

COMMANDE ET STABILITE DES SYSTEMES LINEAIRES FLOUS DE TAKAGI-SUGENO

F. KHABER^{*}, A. HAMZAOU^{}**

^{*} Département d'Electrotechnique, Université Ferhat ABBAS de Sétif, 19000, SETIF-ALGERIE

jfkhaber@yahoo.fr

^{**} I.U.T. de Troyes, Département GMP, 9 rue du Québec, 10026 Troyes Cedex France

hamzaouia@iut-troyes.univ-reims.fr

RESUME

Dans cet article, on présente un algorithme pour la conception d'un contrôleur linéaire stabilisant une classe de systèmes flous. Les systèmes en question sont du type Takagi-Sugeno, caractérisés par une représentation linéaire du type $\dot{x} = A_j x + B_j u$. Cet algorithme exploite les modèles locaux du système, obtenus autour de points de fonctionnement et établis par l'expertise humaine sous la forme de règles de type IF-THEN. La mise en oeuvre de l'algorithme exige la stabilité, au sens de Lyapunov, d'au moins un modèle local (A_j, B_j). L'algorithme ainsi développé est appliqué à un robot manipulateur à un degré de liberté. Les simulations sont réalisées sous l'environnement MATLAB 5.3.

1. INTRODUCTION

Les systèmes industriels étant de plus en plus complexes, il est très souvent difficile voir impossible d'en avoir un modèle mathématique afin de mettre en oeuvre sa commande. Une solution pour résoudre ce problème est d'utiliser l'approche floue introduite par [13]. En effet la commande est générée par l'exploitation du modèle du système s'il existe (même avec de grandes incertitudes) et des descriptions linguistiques, fournies par des experts. Néanmoins cette approche est heuristique. Plusieurs auteurs [14], [4]... se sont intéressés à l'étude de la stabilité des systèmes commandés par logique floue. Cet article présente une contribution dans l'analyse de la stabilité de ce type de systèmes. Nous utiliserons la représentation de Takagi-Sugeno [10] et nous montrerons, en utilisant une méthode classique (Lyapunov), qu'on peut mettre en oeuvre une commande stabilisante pour un système incertain. L'algorithme de cette commande est appliqué à un bras de robot à 1 degré de liberté pour en évaluer les performances.

2. DEFINITION DU MODELE DE TAKAGI-SUGENO

Pour représenter un système incertain Takagi et Sugeno ont proposé un modèle flou dynamique constitué de règles dont la partie conclusion est mise sous la forme de représentation d'état linéaire [10] de la forme :

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, r$$

où $x(t)=[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ et $u(t)=[u_1, u_2, \dots, u_m]^T$ sont respectivement le vecteur d'état et le vecteur de commande, A_i et B_i sont deux matrices de dimensions appropriées et r le nombre de règles.

Cette information est fusionnée avec les règles IF-THEN disponibles où la $i^{\text{ème}}$ règle a la forme :

Règle i :

$$\text{IF } x_1(t) \text{ is } F_1^i \text{ and IF } x_2(t) \text{ is } F_2^i \text{ and } \dots \text{ and IF } x_n(t) \text{ is } F_n^i \\ \text{THEN } \quad \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t)$$

où $F_j^i, j = 1, 2, \dots, n$ est le $j^{\text{ème}}$ ensemble flou de la $i^{\text{ème}}$ règle.

Soit $\mu_j^i, (j = 1, 2, \dots, n)$ la fonction d'appartenance associée à l'ensemble flou F_j^i et

$$\omega^i(t) = \prod_{j=1}^n \mu_j^i(x_j(t)); i = 1, 2, \dots, r$$

Etant donnée une paire $(x(t), u(t))$, le modèle flou du système résultant apparaît comme une moyenne pondérée des modèles locaux et se présente sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r \omega^i(t) [A_i x(t) + B_i u(t)]}{\sum_{i=1}^r \omega^i(t)} \\ = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) [A_i x(t) + B_i u(t)] \\ = \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(t) A_i \right) x(t) + \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(t) B_i \right) u(t); i = 1, 2, \dots, r \quad (1)$$

$$\text{où } \alpha^i(t) = \frac{\omega^i(t)}{\sum_{i=1}^r \omega^i(t)}$$

$$\text{avec } \alpha_i(t) \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) = 1 \quad (2)$$

L'approche floue est une méthode efficace dans la modélisation des systèmes. Il a été démontré que les modèles flous peuvent être utilisés avec succès dans la conception de contrôleurs [14]. Cela exige en contre partie l'analyse de la stabilité des modèles flous. Pour ce faire, on propose de concevoir des contrôleurs linéaires stabilisant une classe de modèles flous de systèmes selon la synthèse de Lyapunov. Cette approche exige la stabilité d'au moins un modèle local.

3. ANALYSE DU MODELE FLOU DU SYSTEME

On représente le modèle (1) sous une forme pratique en vue de faciliter la conception du contrôleur. A partir de l'équation (2) on peut définir les poids $\alpha_i(t), j=1,2,\dots,n$ comme suit :

$$\alpha_j(t) = 1 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r \alpha_i(t) \quad (3)$$

Le modèle (1) peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \left(\alpha_j(t)A_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r \alpha_i(t)A_i \right) x(t) + \\ & \left(\alpha_j(t)B_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r \alpha_i(t)B_i \right) u(t) \end{aligned} \quad (4)$$

Soit $\alpha^j(t) = [\alpha_1(t) \dots \alpha_{j-1}(t) \alpha_{j+1}(t) \dots \alpha_r(t)]^T$;

$$\alpha^j(t) \in [0,1]^{r-1}.$$

$$\text{Soient } \begin{cases} \Delta A(\alpha_j(t)) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r \alpha_i(t)(A_i - A_j) \\ \Delta B(\alpha_j(t)) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r \alpha_i(t)(B_i - B_j) \end{cases}$$

Avec ces notations, le système (4) s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & (A_j + \Delta A(\alpha_j(t)))x(t) + (B_j + \Delta B(\alpha_j(t)))u(t) \\ = & A_j x(t) + B_j u(t) + F(\alpha^j, x, u) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{où } F(\alpha^j, x, u) = \Delta A(\alpha_j(t))x(t) + \Delta B(\alpha_j(t))u(t)$$

Ce modèle peut être considéré comme une représentation dynamique d'un système linéaire incertain, où $\alpha^j(t)$ est le vecteur des paramètres incertains, et F représente les incertitudes du système. Le système incertain (5) a une structure d'incertitude linéaire, car $\Delta A(\cdot)$ et $\Delta B(\cdot)$ sont des fonctions matricielles linéaires.

$$\begin{cases} \Delta A(\alpha_j(t)) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r \alpha_i(t)(A_i - A_j) \\ \Delta B(\alpha_j(t)) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r \alpha_i(t)(B_i - B_j) \end{cases}$$

Dans certains cas les éléments incertains $\Delta A(\cdot)$ et $\Delta B(\cdot)$ peuvent présenter des propriétés structurelles pouvant être exploitées lors de la conception du contrôleur. Par exemple ils peuvent satisfaire les conditions équivalentes.

$$\begin{cases} \Delta A(\alpha_j(t)) = B_j D(\alpha_j(t)) \\ \Delta B(\alpha_j(t)) = B_j E(\alpha_j(t)) \end{cases}$$

$$\text{pour } \alpha^j(t) \in [0,1]^{r-1} \quad (6)$$

En effet les incertitudes sont équivalentes à l'entrée car elles affectent la dynamique du système de la même façon que la commande u .

Dans ce cas l'équation (5) peut être réécrite :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & (A_j + B_j D(\alpha_j(t)))x(t) + (B_j + B_j E(\alpha_j(t)))u(t) \\ = & A_j x(t) + B_j (u(t) + D(\alpha_j(t))x(t) + E(\alpha_j(t))u(t)) \end{aligned} \quad (7)$$

Soit

$$h((\alpha_j(t), x, u) = D(\alpha_j(t))x(t) + E(\alpha_j(t))u(t) \quad (8)$$

$$\text{d'où } \dot{x}(t) = A_j x(t) + B_j (u(t) + h((\alpha_j(t), x, u)) \quad (9)$$

Si l'élément incertain F ne satisfait pas les conditions équivalentes, on peut l'écrire sous la forme :

$$F(\alpha_j(t)) = f(\alpha_j(t)) + B_j h(\alpha_j(t)) \quad (10)$$

f étant les incertitudes non équivalentes.

Dans ce cas, le modèle de Takagi-Sugeno, pour les systèmes flous, prend la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = A_j x(t) + B_j u(t) + f(\alpha_j(t)) + B_j h(\alpha_j(t)) \quad (11)$$

où $\dot{x}(t) = A_j x(t) + B_j u(t)$ représente le $j^{\text{ème}}$ modèle local du système qui est considéré comme le système nominal associé au modèle flou (7).

4. COMMANDE STABILISANTE

Dans cette partie, on propose la méthode de base de Lyapunov pour concevoir un contrôleur globalement stable qui va injecter une commande par retour d'état pour stabiliser le système flou de la forme (11). On suppose que :

$$\begin{cases} \|f\| = \|f(\alpha^j, x)\| \leq \alpha_f \|x\| \\ \|h\| = \|h(\alpha^j, x)\| \leq \beta_x \|x\| + \beta_u \|u\| \end{cases} \quad (12)$$

où α_f , β_x , β_u sont des constantes non négatives connues.

Notre but est de concevoir un contrôleur linéaire par retour d'état u qui sera capable d'assurer la stabilité asymptotique du système en boucle fermée, pour f et h arbitraires bornées.

Soit $P = P^T > 0$ la solution de l'équation matricielle de Lyapunov $A_j^T P + P A_j = -2Q$ pour un $Q = Q^T > 0$.

Et soient $\lambda_{\max}(P)$, la plus grande valeur propre de la matrice P et $\lambda_{\min}(Q)$, la plus petite valeur propre de la matrice Q .

On suppose que $\alpha_f < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}$ et $\beta_u < 1$.

Alors la sortie du contrôleur par retour d'état sera donnée par $u = -\gamma B_j^T P x$ [8]

$$\text{avec } \gamma > \frac{\beta_x^2}{4(\lambda_{\min}(Q) - \alpha_f \lambda_{\max}(P))(1 - \beta_u)}$$

Pour le cas particulier où les incertitudes non équivalentes n'apparaissent pas dans (11) ($f=0$ et $\alpha_f=0$), le système en boucle fermée sera asymptotiquement stable si

$$\gamma > \frac{\beta_x^2}{4\lambda_{\min}(Q)(1 - \beta_u)} = \tilde{\gamma}.$$

Toutes les étapes de cette étude sont résumées dans un algorithme permettant la génération d'une commande par retour d'état capable de stabiliser le système flou en boucle fermée.

REMARQUE

Dans le cas où le modèle local (A_j , B_j) n'est pas asymptotiquement stable, on le stabilise par une commande par retour d'état $u_1 = -k_1 x$ de façon à ce que la nouvelle matrice ($A_j - B_j k_1$) ait des valeurs propres dans les positions désirées (assurant la stabilité).

5. ALGORITHME

Etant donné le modèle flou (1) :

Etape 1 : Initialiser un indice $j = 1$.

Etape 2 : Représenter (1) sous la forme (4).

Etape 3 : Vérifier les conditions équivalentes (6).

Si elles sont vérifiées, calculer les 2 matrices (vecteurs) $D(d)$ et $E(e)$ et vérifier si $\beta_u < 1$.

Sinon, exprimer les éléments incertains par :

$$F(\alpha_j(t)) = f(\alpha_j(t)) + B_j h(\alpha_j(t)) \text{ et}$$

calculer β_u ; Vérifier si $\beta_u < 1$.

Si $\beta_u > 1$ mettre $j = j + 1$ et revenir à l'étape 2.

Etape 4 : Stabiliser A_j si cela est nécessaire.

Calculer $u_1 = -K_1 x$ pour que la matrice ($A_j - B_j K_1$) ait des valeurs propres désirées (stables).

Mettre à jour les incertitudes équivalentes impliquant le vecteur d'état ; c'est à dire remplacer D par $D - EK_1$.

Etape 5 : Résoudre l'équation de Lyapunov :

$$A_j^T P + P A_j = -2Q \text{ pour } Q = Q^T > 0.$$

Choisir $Q = I_n$ maximisant le rapport

$$\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\min}(P)}.$$

Vérifier si $\alpha_f < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\min}(P)}$. Si α_f ne

satisfait pas cette condition mettre $j = j + 1$ et revenir à l'étape 2.

Etape 6 : Calculer $u_2 = -\gamma B_j^T P x$.

Etape 7 : Calculer la commande par retour d'état globale $u = u_1 + u_2$.

6. APPLICATION

L'algorithme ainsi développé est utilisé pour stabiliser un robot à un degré de liberté de masse m et de longueur l , actionnée par un moteur à courant continu, comme indiqué sur la figure 1.

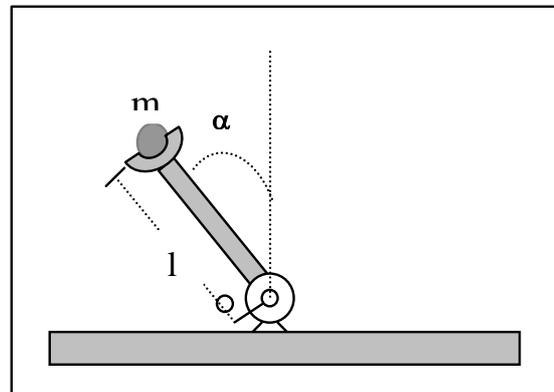


Figure 1 : Bras de robot à un degré de liberté.

Le choix de cette application est motivé par le fait que ces dernières années une intention particulière est donnée à la commande en poursuite des robots manipulateurs, qui devront faire face aux problèmes d'incertitudes dans leurs modèles dynamiques, en particulier les incertitudes structurelles [7].

6.1 Modélisation

Soit α l'angle de rotation de l'articulation par rapport à la verticale. Le système ainsi décrit est régi par l'équation différentielle du 3^{ème} ordre suivante :

$$\ddot{\alpha} = -\frac{R}{L}\ddot{\alpha} - \left(\frac{0.06N^2}{ml^2L} + \frac{g \cos \alpha}{l} \right) \dot{\alpha} - \frac{Rg \sin \alpha}{lL} + \frac{0.3N}{ml^2L}u$$

où $\ddot{\alpha}$, $\dot{\alpha}$ et α sont la dérivée d'ordre 3, la dérivée d'ordre 2 et la dérivée d'ordre 1, de l'angle α par rapport au temps, respectivement.

Avec $g = 9.81 \text{ m/s}^2$; $m = 2 \text{ kg}$; $R = 1.5 \Omega$
 $L = 0.05 \text{ H}$; $l = 0.5 \text{ m}$; $N = 100$

Pour la conception du contrôleur, on utilise un modèle linéaire du type Takagi-Sugeno. On considère les deux règles pratiques suivantes, décrivant la dynamique du système autour des deux points de fonctionnement 0 et $\pi/2$.

Règle1: IF $x_1(t)$ est environ 0 THEN

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t) + b_1 u(t)$$

et

Règle2: IF $x_1(t)$ est environ $\pi/2$ THEN

$$\dot{x}(t) = A_2 x(t) + b_2 u(t)$$

avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{Rg}{lL} & -\frac{g}{l} - \frac{0.06N^2}{ml^2L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}; b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{0.3N}{ml^2L} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{Rg}{lL} & -\frac{0.06N^2}{ml^2L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}; b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{0.3N}{ml^2L} \end{bmatrix}$$

On considère les fonctions d'appartenance $\mu_1(x_1)$ et $\mu_2(x_1)$ suivantes [9] :

$$\mu_1(x_1) = \frac{1 - \frac{1}{1 + e^{(-7(x_1 - \pi/4))}}}{1 + e^{(-7(x_1 - \pi/4))}}$$

$$\mu_2(x_1) = 1 - \mu_1(x_1)$$

6.2 Mise en œuvre de l'algorithme

Etape1 :

$$j = 1$$

De l'équation (1) on a

$$\dot{x} = (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)x + (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2)u$$

$$\text{où } \alpha_i = \mu_i; \quad i = 1, 2 \text{ puisque } \mu_1 + \mu_2 = 1$$

Etape2 :

On représente le modèle obtenu sous la forme (4)

$$\dot{x} = (A_1 + \alpha_2(A_2 - A_1))x + (b_1 + \alpha_2(b_2 - b_1))u$$

Etape3 :

Les éléments incertains du modèle vérifient les conditions équivalentes. Alors on calcule les deux vecteurs d et e .

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -588.60 & -24019.62 & -30 \end{bmatrix}; b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1200 \end{bmatrix}$$

et

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -37471 & -2400000 & -30 \end{bmatrix}; b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1200 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2(A_2 - A_1) = \alpha_2 b_1 d \Rightarrow d = [0.1782 \quad 0.0164 \quad 0] \Rightarrow$$

$$\alpha_2(b_2 - b_1) = \alpha_2 b_1 e \Rightarrow e = 0$$

$$\beta_x = \|d\| = 0.179 \text{ et } \beta_u = \|e\| = 0$$

Etape4 :

La matrice A_1 est asymptotiquement stable (ses valeurs propres sont $\lambda_1 = -0.0002$ et $\lambda_{2,3} = \pm 3.872i$).

Etape5 :

On résout l'équation de Lyapunov (avec $Q = I_2$)

$$A_1^T P + P A_1 = -2I_2 \Rightarrow$$

$$P = \begin{bmatrix} 40.80 & -1 & -0.059 \\ -1 & 0.059 & -1 \\ -0.059 & -1 & 801.84 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{\min}(Q) = 1 \text{ et } \lambda_{\max}(P) = 801.84$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} = 0.0012$$

et puisque $\alpha_f = 0$ alors $\alpha_f < 0.0012$

Etape6 :

$$\text{Calcul de } u_2 : \tilde{\gamma} = \frac{\beta_x^2}{4\lambda_{\min}(Q)(1 - \beta_u)} = 0.008$$

$$\text{soit } \gamma = 0.01 > \tilde{\gamma} \Rightarrow u_2 = -\gamma b_1^T P x$$

Etape7 :

La commande par retour d'état est alors

$$u = u_2 = -\gamma b_1^T P x = [0.0007 \quad 0.012 \quad -9.6222] x$$

6.3 Simulation

Pour les simulations, on a utilisé SIMULINK 3 sous MATLAB 5.3. Le robot manipulateur est représenté par son modèle non linéaire réel (module Robot dans la représentation par SIMULINK) .

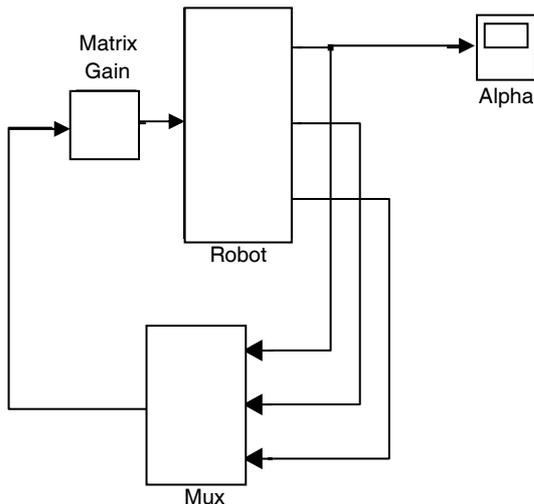


Figure 2: Schéma de contrôle du bras manipulateur.

L'évolution de l'angle α est représentée, pour différentes conditions initiales, sur la figure 3 où l'on constate la convergence du système vers sa position d'équilibre.

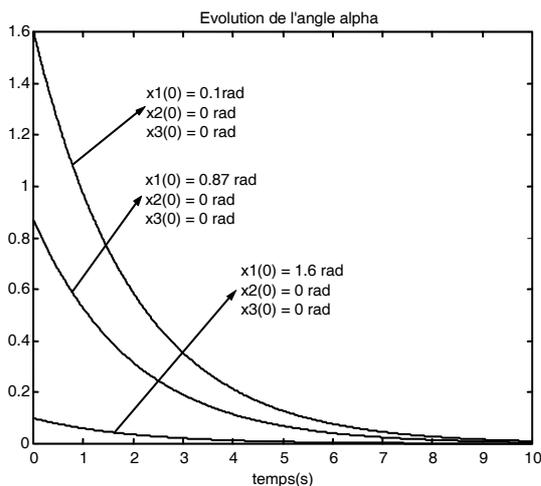


Figure 3 : Evolution de l'angle α pour trois conditions initiales différentes.

La représentation des variations de la commande u montre que plus la condition initiale est éloignée du point d'équilibre et plus la commande doit être

importante et de sens inverse pour minimiser l'erreur.

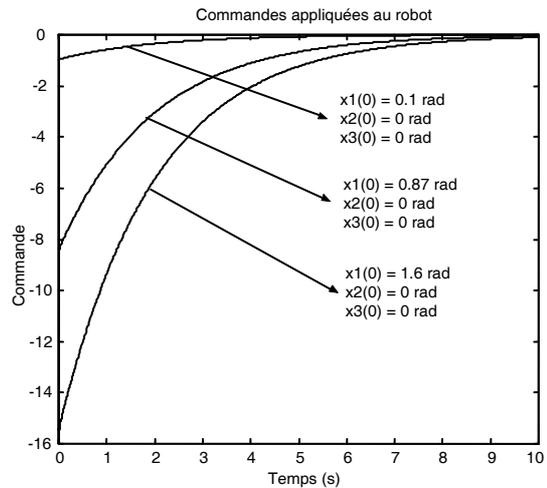


Figure 4 : Variations de la commande u pour les mêmes conditions initiales.

7. CONCLUSION

L'algorithme proposé permet la stabilisation d'une classe de systèmes non linéaires incertains. Le contrôleur conçu utilise les systèmes flous du type Takagi-Sugeno et exploite les modèles locaux de systèmes obtenus par linéarisation autour de quelques points de fonctionnement.

Le principe de cette approche est de concevoir une commande par retour d'état capable de stabiliser, au sens de Lyapunov, le système en boucle fermée. Un exemple de simulation est présenté pour illustrer l'approche proposée. Les résultats de simulation obtenus montrent que le contrôleur développé permet de stabiliser le bras-manipulateur.

REFERENCES

- [1] H. Bühler, «Réglage par logique floue», Presses universitaires polytechniques romandes, Suisse 1994.
- [2] R. Hartani, H.T. Nguyen et B. Bouchon-Meunier «Sur l'approximation universelle des systèmes flous», RAIRO-APII-JESA, vol. 30, n°5, pp. 645-663, 1996.
- [3] M. Jamshidi, A. Titli, A. Jadbabaie, «Guaranteed cost design of continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy Controllers via linear matrix inequalities», LAAS report n° 98512, May 1998.
- [4] C. Melin et B. Vidilov, «Stabilisation de systèmes par des contrôleurs flous : Partie I», RAIRO-APII-JESA, vol. 30, n°5, pp. 679-705, 1996.
- [5] F. Khaber, A. Hamzaoui & J.L. Sculfort «Contrôle flou et stabilité d'un portique avec masse suspendue», Proceedings CNR-IUT'2000.

- [6] F. Khaber et A. Hamzaoui, «Commande floue d'un système non linéaire», CIP'2001, 09-11 juin 2001.
- [7] B.B. Kook and W. Chul Ham, «Adaptive Control of Robot Manipulator Using Fuzzy Compensator», IEEE trans. on Fuzzy Systems, vol. 8, n° 2, April 2000, pp. 718-737.
- [8] J. E. Slotine & W. Li «Applied Nonlinear Control», Prentice Hall 1991.
- [9] Stanislaw .H. Zak, «Stabilizing Fuzzy System Models Using Linear Controllers», IEEE trans. on Fuzzy Systems, vol. 7, n° 2, April 1999, pp. 236-240
- [10] K. Tanaka and M. Sugeno «Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems», Fuzzy Sets Syst., vol. 45, pp. 135-156, 1992
- [11] M.C.M. Teixeira and S.H. Zak, «Stabilizing Controller Design for Uncertain Nonlinear Systems Using Fuzzy Models», IEEE trans. on Fuzzy Systems, vol. 7, n° 2, April 1999, pp. 133-142
- [12] C.S. Tseng, B.S. Chen, H.J. Uang, «Fuzzy tracking control for nonlinear dynamic systems via T-S fuzzy model», IEEE trans. on Fuzzy Systems, vol. 9, n° 3, June 2001, pp. 381-392.
- [13] L. X. Wang «Fuzzy Systems are universal Approximators», IEEE trans. on Fuzzy Systems, vol. 5, n° 8, May 1992, pp. 1164-1173
- [14] L. X. Wang, «Stable and Optimal Fuzzy Control of Linear Systems», IEEE trans. on Fuzzy Systems, vol. 6, n°1, February 1998, pp. 137-143.
- [15] J. Yoneyama, M. Nishikawa, H. Katayama and Ichikawa «Output Stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy Systems», Fuzzy sets and Systems 111 (2000), 253-266.