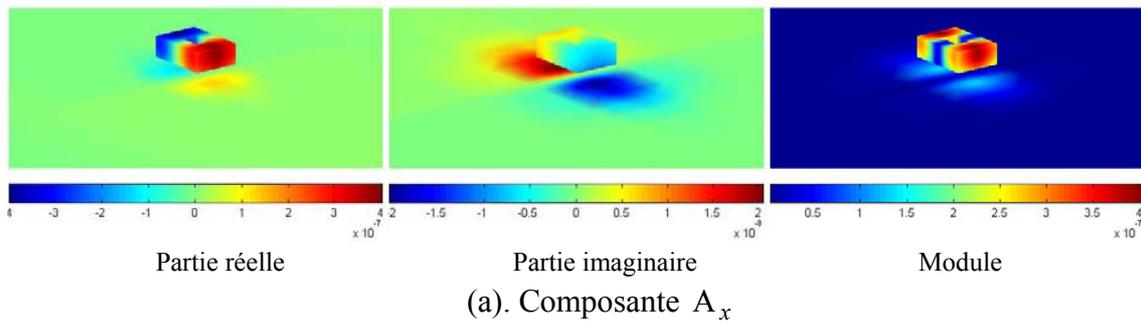


Fig.IV.42. Colormap 3D des potentiels A et v : plaque saine

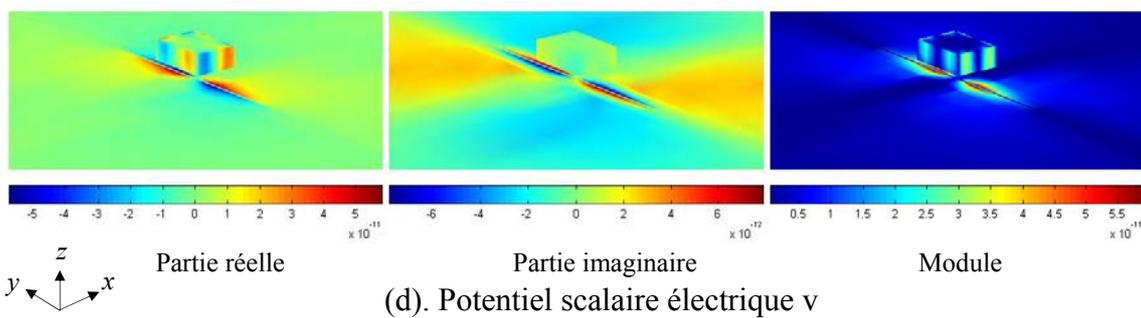
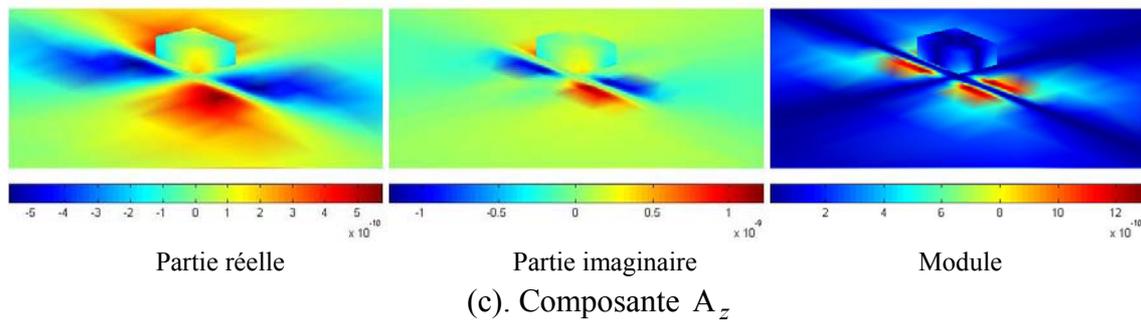
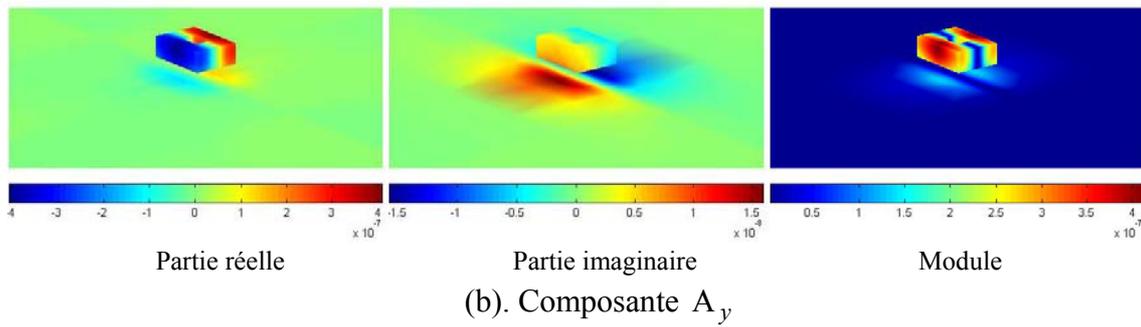
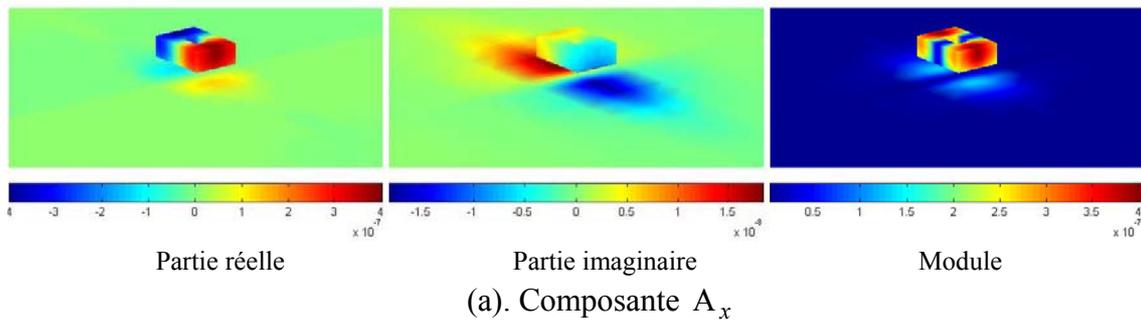


Fig.IV.43. Colormap 3D des potentiels \mathbf{A} et v : plaque fissurée

IV.4.3. Modélisation avec maillage non-conforme : simulation du déplacement

Dans ce deuxième calcul du problème JSAEM#6, on va considérer le déplacement de la bobine d'inspection. Pour cette raison, nous avons introduit une zone non-conforme entre la bobine (partie mobile) et la plaque (partie fixe). Dans la Fig.IV.44, la zone non-conforme est représentée par un parallélépipède d'épaisseur δ_{N-C} choisi égal $\frac{1}{4}$ du lift-off. Alors la géométrie du problème est décomposée en deux sous domaines Ω_1 (bobine + air) et Ω_2 (plaque + air).

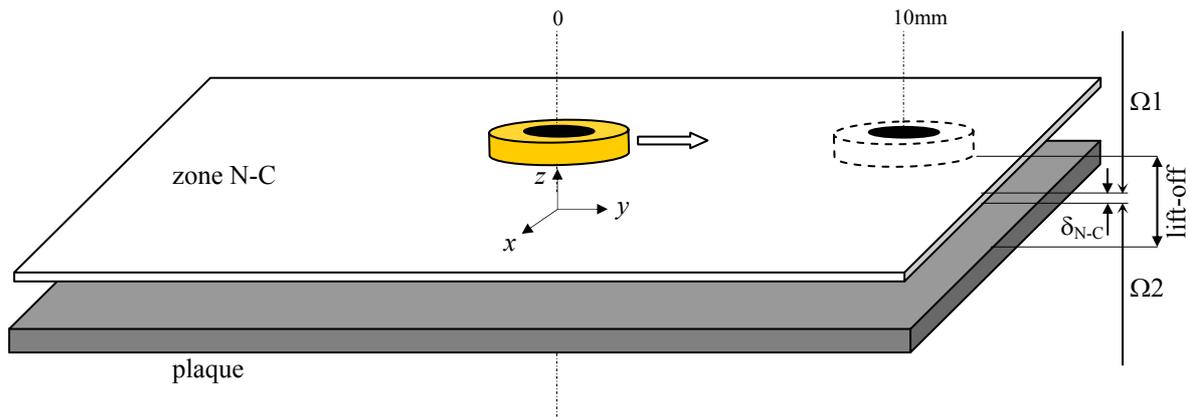


Fig.IV.44. Introduction de la zone non-conforme dans JSAEM#6

IV.4.3.1. Maillage

Dans l'ordre de prendre en compte le déplacement de la bobine, le maillage est réalisé avec la technique non-conforme. Les deux sous domaines sont maillés indépendamment : Ω_1 avec $N_{t-\Omega_1} = 10800$ et Ω_2 avec $N_{t-\Omega_2} = 30600$, alors $N_t = 41400$ (Fig.IV.45).

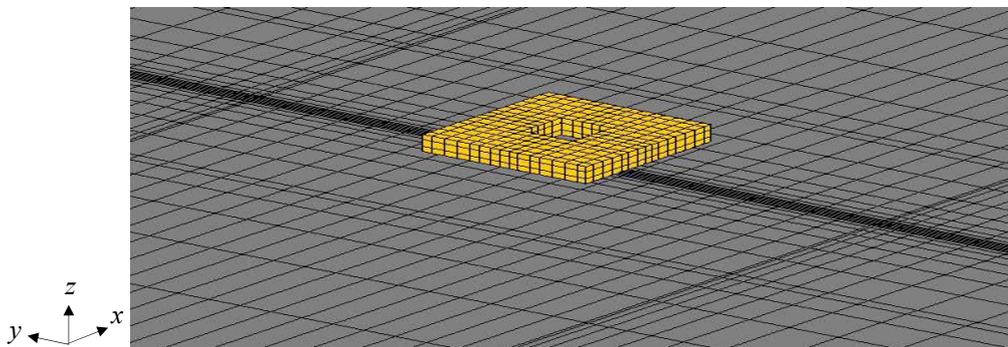


Fig.IV.45. Maillage non-conforme du problème JSAEM#6 : position initiale

Les vues de face et de haut du maillage montrent clairement la non-conformité du maillage entre les sous domaines Ω_1 et Ω_2 (Fig.IV.46 et Fig.IV.47).

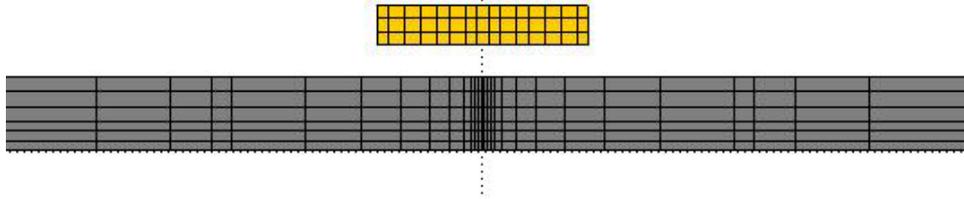


Fig.IV.46. Vue de face (plan $x-z$)

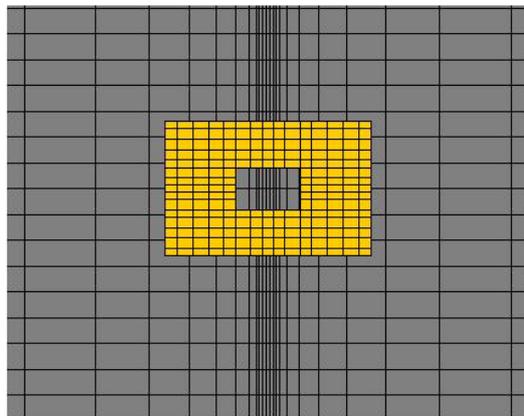


Fig.IV.47. Vue de haut (plan $x-y$)

IV.4.3.2. Résultats

Les résultats de la variation de la résistance et de la réactance pour des liff-off de 0.5mm et 1mm sont montrés par les figures : Fig.IV.48, Fig.IV.49, Fig.IV.50 et Fig.IV.51. A titre de comparaison, dans ces figures on montre les résultats calculés avec le code ANSYS version 5.5 qui utilise la méthode des éléments finis [Burascano 00]. Le déplacement de la bobine est opéré selon la direction y de 0 à 10mm, avec un pas de déplacement choisi égal à 2mm.

Le code de calcul MVF3D fournit des résultats qui sont meilleurs par rapport à ceux calculés avec les éléments finis. L'écart observé dans la Fig.IV.50 est dû peut être à la faible densité de maillage dans la région du liff-off. Le tableau.IV.8, résume les caractéristiques de calcul du solveur BICGSTAB.

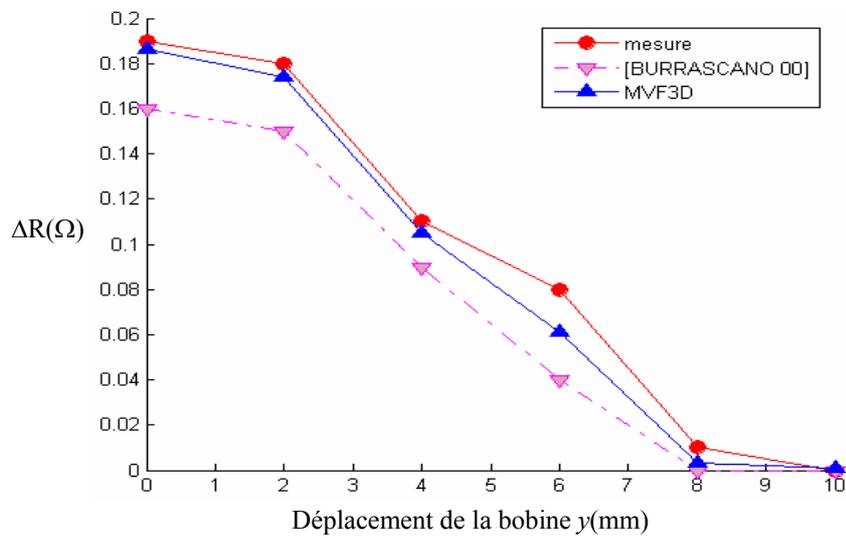


Fig.IV.48. Variation de la résistance en la présence de la fissure, lift-off = 0.5mm

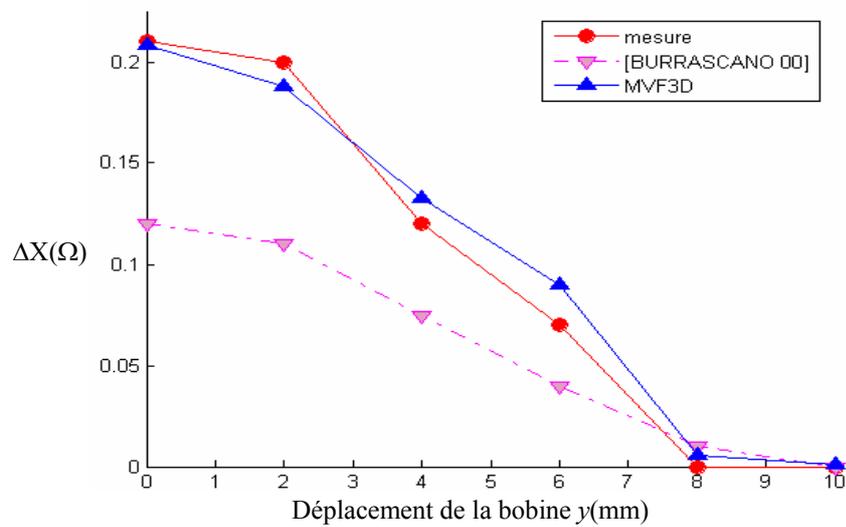


Fig.IV.49. Variation de la réactance en la présence de la fissure, lift-off = 0.5mm

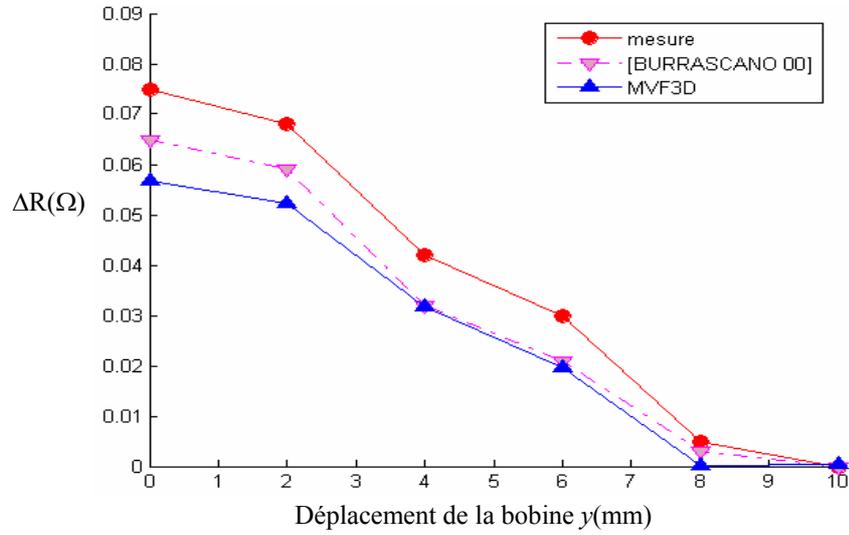


Fig.IV.50. Variation de la résistance en la présence de la fissure, lift-off = 1mm

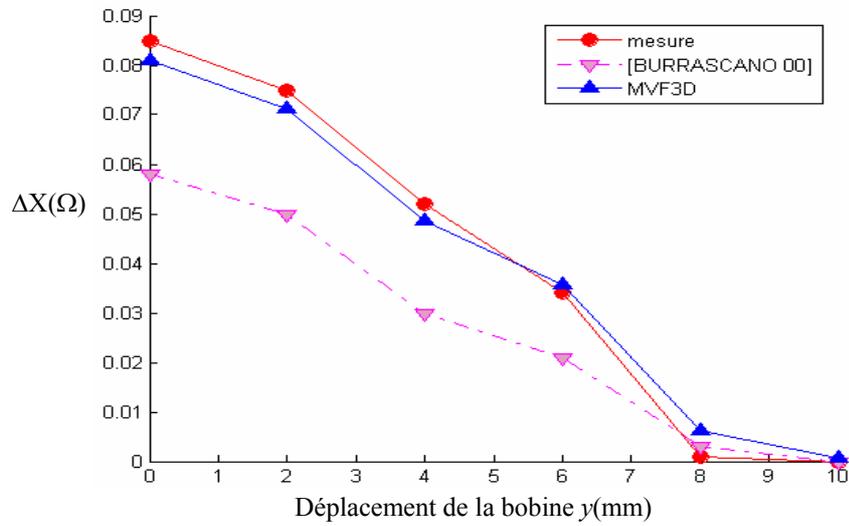


Fig.IV.51. Variation de la réactance en la présence de la fissure, lift-off = 1mm

N_t	Inconnues	Formulation	CPU (s)/position	Itérations/position
41400	165600	AG	~ 933	~ 1000

Tableau.IV.8. Caractéristiques de convergence du solveur BICGSTAB

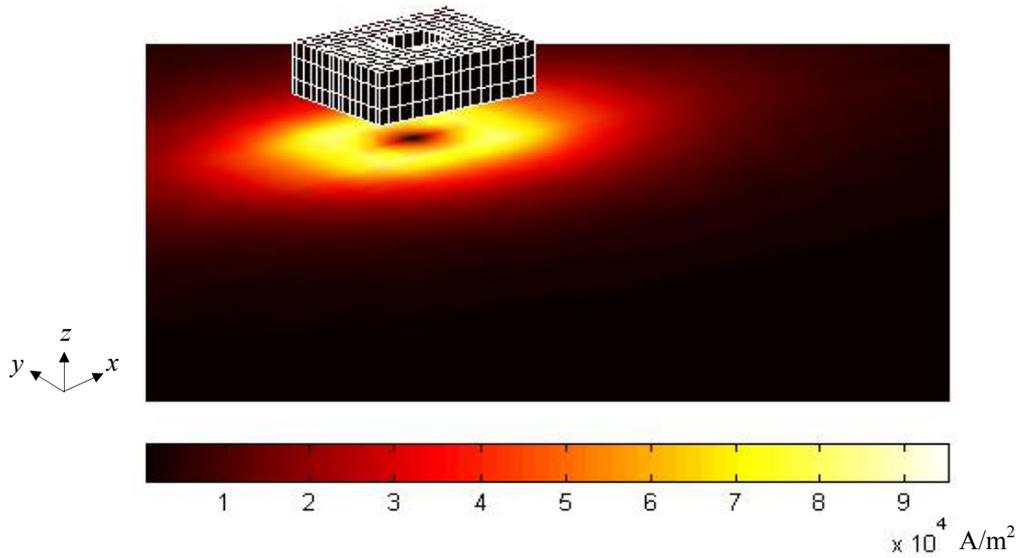


Fig.IV.52. Densité des courants induits dans la plaque saine après un déplacement de 4mm de la bobine

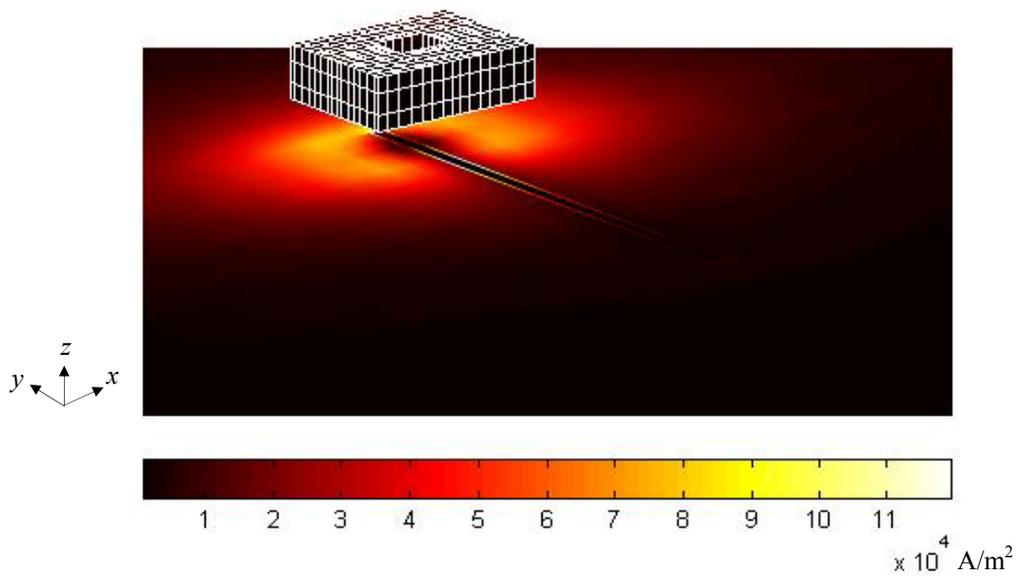


Fig.IV.53. Densité des courants induits dans la plaque fissurée après un déplacement de 4mm de la bobine

Les figures : Fig.IV.52 et la Fig.IV.53, représentent respectivement la densité des courants induits dans la plaque après un déplacement de 4mm de la bobine, placée avec un lift-off de 0.5mm, dans les cas : plaque saine et plaque fissurée. Dans la Fig.IV.54 on trace la signature de la fissure dans le plan d'impédance. Dans l'inspection en mode absolu, la signature prend la forme d'une courbe [Helifa 06] dont sa longueur est fortement liée à la variation du lift-off.

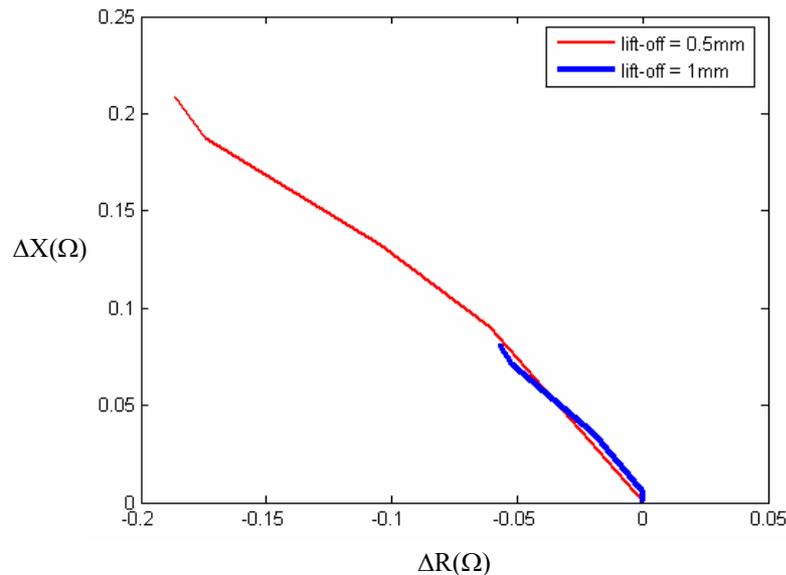


Fig.IV.54. Signature de la fissure obtenue avec le code MVF3D

IV.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons testé notre code de calcul MVF3D sur quelques cas tests internationaux qui sont destinés à comparer et à valider les codes de calcul des champs électromagnétiques. On peut résumer les résultats de modélisation de chaque dispositif comme suit :

Le problème IEEJ standard :

En premier lieu, nous avons calculé le problème avec un maillage type standard avec $N_t = 91035$. L'erreur de calcul de l'induction magnétique évaluée aux voisinages de l'interface air/fer est de faible valeur (2.38%). Ensuite, nous avons recalculé le problème avec le maillage non-conforme avec une densité réduite $N_t = 49275$, l'erreur de calcul est réduite d'une manière considérable à 1.14%.

Ce premier problème, nous a permis de :

- Valider le modèle magnétostatique, implémenté dans le code MVF3D.

- Valider la technique du maillage non-conforme.
- Montrer les intérêts du maillage non-conforme : une génération de maillage localement raffiné, une meilleure précision de calcul obtenue avec une moindre consommation de mémoire.

Le problème IEEJ avec armature :

De même que le problème IEEJ standard, ce problème a été résolu avec les deux types de maillage. Ici, nous avons déterminé la valeur moyenne de l'induction magnétique canalisée dans le noyau de fer. La valeur mesurée de l'induction dans le noyau a permis de valider notre modèle numérique. Avec le code MFV3D, quel que soit le type de maillage, la valeur moyenne de l'induction est calculée avec une erreur inférieure à 1%. Les mêmes remarques que dans le cas de IEEJ standard, peuvent être répétées ici.

Le problème TEAM#13 :

L'objectif de la modélisation du problème non linéaire TEAM#13 a été la validation de l'algorithme **M-B**. Nous avons calculé l'induction magnétique dans les différentes parties de l'acier selon les parcours des mesures expérimentales. Les résultats obtenus avec le code MFV3D, montrent une bonne concordance avec les résultats expérimentaux. La convergence de l'algorithme **M-B** est obtenue au bout de 26 itérations, avec un temps CPU de 791s pour chaque itération, cela pour un nombre d'inconnues de 731136. Avec l'introduction d'un terme de relaxation, on peut avoir une convergence plus rapide, avec un nombre d'itérations réduit.

Ce problème nous a permis de :

- Valider le modèle magnétostatique non linéaire (algorithme **M-B**).
- Montrer l'intérêt de la méthode des volumes finis dans le calcul des champs magnétostatiques non linéaires.

Le problème JSAEM#6 :

Ce problème de contrôle non destructif a été résolu avec les deux types de maillage. Dans un premier temps, nous avons résolu ce problème avec le maillage standard en considérant une seule position de la bobine. Par la suite, nous avons pris en compte le déplacement de la bobine en utilisant la technique de maillage non-conforme. Les résultats numériques de la variation de l'impédance à la présence d'un défaut montrent une bonne concordance avec les mesures.

Ce problème nous a permis de :

- Valider le modèle magnétodynamique, en particulier le calcul des courants induits.
- Valider l'algorithme de prise en compte du déplacement des parties mobiles.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale

Les travaux de recherches ont été accomplis à différents niveaux : formulations volumes finis tridimensionnelles des principaux modèles mathématiques liés à l'électrotechnique, le problème de l'unicité de la solution, la prise en compte des milieux non linéaires par la technique $\mathbf{M}-\mathbf{B}$, les différentes techniques de maillages hexaédriques, la prise en compte du déplacement des parties mobiles et l'adaptation des matrices globales (d'origines structures 3D) des systèmes algébriques au solveur type gradient conjugué préconditionné.

Au niveau des modèles mathématiques, l'implémentation des formulations en potentiel \mathbf{A} et en potentiels $\mathbf{A}-V$, ainsi que la prise en compte ou non de la jauge de Coulomb, a donné lieu à une analyse de la modélisation des principaux modèles issus du système de Maxwell. Au niveau du maillage, la génération de trois types de maillage tridimensionnel, régulier, irrégulier et non-conforme, a conduit à une souplesse supplémentaire pour la modélisation des géométries constituant des objets ayant différentes dimensions ; par exemple les dimensions de la boîte d'air sont très grandes devant l'épaisseur du blindage dans le problème IEEJ avec armature. Nous avons étendu la technique du maillage non-conforme à la prise en compte du déplacement des parties mobiles.

Le code de calcul MVF3D développé sous l'environnement Matlab, est testé et validé sur quelques cas tests internationaux destinés à valider les codes de calcul des champs électromagnétiques :

- En magnétostatique linéaire : IEEJ standard et IEEJ avec armature.
- En magnétostatique non linéaire : TEAM Workshop#13.
- En magnétodynamique : JSAEM#6.

Ces problèmes tests sont modélisés successivement à l'aide des formulations jaugées et non jaugées, en considérant parfois le maillage non-conforme. Dans le cas général, la convergence des formulations non jaugées (SG) est impossible, cela est dû au problème de l'unicité de la solution. En revanche, les formulations jaugées (AG) fournissent de très bons résultats avec une meilleure stabilité de calcul, d'où l'importance d'imposer la jauge.

L'induction magnétique calculée aux voisinages de l'interface air/fer dans le problème IEEJ standard, comparée avec les mesures expérimentales montre une bonne qualité de calcul de champ magnétostatique linéaire. Une meilleure répartition de l'induction magnétique dans le domaine de calcul est obtenue. On note la stabilité et la rapidité de calcul obtenu avec le solveur BICGSTAB avec préconditionnement Jacobien. En l'absence de la jauge de Coulomb, la distribution de l'induction magnétique est erronée. Aussi, au niveau du solveur on remarque le nombre élevé d'itérations.

Le premier test du maillage non-conforme a concerné le problème IEEJ standard. Par rapport à la méthode des volumes finis avec maillage standard, la méthode avec maillage non-conforme produit des résultats très proches de ceux mesurés. En plus, le temps CPU

est réduit de manière considérable, presque de moitié, sans oublier le gain en espace mémoire.

Le calcul du problème TEAM#13 montre l'efficacité de la méthode des volumes finis dans le calcul des champs dans des milieux saturés, une bonne concordance avec les résultats de mesures est obtenue. Une bonne convergence est obtenue avec la technique $\mathbf{M}-\mathbf{B}$, et avec un terme de relaxation, on peut avoir une convergence plus rapide, avec nombre d'itérations réduit en conservant la même précision de calcul.

Le calcul des courants induits et l'impédance de la bobine dans le problème de contrôle non destructive JSAEM#6, a prouvé que la MVF n'est pas moins efficace que la MEF. Pour une position donnée de la bobine, les résultats obtenus avec le code MVF3D sont très proches des résultats expérimentaux. Un deuxième test est réalisé avec ce problème ; il s'agit de la prise en compte du déplacement de la bobine d'inspection. Pour cela nous avons introduit une zone non-conforme entre la bobine et la plaque conductrice. Les résultats de la variation de la résistance et de la réactance obtenus par le code MVF3D montre une bonne qualité de calcul.

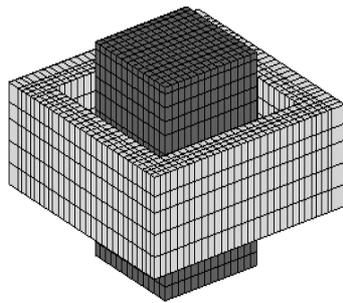
Comme résultat final de ce travail de thèse : nous avons montré que la MVF est une méthode très prometteuse en terme de précision et de rapidité dans la résolution des problèmes d'électrotechnique.

En terme de perspectives, il pourrait être intéressant de développer des volumes finis tétraédriques afin de modéliser des structures ayant des frontières de forme complexe. D'autre part, pour donner une souplesse supplémentaire au code MVF3D à résoudre la majorité des problèmes rencontrés, nous avons pensé traiter les problèmes inverses en intégrant l'algorithme Simplex de Matlab dont la résolution est basée sur le modèle direct déjà développé. Cela a pour objectif de calculer la perméabilité d'un matériau ferromagnétique, la conductivité d'un matériau conducteur ou bien la reconstitution d'une fissure dans une application de CND par courant de Foucault. Le calcul des forces est aussi envisageable. En un mot, ce travail de thèse peut être vu comme une plate forme d'un code de calcul puissant en volumes finis pour la modélisation des problèmes d'électrotechnique.

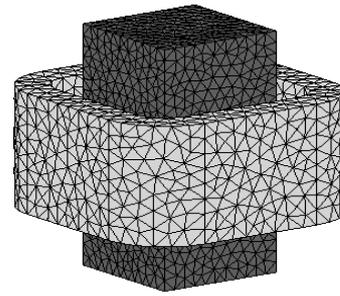
ANNEXES

Annexe A. Comparaison entre la MEF et la MVF

Cette annexe consiste à une comparaison entre les méthodes MEF et MVF en termes de performances de calcul. Pour le problème IEEJ standard (chapitre IV), on construit la même densité de maillage avec les deux méthodes (Fig.A.1).



(a). Maillage avec MVF, $N_t = 38532$



(b). Maillage avec MEF, $N_t = 38577$

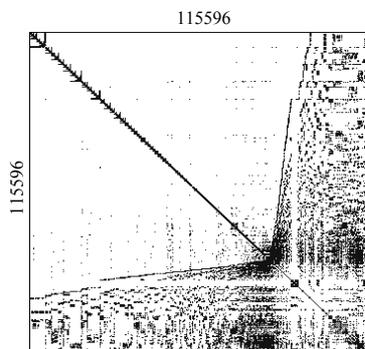
Fig.A.1. Maillage du problème IEEJ standard avec les deux méthodes

La discrétisation de la formulation en potentiel vecteur magnétique du modèle de la magnéto-statique linéaire par les deux méthodes conduit aux deux systèmes matriciels :

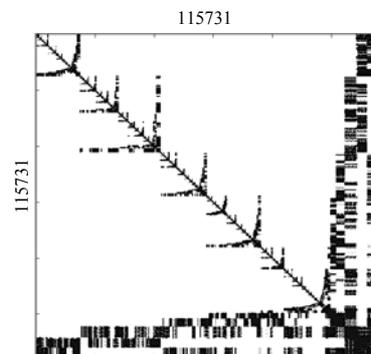
$$\left[\mathbf{K}^{\text{MVF}} \right] \left[\mathbf{A} \right] = \left[\mathbf{J}_s^{\text{MVF}} \right] \quad (\text{A.1})$$

$$\left[\mathbf{K}^{\text{MEF}} \right] \left[\mathbf{A} \right] = \left[\mathbf{J}_s^{\text{MEF}} \right] \quad (\text{A.2})$$

Où \mathbf{K}^{MVF} et \mathbf{K}^{MEF} sont les matrices globales obtenues avec les méthodes MVF et MEF, respectivement. $\mathbf{J}_s^{\text{MVF}}$ et $\mathbf{J}_s^{\text{MEF}}$ sont les vecteurs sources. Après le réarrangement de Cuthill-McKee, les structures des matrices \mathbf{K}^{MVF} et \mathbf{K}^{MEF} sont représentées sur la Fig.A.2.



(a). \mathbf{K}^{MVF} avec $\text{Nnz} = 870212$



(b). \mathbf{K}^{MEF} avec $\text{Nnz} = 4641209$

Fig.A.2. Structures des deux matrices

Il est clair que la matrice K^{MVF} avec 870212 éléments non nuls (Nnz) possède une structure plus creuse que la matrice K^{MEF} avec 4641209 éléments non nuls.

Pour la solution des équations (A.1) et (A.2) nous avons employé le solveur BICGSTAB avec préconditionnement Jacobien. Les résultats numériques obtenus avec la MEF et la MVF ainsi que les mesures de la composante z de l'induction magnétique sont montrés sur la Fig.A.3. Dans le tableau.A.1, on résume les données du calcul.

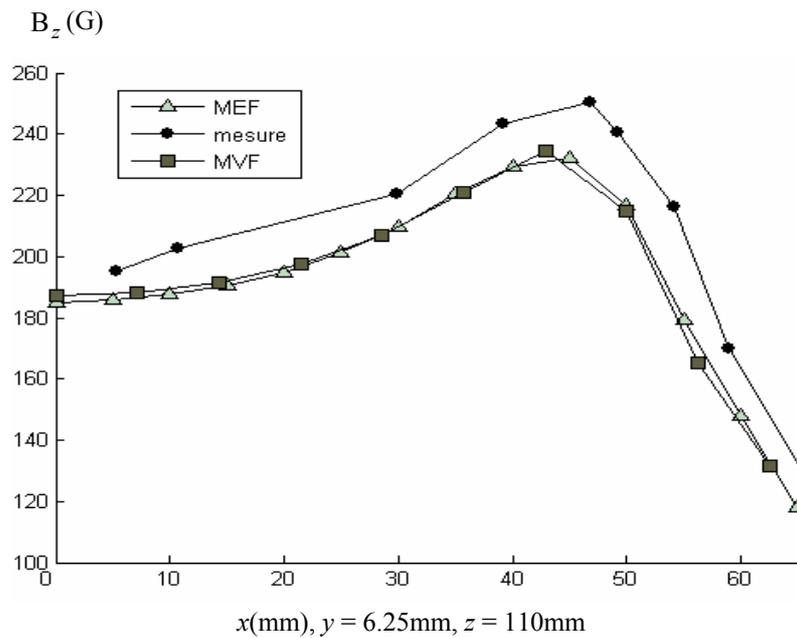


Fig.A.3. Comparaison de la composante z de l'induction magnétique

Points de comparaison		MEF	MVF
Erreur (%)	max	9.02	9.78
	moy	6.60	6.57
Temps CPU (s)	construction du système	63	6
	solution	273	41
	totale	336	47
Taille du système	nœuds	38577	38532
	inconnues	115731	115596
	Nnz(K)	4641209	870212
Iterations		435	174

Tableau.A.1. Données du calcul des deux méthodes

Il est montré que dans les deux méthodes nous avons obtenues presque la même précision de calcul. Néanmoins, la méthode MVF nécessite :

- 2.5 fois moins nombre d'itérations,
- 7.15 fois moins temps CPU,
- 5.33 fois moins occupation de mémoire

par rapport à la MEF.

En conséquence, nous pouvons confirmer que la méthode des volumes finis est une méthode rapide pour le calcul du champ magnétostatique tridimensionnel. Cette particularité peut être exploitée pour la modélisation des systèmes électromagnétiques aboutissant à des systèmes matriciels de grandes tailles.

Annexe B. Choix du solveur

Plusieurs méthodes itératives peuvent être employées pour résoudre les systèmes linéaires de la forme $[K][A]=[b]$. L'emploi de la méthode du gradient conjugué est un moyen qui permet de trouver la solution plus rapidement. Dans la littérature, les solveurs implémentés sous environnement Matlab tels que : BICGSTAB, CGS, GMRES, sont les plus utilisés. En effet, le comportement de la convergence d'un solveur dépend sans doute de la structure des propriétés de la matrice K et le vecteur b .

Généralement la méthode des volumes finis produit une matrice K de grande taille mais souvent creuse et définie positive. Pour cette matrice, un bon choix peut être le solveur BICGSTAB préconditionné. Afin de mettre en valeur ce choix, nous avons mené une série de tests avec les différents solveurs.

Problème test : IEEJ standard (chapitre IV), maillage avec $N_t = 27225$, formulation jaugée. La précision de calcul est 10^{-5} et le nombre maximal d'itérations est fixé à 10000.

Solveur	Préconditionneur	Temps CPU			Iter.	Convergence
		Précond.	Résol.	Total		
BICGSTAB	DIAG	0.06	21	21.06	100	oui, $er < Pr$
BICGSTAB	ILU	124	1000	/	/	divergence
BICGSTAB	ICHOL	45	35	80	90	oui, $er < Pr$
BICGSTAB	/	/	206	206	997	lente
CGS	DIAG	0.06	23.5	23.56	154	oui, $er < Pr$
CGS	ILU	124	1061	1185	/	divergence
CGS	ICHOL	45	48.7	93.7	144	oui, $er < Pr$
CGS	/	/	150.8	150.8	/	divergence
GMRES	DIAG	0.06	~0.15	/	/	divergence
GMRES	ILU	124		/	/	divergence
GMRES	ICHOL	45		/	/	divergence
GMRES	/	/		/	/	divergence
BICGSTAB	ILU + CM	62	2115	/	/	divergence
BICGSTAB	ICHOL+CM	4	143	147	363	oui, $er < Pr$
GAUSS-S	/	/	286	286	3894	oui, $er < Pr$

Tableau.B.1. Caractéristiques de convergence des différents solveurs

Dans le tableau.B.1 on résume les caractéristiques de convergence des solveurs BICGSTAB, CGS, GMRES et Gauss Seidel. Les préconditionneurs associés sont :

DIAG : matrice diagonal dite de Jacobi.

ILU : factorisation incomplète LU effectuée avec une tolérance de 10^{-2} .

ICHOL : factorisation incomplète de Cholesky avec une tolérance de 10^{-2} .

Parfois on considère le réarrangement de Cuthill-McKee (CM). Il est clair que le préconditionnement DIAG est le moins coûteux en temps CPU (0.06s).

Le temps de résolution du solveur BICGSTAB sans préconditionnement est égal à 206s. Cependant, avec le préconditionneur DIAG ce temps est réduit à 21s.

Dans la Fig.B.1, on montre l'erreur du potentiel vecteur magnétique $Err(\mathbf{A})$ en fonction du nombre d'itérations pour les solveurs suivants :

- BICGSTAB-J : solveur BICGSTAB avec préconditionnement DIAG.
- BICGSTAB-C : solveur BICGSTAB avec préconditionnement Cholesky.
- CGS-J : solveur CGS avec préconditionnement DIAG.
- CGS-C : solveur CGS avec préconditionnement Cholesky.
- BICGSTAB-C-CM : solveur BICGSTAB avec préconditionnement Cholesky en considérant le réarrangement de Cuthill-McKee

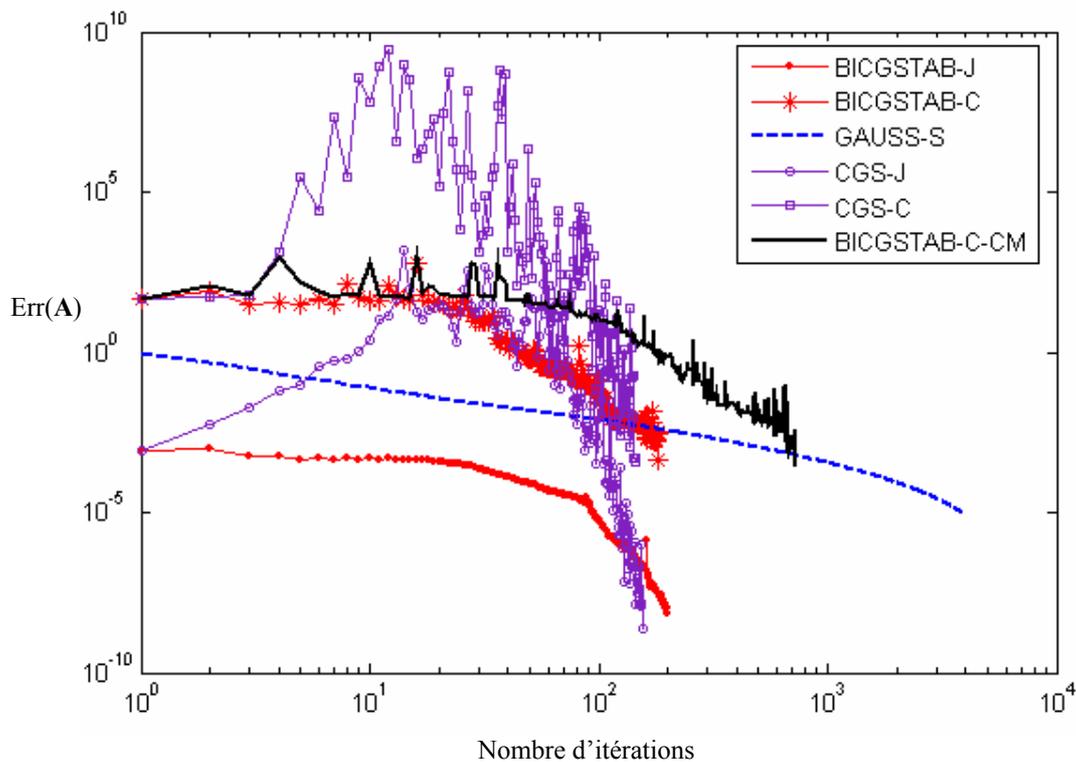


Fig.B.1. Convergence de quelques solveurs itératifs

Le solveur BICGSTAB-J, que nous avons choisi offre une convergence stable et rapide par rapport aux autres solveurs.

Annexe C. Effet de l'épaisseur de la zone N-C

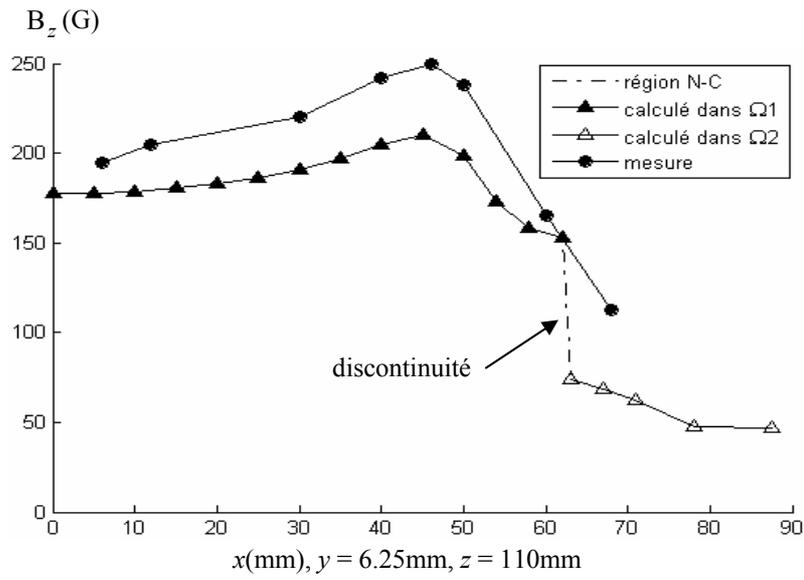
Nous avons effectué une série de tests en considérant plusieurs épaisseurs de la zone non-conforme (δ_{N-C}). Dans le tableau.C.1 on donne les valeurs calculées de l'induction magnétique pour certaines positions selon le trajet $x(\text{mm})$, $y = 6.25\text{mm}$ et $z = 110\text{mm}$, ainsi que l'erreur moyenne (Err.moy) et maximale (Err.max) de l'induction magnétique pour chaque valeur de δ_{N-C} .

$x(\text{mm}) \rightarrow$	6	12	30	40	46	50	60	Err.max (%)	Err.moy (%)
$\delta_{N-C}(\text{mm})$	$B_z(\text{G})$ calculé								
1	177.9	179.4	191.2	204.6	207.6	198.4	155.6	16.97	12.74
3	196.9	198.9	215.0	233.1	238.1	228.4	169.6	4.74	3.06
5	202.6	204.8	222.4	242.2	248.1	238.9	167.7	3.89	1.14
7	200.9	203.1	221.2	241.4	247.7	239.6	154.6	6.29	1.80
12	202.0	204.4	223.3	244.5	252.0	247.1	142.1	13.89	3.56
17	204.7	207.1	226.9	249.3	258.6	257.5	136.1	17.49	5.89
19	205.5	208.0	228.1	251.2	261.4	261.9	134.0	18.77	6.81
21	205.9	208.4	229.1	252.8	264.0	266.2	131.8	20.13	7.64
23	206.6	209.1	230.3	254.9	267.2	271.2	129.7	21.39	8.60
$B_z(\text{G})$ mesuré	195	205	220	242	250	238	165		

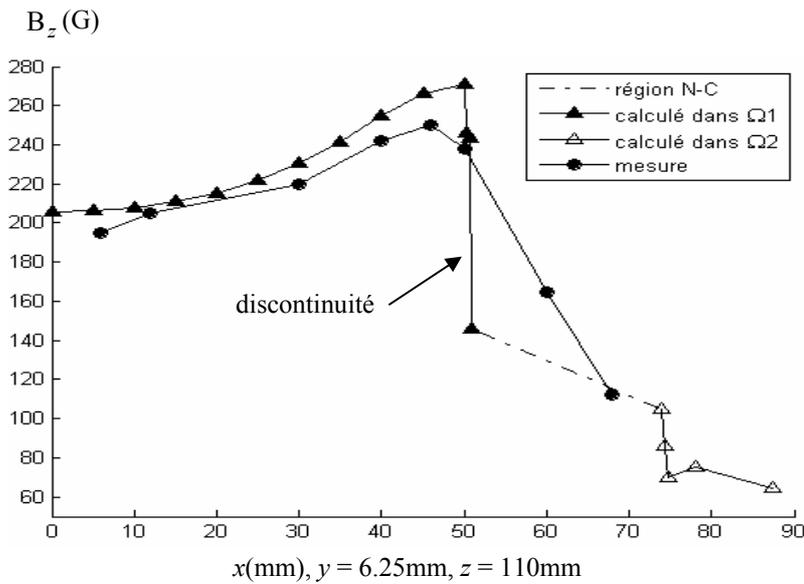
Tableau.C.1. Effet de l'épaisseur de la zone N-C sur la précision de calcul

On constate que pour $\delta_{N-C} = 5\text{mm}$, une meilleure précision est obtenue avec une erreur moyenne de l'induction magnétique égale à 1.14%.

Les deux cas extrêmes de δ_{N-C} sont montrés sur la Fig.C.1. Le premier cas (Fig.C.1.a), représente la composante z de l'induction magnétique pour une faible épaisseur de la zone non-conforme ($\delta_{N-C} = 1\text{mm}$). Par contre, dans la Fig.C.1.b, la région N-C possède une épaisseur importante ($\delta_{N-C} = 23\text{mm}$). Dans ces deux cas, l'induction magnétique est obtenue avec une discontinuité importante. En effet, cela est dû à l'incohérence entre l'épaisseur δ_{N-C} et les dimensions des volumes élémentaires situés immédiatement sur les deux cotés de la zone non-conforme (une forte discontinuité du maillage).



(a). $\delta_{N-C} = 1$ mm



(b). $\delta_{N-C} = 23$ mm

Fig.C.1. Composante z de l'induction magnétique pour les deux cas extrêmes de l'épaisseur de la zone N-C

En conséquence, un bon choix de l'épaisseur δ_{N-C} ne doit pas conduire à une forte discontinuité du maillage.

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie

- [Abakar 01] A. Abakar, “Modélisation tridimensionnelle de systèmes électromagnétiques comportant des régions filaires et des régions minces : application en CEM 50Hz à des dispositifs EDF”, Thèse de doctorat, Spécialité génie électrique, Institut national polytechnique de Grenoble, 2001.
- [Alotto 98] P. Alotto, F. Delfino *et al.*, “A mixed face-edge finite element formulation for 3D magnetostatic problems”, IEEE Trans. Magn., Vol. 34, No. 5, pp. 2445-2448, Sep. 1998.
- [Ayoub 92] M. Ayoub, F. Roy *et al.*, “Numerical modelling of 3D magnetostatic saturated structures with a hybrid FEM-BEM technique”, IEEE Trans. Magn., Vol. 28, No. 2, pp. 1052-1055, Mar. 1992.
- [Bakhtiari 99] S. Bakhtiari, D. S. Kupperman, “Modeling of eddy current probe response for steam generator tubes”, Nucl. Eng. and Design, 194, pp. 57-71, Elsevier 1999.
- [Balasubrama 02] S. Balasubramanian, S. N. Lalgudi and B. Shanker, “Fast integral equation scheme for computing magnetostatic fields in nonlinear media”, IEEE Trans. Magn., Vol. 38, No. 5, pp. 3426-3432, Sep. 2002.
- [Baumann 06] D. Baumann, “A 3-D numerical field solver based on the finite-volume time-domain method”, Thèse de doctorat, Spécialité sciences, Swiss federal institute of technology zurich, 2006.
- [Ben-Belgac 01] F. Ben-Belgacem, A. Buffa and Y. Maday, “The mortar finite element method for 3D Maxwell equations: first results”, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 39, No. 3, pp. 880-901, 2001.
- [Biro 96] O. Biro, K. Preis and K. R. Richter, “On the use of the magnetic vector potential in the nodal and edge finite element analysis of 3-D magnetostatic problems”, IEEE Trans. Magn., Vol. 32, No. 3, pp. 651-654, May 1996.
- [Biro 89] O. Biro and K. Preis, “On the use of the magnetic vector potential in the finite element analysis of three dimensional eddy currents”, IEEE Trans. Magn., Vol. 25, No. 4, pp. 3145-3159, Jul. 1989.
- [Bloomberg 85] D. S. Bloomberg, V. Castelli, “Reformulation of nonlinear magnetostatic equations for rapid iterative convergence”, IEEE Trans. Magn., Vol. 21, No. 2, pp. 1174-1180, Mar. 1985.
- [Boualem 98] B. Boualem, F. Piriou, “Modélisation 3D du circuit électrique et du mouvement : application à la machine asynchrone”, EPJ. App. Phys., Vol. 1, No. 1, pp. 67-71, Jan. 1998.

- [Bouillault 03] F. Bouillault, A. Buffa *et al.*, “The mortar edge element method in three dimensions: application to magnetostatics”, *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol. 24, No. 4, pp. 1303-1327, 2003.
- [Boussavit 90] A. Boussavit, “Le calcul des courants de Foucault en dimension 3 avec le champ électrique comme inconnu”, *Rev. Phys. App.* Vol. 25, No. 2, pp. 189-197, 1990.
- [Boussavit 83] A. Boussavit and J. C. Vérité, “The TRIFOU code : solving the 3-D eddy currents problem by using H as state variable”, *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 19, No. 6, pp. 2465-2470, Nov. 1983.
- [Burascano 00] P. Burascano, E. Cardelli *et al.*, “Numerical analysis of eddy current non destructive testing JSAEM benchmark problem # 6 – cracks with different shapes”, *Proc. ENDE-V*, pp. 333-340, Budapest, Jun. 2000.
- [Charao 01] A. S. Charao, “Multiprogrammation parallèle générique des méthodes de décomposition de domaine”, Thèse de doctorat, Spécialité informatique : systèmes et communications, Institut national polytechnique de Grenoble, 2001.
- [Cheriet 07] A. Cheriet, M. Feliachi, S. M. Mimoune, “Nonconforming mesh generation for finite volume method applied to 3-D magnetic field analysis”, *EPJ. App. Phys.*, Vol. 37, No. 2, pp. 191-195, Feb. 2007.
- [Cheriet 06^a] A. Cheriet, A. Zaoui, M. Feliachi, S. M. Mimoune, “Computational performance comparison between FVM and FEM for 3-D magnetostatic problems”, *NUMELEC’06*, 5^{ème} Conférence Européenne sur les Méthodes Numériques en Electromagnétisme, Lille FRANCE, Proc., Art. 47, Nov. 2006.
- [Cheriet 06^b] A. Cheriet, S. M. Mimoune, M. Feliachi, “3-D nonlinear magnetostatic field computation with finite volume method by means of M-B iteration”, *NUMELEC’06*, 5^{ème} Conférence Européenne sur les Méthodes Numériques en Electromagnétisme, Lille FRANCE, Proc., Art. 25, Nov. 2006.
- [Cheriet 01] A. Cheriet, “Modélisation tridimensionnelle des phénomènes électromagnétiques par la méthode des volumes finis avec la formulation en potentiel vecteur magnétique et en potentiel scalaire électrique”, Thèse de magister, Spécialité électrotechnique, Option électricité industrielle, Université de Biskra, 2001.
- [Chung 03] E. T. Chung, Q. Du and J. Zou, “Convergence analysis of a finite volume method for Maxwell’s equations in nonhomogeneous media”, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 41, No. 1, pp. 37-63, 2003.
- [Cioni 97] J. P. Cioni, M. Remaki, “Comparaison de deux méthodes de volumes finis en électromagnétisme”, Rapport de recherche No. 3166, INRIA Sophia Antipolis, ISSN 0249-6399, Mai 1997.

- [Coulomb 81] J. L. Coulomb, "Finite element three dimensional magnetic field computation", IEEE Trans. Magn., Vol. 17, No. 6, pp. 3241-3246, Nov. 1981.
- [Davat 85] B. Davat, Z. Ren, M. Lajoie-Mazenc, "The movement in field modelling", IEEE Trans. Magn., Vol. 21, No. 6, pp. 2296-2298, Nov. 1985.
- [Davies 96] J. B. Davies and A. J. Dean, "Finite volume with non-uniform mesh for the solution of Maxwell's equations", IEEE Trans. Magn., Vol. 32, No. 3, pp. 1417-1420, May 1996.
- [De-Gerseme 01] H. De-Gerseme and K. Hameyer, "Full multigrid for Magnetostatics using unstructured and non-nested meshes", IEEE Trans. Magn., Vol. 37, No. 5, pp. 3460-3464, Sep. 2001.
- [Demerdash 90] N. A. Demerdach and R. Wang, "Theoretical and numerical difficulties in 3-D vector potential methods in finite element magnetostatic computations", IEEE Trans. Magn., Vol. 26, No. 5, pp. 1656-1658, Sep. 1990.
- [Demerdash 81] N. A. Demerdach and T. W. Nehl, "Nonlinear three dimensional magnetic vector potential finite element solution of field problems including experimental verification", IEEE Trans. Magn., Vol. 17, No. 6, pp. 3408-3410, Nov. 1981.
- [Demerdash 76] N. A. Demerdach and T. W. Nehl, "Flexibility and economics of implementation of the finite element and difference techniques in nonlinear magnetic fields of power devices", IEEE Trans. Magn., Vol. 12, No. 6, pp. 1036-1038, Nov. 1976.
- [Depeyre 97] S. Depeyre, "Etude de schémas d'ordre élevé en volumes finis pour des problèmes hyperboliques. Application aux équations de Maxwell, d'Euler et aux écoulements diphasiques dispersés", Thèse de doctorat, Spécialité mathématiques appliquées, Ecole nationale des Ponts et Chaussées, 1997.
- [Dong 05] G. Dong, J. Zou *et al.*, "The comparison between FVM and FEM for EIT forward problem", IEEE Trans. Magn., Vol. 41, No. 5, pp. 1468-1471, May 2005.
- [Emmanuel 99] S. Emmanuel, "Diagnostic des machines asynchrones: modèles et outils paramétriques dédiés à la simulation et à la détection de défauts", Thèse de doctorat, Automatique et informatique appliqué, Université de Nantes, 1999.
- [Feliachi 81] M. Feliachi, "Contribution au calcul du champ électromagnétique par la méthode des éléments finis en vue d'une modélisation dynamique de machines électriques", Thèse de doctorat, Spécialité génie électrique, Conservatoire national des arts et métiers Paris, 1981.

- [Fetzer 97] J. Fetzer, S. Kurz and G. Lehner, "Comparison of analytical and numerical integration techniques for the boundary integrals in the BEM-FEM coupling considering TEAM workshop problem no. 13", *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 33, No. 2, pp. 1227-1230, Mar. 1997.
- [Fetzer 96] J. Fetzer, S. Kurz and G. Lehner, "Comparison between different formulations for the solution of 3D nonlinear Magnetostatic problems using BEM-FEM coupling", *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 32, No. 3, pp. 663-666, May 1996.
- [Fukutomi 98] H. Fukutomi, H. Huang *et al.*, "Identification of crack depths from eddy current testing signal", *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 34, No. 5, pp. 2893-2896, Sep. 1998.
- [Gheorghe 05] S. Gheorghe, "On multigrid methods for solving electromagnetic scattering problems", Thèse de doctorat, Der Christian-Albrechts-University, 2005.
- [Golovanov 98] C. Golovanov, J. L. Coulomb, Y. Maréchal and G. Meunier, "3D mesh connection techniques applied to movement simulation", *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 34, No. 5, pp. 3359-3362, Sep. 1998.
- [Golovanov 97] C. Golovanov, "Développement de formulations éléments finis 3-D en potentiel vecteur magnétique: application à la simulation de dispositifs électromagnétiques en mouvement", Thèse de doctorat, Spécialité génie électrique, Institut national polytechnique de Grenoble, 1997.
- [Hafla 05] W. Hafla, A. Buchau *et al.*, "Efficient integral equation method for the solution of 3-D magnetostatic problems", *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 41, No. 5, pp. 1408-1411, May 2005.
- [Helifa 06] B. Helifa, A. Oulhadj, "Detection and measurement of surface cracks in ferromagnetic materials using eddy current testing", *NDT. E. Int.* Vol. 39, pp. 384-390, 2006.
- [Kanai 90] Y. Kanai, T. Abe *et al.*, "Further discussion on magnetic vector potential finite element formulation for three-dimensional magnetostatic field analysis", *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 26, No. 2, pp. 411-414, Mar. 1990.
- [Kanai 87] Y. Kanai, T. Abe *et al.*, "Fast and stable non-linear converging method", *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 23, No. 5, pp. 3290-3292, Sep. 1987.
- [Kanayama 06] H. Kanayama and S. I. Sugimoto, "Effectiveness of A- ϕ method in a parallel computing with an iterative domain decomposition method", *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 42, No. 4, pp. 539-542, Apr. 2006.
- [Kanayama 03] H. Kanayama, D. Tagami, K. Imoto, and S. Sugimoto, "Finite element computation of magnetic field problems with the displacement current," *Jour. Comput. Appl. Math.*, 159, pp. 77-84, 2003.
- [Kanayama 90] H. Kanayama, H. Motoyama *et al.*, "Three-dimensional Magnetostatic analysis using Nedelec's elements", *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 26, No. 2, pp. 682-685, Mar. 1990.

- [Kawase 95] Y. Kawase, T. Yamaguchi and Y. Hayashi, "Analysis of cogging torque of permanent magnet motor by 3-D finite element method", IEEE Trans. Magn., Vol. 31, No. 3, pp. 2044-2047, May 1995.
- [Kovalev 05] K. Kovalev, "Unstructured hexahedral non-conformal mesh generation", Thèse de doctorat, Spécialité engineering science, Brussel university, 2005.
- [Kurz 97] S. Kurz, J. Fetzer and G. Lehner, "A novel iterative algorithm for the nonlinear BEM-FEM coupling method", IEEE Trans. Magn., Vol. 33, No. 2, pp. 1772-1775, Mar. 1997.
- [Lai 92] H. C. Lai, D. Rodger, P. J. Leonard, "Coupling meshes in 3D problems involving movements", IEEE Trans. Magn., Vol. 28, No. 2, pp. 1732-1734, Mar. 1992.
- [Lavers 96] D. Lavers, I. Boglaev and V. Sirotkin, "Numerical solution of transient 2-D eddy current problem by domain decomposition algorithms", IEEE Trans. Magn., Vol. 32, No. 3, pp. 1413-1416, May 1996.
- [Leonard 88] P. J. Leonard, D. Rodger, "Finite element scheme for transient 3D eddy currents", IEEE Trans. Magn., Vol. 24, No. 1, pp. 90-93, Sep. 1988.
- [Lobry 96] J. Lobry, J. Trécat and C. Broche, "Symmetry and TLM method in nonlinear magnetostatics", IEEE Trans. Magn., Vol. 32, No. 3, pp. 702-705, May 1996.
- [Louai 95] F. Z. Louai, "Modèles magnétodynamiques d'éléments finis pour structures tridimensionnelles de chauffage par induction", Thèse de doctorat, Spécialité systèmes électroniques et informatiques, Université de Nantes, 1995.
- [Mansir 86] H. Mansir, "Contrôle non destructif: modélisation des phénomènes électromagnétiques caractérisation des défauts et optimisation des capteurs", Thèse de doctorat, Spécialité électrotechnique, Ecole centrale de Lyon, 1986.
- [Maréchal 92] Y. Maréchal, G. Meunier, *et al.*, "A general purpose tool for restoring inter-element continuity", IEEE Trans. Magn., Vol. 28, No. 2, pp. 1728-1731, Mar 1992.
- [Mezani 04] S. Mezani, "Modélisation électromagnétique et thermique des moteurs à induction, en tenant compte des harmoniques d'espace", Thèse de doctorat, Génie électrique, Institut national polytechnique de Lorraine, 2004.
- [Minciunescu 98] P. Minciunescu, "Contributions to integral equation method for 3D magnetostatic problems", IEEE Trans. Magn., Vol. 34, No. 5, pp. 2461-2464, Sep. 1998.
- [Muramatsu 05] K. Muramatsu, K. Koda *et al.*, "Method for analyzing 3-D magnetic field in linear actuator using nonconforming mesh with edge elements", IEEE Trans. Magn., Vol. 41, No. 5, pp. 1988-1991, May 2005.

- [Muramatsu 02] K. Muramatsu, Y. Yokoyama and N. Takahashi, "3-D magnetic field analysis using nonconforming mesh with edge elements", IEEE Trans. Magn., Vol. 38, No. 2, pp. 433-436, Mar. 2002.
- [Muramatsu 00] K. Muramatsu, Y. Yasuhiro *et al.*, "Effect of continuity of potential on accuracy in magnetic field analysis using nonconforming mesh", IEEE Trans. Magn., Vol. 36, No. 4, pp. 1578-1582, Jul. 2000.
- [Muramatsu 93] K. Muramatsu, T. Nakata *et al.*, "3-D adaptive mesh refinement using nonconforming elements", IEEE Trans. Magn., Vol. 29, No. 2, pp. 1479-1482, Mar. 1993.
- [Muramatsu 91] K. Muramatsu, T. Nakata *et al.*, "Investigation of effectiveness of 3-D nonconforming mesh", IEEE Trans. Magn., Vol. 27, No. 6, pp. 5211-5213, Nov. 1991.
- [Nakata 90] T. Nakata, N. Takahashi *et al.*, "Comparison of different finite elements for 3-D eddy current analysis", IEEE Trans. Magn., Vol. 26, No. 2, pp. 434-437, Mar. 1990.
- [Nath 93] S. Nath and W. Lord, "Three dimensional hybrid finite-boundary element model for eddy current NDE", IEEE Trans. Magn., Vol. 29, No. 2, pp. 1853-1856, Mar. 1993.
- [Neagoe 94] C. Neagoe, F. Ossart, "Analysis of convergence in nonlinear magnetostatic finite elements problems", IEEE Trans. Magn., Vol. 30, No. 5, pp. 2865-2868, Sep. 1994.
- [Ossart 99] F. Ossart et V. Ionita, "Convergence de la méthode du point fixe modifiée pour le calcul de champ magnétique avec hystérésis", EPJ. App. Phys., Vol. 5, No. 1, pp. 63-69, Jan. 1999.
- [Pascal 03] R. Pascal, "Modélisation des traitement thermique superficiel par induction", Thèse de doctorat, Spécialité mécanique, Ecole centrale de Lyon, 2003.
- [Patankar 80] S. V. Patankar, "Numerical heat transfer and fluid flow", Series in computational methods in mechanics and thermal sciences. 1980 Hemisphere publishing corporation.
- [Peng 84] J. P. Peng, S. Salon and M. V. K. Chari, "A comparison of finite element and boundary element formulations for three-dimensional magnetostatic problems", IEEE Trans. Magn., Vol. 20, No. 5, pp. 1950-1952, Sep. 1984.
- [Perrin-Bit 95] R. Perrin-Bit, J. L. Coulomb, "A three dimensional finite element mesh connection for problems involving mouvement", IEEE Trans. Magn., Vol. 31, No. 3, pp. 1920-1923, May 1995.
- [Preis 91] K. Preis, I. Bardi, *et al.*, "Numerical analysis of 3-D magnetostatic fields", IEEE Trans. Magn., Vol. 27, No. 5, pp. 3798-3803, Sep. 1991.

- [Rachek 07^a] M. Rachek, “Modélisation par éléments finis de systèmes électromagnétiques en mouvement de structures tridimensionnelles, application au couplage magnétique-mécanique et au contrôle non destructif par courants de Foucault”, Thèse de doctorat, Spécialité électrotechnique, Université de Tizi-Ouzou, 2007.
- [Rachek 07^b] M. Rachek and M. Feliachi, “3-D movement simulation techniques using FE methods: application to eddy current non-destructive testing”, *NDT. E. Int.*, Vol. 40, pp. 35-42, Elsevier 2007.
- [Rapetti 00] F. Rapetti, F. Bouillault *et al.*, “Calculation of eddy currents with edge elements on non-matching grids in moving structures”, *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 36, No. 4, pp. 1351-1355, Jul. 2000.
- [Sadowski 92] N. Sadowski, Y. Lefèvre, M. Lajoie-Mazenc, J. Cros, “Finite element torque calculation in electrical machine while considering the movement”, *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 28, No. 2, pp. 1410-1413, Mar. 1992.
- [Sawa 1990] K. Sawa and T. Hirano, “An evaluation of the computational error near the boundary with magnetostatic field calculation by B.E.M.”, *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 26, No. 2, pp. 403-406, Mar. 1990.
- [Shaikh 88] Z. H. Shaikh, H. Yamashita, E. Nakamae, “A three dimensional magnetic field analysis by a novel finite element method using magnetic flux density directly as an unknown variable”, *IEEE Trans. Power Deliv.*, Vol. 3, No. 1, pp. 249-254, Jan. 1988.
- [Shao 88] K. R. Shao and K. D. Zhou, “The iterative boundary element method for nonlinear electromagnetic field calculations”, *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 24, No. 1, pp. 150-153, Jan. 1988.
- [Shyamkumar 88] B. B. Shyamkumar, Z. J. Cendes, “Convergence of iterative methods for nonlinear magnetic field problems”, *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 24, No. 6, pp. 2585-2587, Nov. 1988.
- [Sleijpen 93] G. L. G. Sleijpen and D.R. Fokkema, “BICGSTAB(*l*) for linear equations involving unsymmetric matrices with complex spectrum”, *Electronic Trans. Numerical Analysis*, Vol. 1, pp. 11-32, Sep. 1993.
- [Talukdar 05] P. Talukdar, M. Steven *et al.*, “Finite volume method in 3-D curvilinear coordinates with multiblocking procedure for radiative transport problems”, *Heat and Mass Transfer*, Vol. 48, pp. 4657-4666, Elsevier 2007.
- [Vassent 91] E. Vassent, G. Menier, *et al.*, “Simulation of induction machine operation with step-by-step finite element method coupled with mechanical equation”, *Modelling and control of electrical machines, IMACS'91 New Trends*, pp. 41-46, 1991.

- [Vohralik 04] M. Vohralik, “Méthodes numériques pour des équations elliptiques et paraboliques non linéaires application à des problèmes d’écoulement en milieux poreux et fracturés”, Thèse de doctorat, Spécialité mathématiques, Université Paris XI, 2004.
- [Yaoqin 02] X. Yaoqin, L. Feng and M. Xinshan, “Calculation of TEAM problem 21 by the finite volume method”, IEEE’2002, International conference on communications circuits and systems, Vol. 2, pp. 968-971, Jun. 2002.
- [Yaoqin 01] X. Yaoqin, L. Feng and M. Xinshan, “Computation of eddy current problems by the finite volume method”, ICEMS’2001, International conference on electrical machines and systems, Vol. 2, pp. 1117-1120, Aug. 2001.
- [Yun 97] Z. Q. Yun, B. D. Tan and J. Hung, “Alternative vector formulations for magnetostatics”, IEEE Trans. Magn., Vol. 33, No. 2, pp. 1239-1242, Mar. 1997.
- [Zou 04^a] J. Zou, J. S. Yuan *et al.*, “Magnetic field analysis of iron-core reactor coils by the finite-volume method”, IEEE Trans. Magn., Vol. 40, No. 2, pp. 814-817, Mar. 2004.
- [Zou 04^b] J. Zou, Y. Q. Xie *et al.*, “Analysis of the thin plate eddy-current problem by finite volume method”, IEEE Trans. Magn., Vol. 40, No. 2, pp. 1370-1373, Mar. 2004.

Résumé

Les travaux de cette thèse portent sur l'adaptation de la méthode des volumes finis à la modélisation tridimensionnelle des problèmes d'électrotechnique. Dans ce contexte, nous avons développé le code de calcul MVF3D sous environnement Matlab. Les formulations, en potentiel vecteur magnétique pour la magnétostatique et celle en potentiels vecteur magnétique et scalaire électrique pour la magnétodynamique sont implémentées. L'effet de la Jauge de Coulomb sur l'unicité de la solution a été discuté. La non linéarité magnétique due à la saturation d'un milieu est traitée par la technique M-B. Le maillage associé au code, génère trois types de maillage hexaédrique 3D : régulier, irrégulier avec progression logarithmique et non-conforme. Ce dernier type se fait selon deux étapes, la décomposition de domaine et l'interpolation bilinéaire. La prise en compte du déplacement des parties mobiles est basée sur le maillage non-conforme. En fonction de la taille du système algébrique, deux types de solveurs : Gauss Seidel et gradient conjugué, peuvent être employés. Dans le but de valider le code MVF3D, nous avons considéré quelques problèmes tests internationaux destinés à valider les codes de calcul des champs électromagnétiques, deux en magnétostatique linéaire, un en magnétostatique non linéaire et le quatrième concerne un problème de contrôle non destructif par courant de Foucault.

Mots clés

Méthode des volumes finis 3D, Magnétostatique, Magnétodynamique, Non linéarité magnétique, Jauge de Coulomb, CND par courants de Foucault, Maillage non-conforme, Déplacement.

CONTRIBUTION TO 3D MODELLING BY THE FINITE VOLUME METHOD OF ELECTROMAGNETIC DEVICES

Abstract

This thesis concerns the adaptation of the finite volume method to the three dimensional modelling of the electrotechnical problems. In this context, we have developed the computer code MVF3D under Matlab environment. The magnetic vector potential formulation for magnetostatic and the magnetic vector and scalar electric potentials formulation for magnetodynamic are implemented. The effect of Coulomb Gauge on the unicity of the solution is discussed. Magnetic nonlinearity due to magnetic saturation is treated by means of the M-B technique. The meshing process of the code generates three kind of 3D hexahedral grid : regular, irregular with logarithmic progression and nonconformal. Indeed, this last one is based on two steps, the domain decomposition and the bilinear interpolation. The taking into account of the displacement of moving parts was based on the nonconformal mesh. According to the size of the algebraic system, two solvers : Gauss Seidel and conjugate gradient, can be employed. In order to validate the code MVF3D, we have considered some international test problems intended to validate computer codes of the electromagnetic fields, two in linear magnetostatic, one in nonlinear magnetostatic, and the fourth relates to a problem of eddy current non destructive testing.

Key words

3D Finite volume method, Magnetostatic, Magnetodynamic, Nonlinear magnetic field, Coulomb Gauge, Eddy current NDT, Nonconformal mesh, Displacement.