République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Khider Biskra

Département de Mathématiques
Domaine Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : PROBABILITES

Mémoire de fin d'étude en Master

Intitulé :

Gradient généralisé et l'approche de Filippo pour les équations différentielles ordinaires (edo)

Présenté par :
Zeraib Djamila

Devant le jury

Encadreur : M. Hafayed
Examinateur 1 :
Examinateur 2 :

Année Universitaire
2011-2012

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail

A la lumière de ma vie, ma chère mère

A celui qui m'a tracé le chemin, mon cher père

A mes frères Hamza, Abd araouf

A mes sœurs, Yasmina, Farida, Zakia, Souad

A mon grand-père et mon grand-mère et mon tante, et toute ma famille

JE tiens à offrir respectivement à mes amis

Ahmed

Akila, Badra , Kanza, Nadjet.

REMERCEIMENTS

Nous tenons à adresser nos sincères remerciements à notre encadreur :

Mr. Hfayed Moukhtar pour ses précieux conseils et ses encouragements, ainsi que pour sa disponibilité.

Nous remercions aussi tous ceux qui nous ont aidés de prés ou de loin pour la réalisation de ce travail.

Table des matières

Notations i

Résumé 1

1 Introduction 2
- 1.1 **Introduction** 2
- 1.2 **Sous-gradient** 3
- 1.3 **Sur-gradient** 4

2 Gradient généralisé et l'enveloppe de Filippov 7
- 2.1 **Généralités sur le gradient généralisé** 7
- 2.2 **Exemple** 8
- 2.3 **Propriétés de Gradient généralisé** 9
- 2.4 **Définition de l'enveloppe de Filippov** 11
- 2.5 **Propriété de l'enveloppe de Filippov** 12
- 2.6 **Lien entre le gradient généralisé et l'enveloppe de Filippov** 17

3 Le principe du maximum de Pontryagin 24

Bibliographie 26

Notations

g_x	:	le gradient de g en x.
$\partial_c f(x)$	:	le gradient généralisé de la fonction f en x.
$\mathbb{R}^d$	:	l'espace réel euclidien de dimension d.
$\mathbb{N}$	:	L'ensemble des entiers naturels
$co\,(A)$	:	est le plus petit ensemble convexe contenant A.
$\overline{co}\,(A)$	:	l'enveloppe convexe fermée
$\langle x, y\rangle$	:	Produit scalaire de x et y.
V^*	:	l'espace dual de V
$(x+\gamma B)$	:	la boule de centre x et de rayon γ.
EDO	:	Equation Différentielle Ordinaire

Résumé

Dans ce travail, notre objectif est d'étudier quelques propriétés du gradient généralisé de Clarke et l'enveloppe du Filippov. Cette étude est donnée dans le cadre de la théorie de non régularités. Cette étude permet de voir le lien entre le gradient généralisé et l'enveloppe de Filippov. En utilisant ces derniers approches pour établir des conditions nécessaires d'optimalité dans le cas où les coefficients ne sont pas différentiables mais Lipschitzien pour assuré l'existence et l'unicité de solution, ceci se fera a l'aide du Théorème de Radmacher.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Introduction

En mathématiques, les concepts de sous-dérivées, sous-gradient, et sous-différentielles interviennent en analyse, plus précisément dans l'étude des fonctions convexes, elles-mêmes liées à l'optimisation convexe.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle ouvert de la droite réelle. C'est le cas de la valeur absolue :

$$f(x) = |x|.$$

Cependant, la fonction f vérifie la propriété suivante : pour tout point x_0 dans le domaine de définition de la fonction, il est possible de tracer une droite passant par $(x_0, f(x_0))$ et ne coupant jamais le graphe de f (Il est possible de voir des point de tangence).l'ensemble des pentes de toutes les droites vérifiant la précédente propriété en un point x est appelé sous-gradient de f en x.

Définition 1.1.1 *(*Sous-Dérivée*)*

Le sous-dérivée d'une fonction convexe $f : I \to \mathbb{R}$ en point x_0 de l'intervalle ouvert I est un nombre réel c tel que :

$$f(x) - f(x_0) \geq c(x - x_0).$$

Pour tout $x \in I$. on peut montrer que l'ensemble des sous-dérivées en x_0 est un ensemble non-vide et un intervalle fermé de la forme $[a_1, a_2]$, où a_1 et a_2 sont donnés par :

$$a_1 = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ et } a_2 = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

que l'on sait exister et vérifier $a_1 \leq a_2$.

Définition 1.1.2 *(*SOUS-DIFFÉRENTIELLE*)*

L'ensemble $[a, b]$ de toutes les sous-dérivées est appelé la sous-différentielle de la fonction f en x_0.
Considérons la fonction $f(x) = |x|$ qui est convexe. Alors, la sous-différentielle à l'origine est l'intervalle $[-1, 1]$.
La sous-différentielle on n'importe quel point $x_0 > 0$ est le singleton $\{1\}$ et la sous-différentielle en n'importe quel point $x_0 < 0$ est singleton $\{-1\}$.
Propriétés :

1. Une fonction convexe $f : I \to \mathbb{R}$ est différentiable en x_0 si et seulement si la sous-différentielle ne contient qu'un seul point, qui alors la dérivée de f en x_0.
2. Un point x_0 est un minimum local de f si est seulement si zéro contenu dans la sous-différentielle,

Cette dernière propriété est une généralisation du fait que la dérivée d'une fonction dérivable en un minimum local est nulle.

1.2 Sous-gradient

Définition 1.2.1 *(sous-gradient)*

Les concepts de sous-dérivées et sous-différentielles peuvent être généralisés aux fonctions de plusieurs variables. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction à valeurs réelles et définie sur un ouvert dans un espace euclidien en $\mathbb{R}^n$ un vecteur v dans un cet espace est appelé sous-gradient au point x_0 dans U si pour tout x dans U on a :

$$f(x) - f(x_0) \geq v.(x - x_0).$$

Avec le point désignant le produit scalaire. L'ensemble de tout le sous-gradient en x_0 est appelé le sous-différentielle en x_0. La sous-différentielle est toujours un ensemble compact, non vide et convexe.

Ces concepts se généralisent un peu plus aux fonctions convexes $f : U \to \mathbb{R}$ sur un ensemble convexe dans un ensemble localement convexe, noté V . Une fonctionnelle v^* dans l'espace dual V^* est appelée sous-gradient en x_0 dans U si on a :

$$f(x) - f(x_0) \geq v^*.\,(x - x_0)\,.$$

L'ensemble de tout le sous-gradient en x_0 est appelé la sous-différentielle en x_0. La sous-différentielle est toujours un ensemble fermé et convexe, elle peut aussi être vide, par exemple, considérons un opérateur non borné, qui est convexe, mais n'a pas de sous-gradients. Si est continue, la sous-différentielle n'est pas vide.

1.3 Sur-gradient

Les concepts de sur-dérivées et sur-différentielles peuvent être généralisés aux fonctions de plusieurs variables. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction à valeurs réelles et définie sur un ouvert dans un espace euclidien en $\mathbb{R}^n$ un vecteur v dans un cet espace est appelé sur-gradient au point x_0 dans U si pour tout x dans U on a :

$$f(x) - f(x_0) \leq v.\,(x - x_0)\,.$$

Avec le point désignant le produit scalaire. L'ensemble de tout le sur-gradient en x_0 est appelé le sur-différentielle en x_0. La sur-différentielle est toujours un ensemble compact, non vide et convexe.
Ces concepts se généralisent un peu plus aux fonctions convexes $f : U \to \mathbb{R}$ sur un ensemble convexe dans un ensemble localement convexe, noté V . Une fonctionnelle v^* dans l'espace dual V^* est appelée sur-gradient en x_0 dans U si on a :

$$f(x) - f(x_0) \geq v^*.\,(x - x_0)\,.$$

L'ensemble de tout le sur-gradient en x_0 est appelé la sur-différentielle en x_0.

Définition 1.3.1 *(*Gateaux-différentiables*)*

Soit f une application de $B \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

L'application f est Gâteaux-différentiables si pour tous $u \in B$ tel que $f(u) \leq +\infty$, il existe une forme bilinéaire continue f' tel que : $\forall v \in B$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(u + tv)}{t} = \langle f'(u), v \rangle,$$

Définition 1.3.2 *(*FRÊCHET-DIFFÉRENTIABLE*)*

L'application f est Frêchet-différentiable si pour tout $u \in B$ tel que $f(u) < +\infty$,il existe une forme bilinéaire continue f' tel que :

$$f(u + v) = f(u) + \langle f'(u), v \rangle + \mathcal{O}(v) \|v\|,$$

Où $\mathcal{O}(v) \longrightarrow 0$ lorsque $v \longrightarrow 0$.

Lemme 1.3.3 *(*ENSEMBLE CONVEXE ET PROPRIÉTÉS*)*

Soit K un sous-ensemble d'un espace vectoriel F.

1. Un sous-ensemble $K \subset F$ est convexe si est seulement si toute combinaison convexe d'éléments $x_j \in K$ appartient à K
2. L'image directe et l'image réciproque d'un ensemble convexe par une application linéaire sont convexes.
3. L'intersection d'une famille quelconque de convexe est convexe.
4. Tout produit d'ensembles convexes est convexe.
5. Si K et L sont convexes, l'ensemble $K + L$ est convexe.
6. Soit $C \subset (F, \|.\|)$ un ensemble convexe. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

   a. L'ensemble C est fortement fermé.

   b. L'ensemble C est faiblement fermé.

Définition 1.3.4 (L'enveloppe convexe *($co(B)$)* et convexe fermé *($\overline{co}(B)$)*)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit A une partie quelconque de E. L'enveloppe convexe de A noté (coA) c'est l'ensemble de toute combinaison convexe d'éléments de A.

$$co\,(A) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k : n \in \mathbb{N} \right\},$$

où $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1, \lambda_k \geq 0$, et $x_k \in A$
Comme les ensembles convexes sont stable par intersection on peut dire : l'enveloppe convexe de A noté (coA) : est le plus petit ensemble convexe contenant A.

Remarque 1.3.5 *Une partie convexe fermée coïncide avec l'intersection de demi-espaces fermés qui le contient.*

Chapitre 2

Gradient généralisé et l'enveloppe de Filippov

2.1 Généralités sur le gradient généralisé

Il existe un calcul pour des fonctions non différentiable que englobes un grand partie du calcul sous-différentiel pour connaître fonctions convexes non différentiable. Cette évolution a commencé par F.H Clarke, 1973 qui à introduit un gradient généralisé pour les fonctions qui sont non différentiable, mais localement Lipschitzienne. On désigne par le gradient généralisé de Clarke d'une fonction f au point x est un sous ensembles.

Définition 2.1.1 *(*Gradient généralisé de Clarke *)*

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, et soit $x \in \mathbb{R}^n$. Alors la dérivé généralisé directionnelle de Clarke de f en x et définie par :

$$f^0\left(x_0; v\right) = \lim \sup_{x \longrightarrow x_0, h \longrightarrow 0,} \frac{f\left(x + hv\right) - f\left(x\right)}{h}.$$

et le gradient généralisé de la fonction f en x_0 est donné par :

$$\partial_c f\left(x_0\right) = \left\{\zeta \in \mathbb{R}^n : \langle \zeta, v \rangle \leq f^0\left(x_0; v\right) \;\; \forall v \in \mathbb{R}^n\right\} \tag{2.1}$$

En remarquent que la définition de gradient généralisé pour des fonctions Lipschitziennes peut prendre la forme suivante, tout aussi utile :

Définition 2.1.2 *(*Gradient généralisé de Clarke *)*

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne, continue. On définit $\partial_c f$, le gradient généralisé de Clarke de f, par

$$\partial_c f(x_0) = \overline{co}\left\{\lim_{x_i \longrightarrow x_0} \nabla f(x_i), x_i \notin N_f \cup N\right\}. \tag{2.2}$$

Où N_f est un ensemble de mesure nulle où ∇f n'existe pas. N : est un ensemble arbitraire de mesure nulle. Cette définition est donnée d'après le théorème de Radmacher, qui assure l'existence du gradient de f (∇f) presque partout.

Théorème 2.1.3 *(Théorème de Radmacher) toute fonction Lipshizienne est presque par tous différentiable.*

Preuve. Voir Clarke $[2, 3]$. ∎

2.2 Exemple

Dans l'exemple choisi, nous voulons déterminer le gradient généralisé pour la fonction de valeurs absolue $f : x \longmapsto |x|$ dans $x_0 = 0$.
On sait que la fonction $f : x \longmapsto |x|$ n'est pas différentiable en $x_0 = 0$.
Alors par un simple calcul, on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= -1, \\
\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= +1,
\end{aligned}$$

Donc, le gradient généralisé de cette fonction au point $x_0 = 0$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
\partial_c f(x_0) &= \overline{co}\left\{\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right\} \\
&= \overline{co}\{-1, +1\}. \\
&= [-1, +1].
\end{aligned}$$

2.3 Propriétés de Gradient généralisé

Dans ce partit on se donne quelque propriétés de gradient généralisé :

1. $\partial_c f(x)$ est un ensemble convexe compact dans $\mathbb{R}^n$.

2. $\partial_c(-f)(x) = -\partial(f)(x)$.

3. $0 \in \partial_c f(x)$ si f admet un minimum local ou maximum local en x.

4. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est continument différentiable au $x \in \mathbb{R}^n$. Alors
$$\partial_c f(x) = \{\nabla f(x)\}.$$
Alors le gradient généralisé de Clarke coïncide avec le gradient de la fonction f.

5. Si on note par $D(f_x) = \{z \in G : f_x(z) \text{ existe}\}$ alors,
$$\partial_c f(x) = \overline{co}\left\{\lim_{k\to+\infty} \partial f_x(x_k), x_k \in D(f_x), x_k \longrightarrow x, \lim_{k\to+\infty} \partial f_x(x_k) \text{ existe}\right\} \tag{2.3}$$

6. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ Lipschitziennes au voisinage de point $x \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha > 0$. Alors
$$\partial_c(\alpha f)(x) = \alpha \partial_c f(x).$$

7. $\partial_c(f+g)(x) \subset \partial_c f(x) + \partial_c g(x)$.

Preuve1.Voir Yong et Zhou [9] ; pp : 59–60 pour la démonstration de (1), (3), et (5).

Preuve2.

$$\begin{aligned}
\partial_c(-f)(x) &= \partial_c(-f)(x) \\
&= \overline{co}\left\{\lim_{x_i\longrightarrow x_0} \nabla(-f)(x_i), x_i \notin N_{-f} \cup N\right\} \\
&= -\overline{co}\left\{\lim_{x_i\longrightarrow x_0} \nabla f(x_i), x_i \notin N_{-f} \cup N\right\} \\
&= -\partial(f)(x).
\end{aligned}$$

Preuve4.
D'après le définition 2.2

$$\partial_c f(x_0) = \overline{co}\left\{\lim_{x_i \longrightarrow x_0} \nabla f(x_i), x_i \notin N_f \cup N\right\}.$$

et comme f est continue alors on a :

$$\begin{aligned}\partial_c f(x_0) &= \overline{co}\left\{\nabla f\left(\lim_{x_i \longrightarrow x_0} x_i\right), x_i \notin N_f \cup N\right\}.\\ &= \overline{co}\left\{\nabla f(x)\right\}.\\ &= \left\{\nabla f(x)\right\}\end{aligned}$$

alors le gradient généralisé de Clarke coïncide avec le gradient de la fonction f.

$$\partial_c f(x) = \left\{\nabla f(x)\right\}$$

Preuve6.
D'après la définition 2.2, on a :

$$\begin{aligned}\partial_c(\alpha f)(x) &= \overline{co}\left\{\lim_{x_i \longrightarrow x_0} \nabla \alpha f(x_i), x_i \notin N_{\alpha f} \cup N\right\}\\ &= \overline{co}\left\{\lim_{x_i \longrightarrow x_0} \alpha \nabla f(x_i), x_i \notin N_f \cup N\right\}\\ &= \overline{co}\left\{\alpha \lim_{x_i \longrightarrow x_0} \nabla f(x_i), x_i \notin N_f \cup N\right\}\\ &= \alpha\overline{co}\left\{\lim_{x_i \longrightarrow x_0} \nabla f(x_i), x_i \notin N_f \cup N\right\}\\ &= \alpha \partial_c f(x).\end{aligned}$$

Preuve 7.
D'après Lemme 1.3.3 on a

$$\overline{co}(A \cup B) \subset \overline{co}(A) \cup \overline{co}(B).$$

donc

$$\overline{co}(f+g) \subset \overline{co}(f) + \overline{co}(g).$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
\partial_c (f+g)(x) &= \overline{co}\left\{\lim_{x_i \longrightarrow x_0} \nabla (f+g)(x_i), x_i \notin N_{f+g} \cup N\right\} \\
&= \overline{co}\left\{\lim_{x_i \longrightarrow x_0} \nabla f(x_i) + \nabla g(x_i), x_i \notin N_{f+g} \cup N\right\} \\
&= \overline{co}\left\{\lim_{x_i \longrightarrow x_0} \nabla f(x_i) + \lim_{x_i \longrightarrow x_0} \nabla g(x_i), x_i \notin N_{f+g} \cup N\right\} \\
&\subset \overline{co}\left\{\lim_{x_i \longrightarrow x_0} \nabla f(x_i), x_i \notin N_f \cup N\right\} \\
&\quad +\overline{co}\left\{\lim_{x_i \longrightarrow x_0} \nabla g(x_i), x_i \notin N_g \cup N\right\} \\
&\subset \partial_c f(x) + \partial_c g(x)
\end{aligned}$$

2.4 Définition de l'enveloppe de Filippov

Définition 2.4.1 *(L'enveloppe de Filippov)*

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. On associe à la fonction f l'ensemble F_f qui appelé l'enveloppe de Filippov tel que :

$$F_f = \bigcap_{\lambda(N)=0} \bigcap_{\gamma>0} \overline{co} f\left((x+\gamma B) - N\right). \tag{2.4}$$

Où

$\overline{co}(A)$: l'enveloppe convexe fermée de A

$(x+\gamma B)$: la boule de centre x et de rayon γ

On considère l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) & t \geq 0 \\ x(0) = a. \end{cases} \tag{2.5}$$

Si la fonction f continument Lipschitzienne, alors ni l'existence ni unicité est validé dans le cas générale.

La solution absolument continue $t \in [0, +\infty) \to x_t$ est un solution de l'équation différentielle ordinaire (EDO) de sens de Fillippov si et seulement si est un solution de inclusion différentielle :

$$\begin{cases} x'(t) \in F_f(x) & t \geq 0 \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Maintenant on se donne quelque propriété de l'enveloppe de Filippov dans le cas où la fonction f est borné.

2.5 Propriété de l'enveloppe de Filippov

Dans cette partie on se donne quelques propriétés de l'enveloppe de Filippov qu'on besoin dans la suite

Soit f :$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction mesurable bornée alors on a :

Propriété 1. Il existe un ensemble négligeable N_f pour la mesure de Lebesgue tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$F_f = \bigcap_{\gamma>0} \overline{co} f\left((x+\gamma B) - N_f\right). \tag{2.7}$$

Où on désigne par $\overline{co}$: l'enveloppe convexe fermé.

Preuve1.

Considérons $x \in \mathbb{R}^n, N$ est l'ensemble de mesure nulle

$$\bigcap_{\gamma>0} \overline{co} f\left((x+\gamma B) - N_f\right) = \bigcap_{\gamma>0} \overline{co} f\left((x+\gamma B) - (N_f \cup N)\right).$$

La première inclusion est évidente.

La preuve de deuxième inclusion.

Prenant

$$z \in \bigcap_{\gamma>0} \overline{co} f\left((x+\gamma B) - N_f\right),$$

alors $\exists \gamma_n \to 0^+, x_n^i \in (x+\gamma B) - N_f, \lambda_n^i \geq 0$, pour $i = 1, 2, ..., N_n$, tel que $\sum_{i=1}^{N_n} \lambda_n^i = 1$:

$$\sum_{i=1}^{N_n} \lambda_n^i f\left(x_n^i\right) = z,$$

parce que $i = 1, 2, ..., N_n$, x_n^i sont des points de approximation continue de f, il existe $0 < r_n < \gamma_n$ tel que $\forall i = 1, 2, ..., N_n$,

$$\lambda \left\{ y \in \left(x_n^i + r_n B\right), \left|f(y) - f\left(x_n^i\right)\right| > \frac{1}{n} \right\} \leq \frac{1}{2} \lambda\left(r_n B\right).$$

et parce que N est un ensemble de mesure nulle, alors pour chaque $i = 1, 2, ..., N_n$, il existe

$$y_n^i \in \left(x_n^i + r_n B\right) - \left(N_f \cup N \cup \left\{y \in \left(x_n^i + r_n B\right), \left|f(y) - f\left(x_n^i\right)\right| > \frac{1}{n}\right\}\right).$$

ceci que

$$\left|f\left(y_n^i\right) - f\left(x_n^i\right)\right| \leq \frac{1}{n},$$

et on obtient

$$\left|\sum_{i=1}^{N_n} \lambda_n^i f\left(y_n^i\right) - z\right| \leq \frac{1}{n},$$

ce qui implique

$$\lim_n \sum_{i=1}^{N_n} \lambda_n^i f\left(y_n^i\right) = z.$$

alors $z \in \bigcap_{\gamma>0} \overline{co} f\left((x + \gamma B) - (N_f \cup N)\right)$ et on obtient :

$$\begin{aligned} & \bigcap_{\gamma>0} \overline{co} f\left((x + \gamma B) - N_f\right) \\ = & \bigcap_{\gamma>0} \overline{co} f\left((x + \gamma B) - (N_f \cup N)\right). \end{aligned}$$

donc

$$F_f = \bigcap_{\gamma>0} \overline{co} f\left((x + \gamma B) - N_f\right).$$

Propriété 2. Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $f(x) \in F_f(x)$.

Preuve2.

On fixé le point x où f est un approximation continue (ie : $x \notin N_f$) et on considère $r_n \to 0$. Alors il existe $\epsilon_n \to 0^+$ tel que

$$\lambda \left\{y \in (x + r_n B), |f(y) - f(x)| > \frac{1}{n}\right\} \leq \epsilon_n \lambda(r_n B),$$

donc

$$\begin{aligned} & f\left((x + r_n B) - \left(N_f \cup \left\{y \in (x + r_n B), |f(y) - f(x)| > \frac{1}{n}\right\}\right)\right) \\ \subset \ & f\left((x + r_n B) - N_f\right) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

et obtient

$$\begin{aligned} f(x) &\in \frac{1}{n}B + f(x + r_n B) - \left(N_f \cup \left\{ y \in (x + r_n B), |f(y) - f(x)| > \frac{1}{n} \right\}\right) \\ &\subset \overline{co} f((x + r_n B) - N_f) + \frac{1}{n}B. \end{aligned}$$

nous prennent l'intersection on n, et avec l'utilisation de propriété (1) on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}^n - N_f : f(x) \in F_f(x).$$

Propriété 3. Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble F_f est le plus petit ensemble convexe fermé tel que $f(x) \in F_f(x)$.

Preuve3.

Considérons $\mathcal{G}$ ensemble convexe fermé tel que

$$f(x) \in \mathcal{G}(x), \forall x \in \mathbb{R}^n - N_{\mathcal{G}}.$$

on fixé $y \in \mathbb{R}^n$, il existe $\gamma_n \to 0^+$ tel que

$$\mathcal{G}(y + \gamma_n B) \subset \mathcal{G}(y) + \frac{1}{n}B, \forall n \geq 1.$$

alors

$$f((y + \gamma_n B) - N_f \cup N_{\mathcal{G}}) \subset \mathcal{G}(y + \gamma_n B) \subset \mathcal{G}(y) + \frac{1}{n}B,$$

et puisque $\mathcal{G}(y)$ est convexe fermé de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\bigcap_{n \geq 1} \overline{co} f((y + \gamma_n B) - N_f \cup N_{\mathcal{G}}) \subset \mathcal{G}(y),$$

ce qui implique

$$F_f \subset \mathcal{G}(y).$$

alors l'ensemble F_f est le plus petit ensemble convexe fermé tel que $f(x) \in F_f(x)$.

Propriété 4. L'application $x \to F_f$ est uniforme si et seulement s'il existe une fonction g qui coïncides presque partout avec f. Tel que $F_f(x) = \{g(x)\}$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Preuve4.

D'après le propriété (3) on a :

$$f(x) \in F_f(x),$$

et

$$F_f(x) = \{g(x)\},$$

alors

$$f(x) = g(x), \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Propriété 5. On dit que $F_f = F_{\overline{f}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ si f coïncide avec $\overline{f}$ presque partout

Preuve5.

Supposons que $\overline{f}(x) = f(x)$ pour chaque $x \in \mathbb{R}^n - \overline{N}$ on a :

$$\begin{aligned} &\bigcap_{\gamma>0} \overline{co} f\left((x+\gamma B) - \left(\overline{N} \cup N\right)\right) \\ = &\bigcap_{\gamma>0} \overline{co}\overline{f}\left((x+\gamma B) - \left(\overline{N} \cup N\right)\right) \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} &\bigcap_{\lambda(N)=0} \bigcap_{\gamma>0} \overline{co} f\left((x+\gamma B) - \left(\overline{N} \cup N\right)\right) \\ = &\bigcap_{\lambda(N)=0} \bigcap_{\gamma>0} \overline{co}\overline{f}\left((x+\gamma B) - \left(\overline{N} \cup N\right)\right) \end{aligned}$$

on obtient

$$F_f(x) = F_{\overline{f}}(x).$$

Où on désigne par $\overline{N}$ l'ensemble négligeable

Propriété 6. Il existe une fonction $\overline{f} = f$ presque partout et tel que l'enveloppe de Filippov

$$F_f = \bigcap_{\gamma>0} \overline{co}\overline{f}(x+\gamma B).$$

Preuve6.

Soit la fonction $\overline{f}$ tel que $\overline{f}(x) = f(x)$ si $x \notin N_f$ et un élément de F_f si $x \in N_f$, alors $\overline{f}$ coïncide avec f dans $(\mathbb{R}^n - N_f)$.

On fixé $y \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\begin{aligned} F_f(y) &= \bigcap_{\gamma>0} \overline{co} f\left((y+\gamma B) - N_f\right) \\ &= \bigcap_{\gamma>0} \overline{co}\overline{f}\left((y+\gamma B) - N_f\right) \\ &\subset \bigcap_{\gamma>0} \overline{co}\overline{f}\left(y+\gamma B\right). \end{aligned}$$

Démonstrassions d'inverse :

Pour chaque $\gamma > 0$

$$\overline{f}\left(y+\gamma B\right) = \left\{\overline{f}\left(z\right), z \in y+\gamma B\right\},$$

on déduire que

$$\begin{aligned} \overline{f}(x) &\subset \bigcap_{\delta>0} \overline{co} f\left((y+\delta B) - N_f\right) \\ &\subset \bigcap_{\gamma>0} \overline{co} f\left((y+(\delta+\gamma)B) - N_f\right), \end{aligned}$$

on obtient

$$\bigcap_{\gamma>0} \overline{co}\overline{f}\left(y+\gamma B\right) \subset \bigcap_{\gamma>0,\delta>0} \overline{co} f\left((y+(\delta+\gamma)B) - N_f\right).$$

$$\bigcap_{\gamma>0} \overline{co}\overline{f}\left(y+\gamma B\right) \subset F_f(y),$$

alors

$$F_f(y) = \bigcap_{\gamma>0} \overline{co}\overline{f}\left(y+\gamma B\right).$$

Propriété 7. On obtient $F_f = \bigcap_{f=\overline{f}} \bigcap_{\gamma>0} \overline{co}\overline{f}\left(x+\gamma B\right)$, tel que on désigne par $\bigcap_{f=\overline{f}}$ l'intersection sur toutes les fonctions f telles que $f = \overline{f}$ presque partout.

Preuve7.

D'après le propriété (6) on a :

$$\bigcap_{f=\overline{f}} \bigcap_{\gamma>0} \overline{co}\overline{f}\left(x+\gamma B\right) \subset \bigcap_{\gamma>0} \overline{co}\overline{f}\left(y+\gamma B\right) = F_f(y).$$

L'inverse :

$$\begin{aligned}&\bigcap_{\lambda(N)=0}\bigcap_{\bar{f}=f}\bigcap_{\gamma>0}\overline{co}\bar{f}\left((x+\gamma B)-N\right)\\ \subset\ &\bigcap_{\bar{f}=f}\bigcap_{\gamma>0}\overline{co}\bar{f}\left(x+\gamma B\right)=F_f(x).\end{aligned}$$

Citons maintenant un simple exemple pour démontrer comment trouver l'enveloppe de Filippov d'une fonction. Et pour expliciter comment déterminer l'enveloppe de Filippov, on se donne l'exemple suivant.

L'enveloppe de Filippov dans le cas de dimension un ($n = 1$) tel que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est toujours donné par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : F_f = \left[\underline{m}_f\left(x\right),\ \overline{m}_f\left(x\right)\right].$$

Où

$$\underline{m}_f\left(x\right) := \sup_{\gamma\succ 0}(\underset{[x-\gamma,x+\gamma]}{ess\inf} f),\ \overline{m}_f\left(x\right) := \inf_{\gamma\succ 0}(\underset{[x-\gamma,x+\gamma]}{ess\inf} f).$$

Example.

Dans le cas où $f\left(x\right) = sgn\left(x\right) = \begin{cases} -1 & x < 0. \\ 0 & x = 0. \\ +1 & x > 0. \end{cases}$

Alors l'enveloppe de Filippov de la fonction f au point 0 est l'intervalle

$$F_f\left(x\right) = \left[-1, 1\right].$$

2.6 Lien entre le gradient généralisé et l'enveloppe de Filippov

Dans cette partie on se donne toute les propriétés de l'enveloppe de Filippov qu'on a besoin pour prouver une relation entre cette enveloppe et le gradient généralisé.

Et pour ce but on se donne le définition suivant.

Définition 2.6.1 *(le gradient généralisé)*

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne, continue. On définit $\partial_c f$, le gradient généralisé de Clarke de f, par :

$$\partial_c f(x) \triangleq \overline{co}\left\{ \lim_{x_i \longrightarrow x} \nabla f(x_i), x_i \notin N_f \cup N \right\}.$$

Où N_f est un ensemble de mesure nulle où ∇f n'existe pas et N est un ensemble arbitraire de mesure nulle.

Proposition 2.6.2

Soit

$$F : \{f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n\} \longrightarrow \left\{g : \mathbb{R}^m \to 2^{\mathbb{R}^n}\right\}.$$

Alors

1. Si $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une fonction localement bornée, alors $\exists N_f \subset \mathbb{R}^m$, $\lambda(N_f) = 0$ tel que $\forall N \subset \mathbb{R}^m$, $\lambda(N) = 0$. Tel que l'enveloppe de Filippov de cette fonction est de la forme :

$$F_f(x) = \overline{co}\left\{ \lim_{x_i \to x} f(x_i), x_i \notin N_f \cup N \right\} \tag{2.8}$$

   Notons que $\overline{co}(A)$ est l'ensemble convexe fermé.

2. On considère g, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sont deux fonctions localement bornées, alors

$$F_{(f+g)}(x) \subset F_f(x) + Fg(x)$$

3. Considérons $f_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n_j}$ où $j \in \{1, 2, ..., N\}$ sont localement bornées, alors

$$F_{\left(\prod_{j=1}^{j=N} f_j\right)}(x) \subset \prod_{j=1}^{j=N} F_{f_j}(x)$$

4. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ et $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^1, $\dim D(g(x)) = n$ sont localement bornées, alors

$$F_{f \circ g}(x) \subset F_f(g(x))$$

5. Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une fonction localement bornée, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{q \times n}$ une fonction de C^0, alors
$$F_{gf}(x) = g(x) F_f(x).$$
Où $gf(x) := g(x) f(x)$.
6. Soit $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est continue localement Lipshitzienne , alors

$$F_{\nabla V}(X) = \partial_c V(x)$$

Preuve.
La preuve de cette propriété demande l'utilisation des deux lemmes dits lemmes de Carateodory .Que nous présentons ci-dessous.
Pour démontrer les derniers propriétés on besoin d'utiliser les lemmes suivants :
Lemme 1. (Lemme de Caratheodory) Soit $\{E_n\}$ une suite de sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^m$ tel que $E_{n+1} \subset E_n$, alors

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} coE_n = co\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n. \tag{2.9}$$

Lemme 2. Soit f définie presque partout et mesurable sur l'ensemble E ; telle que $\lambda(E) = 0$, alors $\exists N_f$ de mesure nulle tel que

$$\bigcap_{\lambda(E)=0} \overline{co} f(E - N) = \overline{co} f(E - N_f). \tag{2.10}$$

Preuve. Voir Shevitz et Paden [8] pour la démonstration des ces lemmes précédent. ■

Preuve 1. D'après 2.4, on obtient

$$\begin{aligned} F_f(x) &= \bigcap_{\gamma\succ 0}\bigcap_{\lambda(N)=0} \overline{co} f((x+\gamma B) - N). \\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{\lambda(N)=0} \overline{co} f\left(\left(x + \frac{1}{n}B\right) - N\right). \end{aligned}$$

On voir 2.10, on obtient

$$F_f\left(x\right)=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{co}f\left(\left(x+\frac{1}{n}B\right)-N_{f,n}\right)$$

On considère $N_f=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}N_{f,n}$, alors l'enveloppe de Filippov

$$F_f=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{co}f\left(\left(x+\frac{1}{n}B\right)-N_f\right)$$

Et comme f est Lipshitzienne bornée, alors

$$\begin{aligned}F_f\left(x\right) &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{cof\left(\left(x+\frac{1}{n}B\right)-N_f\right)}\\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{co}\left\{\lim f\left(x_i\right),x_i\in\left(x+\frac{1}{n}B\right)-N_f\right\}\end{aligned}$$

L'utilisation de 2.9 permet d'obtenir

$$\begin{aligned}F_f\left(x\right) &= \overline{co}\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left\{\lim f\left(x_i\right),x_i\in\left(x+\frac{1}{n}B\right)-N_f\right\}\\ &= \overline{co}\left\{\lim_{x_i\to x}f\left(x_i\right),\text{ et }x_i\notin N_f\right\}\end{aligned}$$

Dans la fin, en remarquent que l'ensemble N_f est large par rapport à des ensembles de mesure nulle . Et d'après 2.9. On obtient le résultat.

Preuve 2. Soit F_{f+g} l'enveloppe de Filippov de la somme des deux fonctions f et g , alors d'après la première propriété on a

$$F_{f+g}\left(x\right)=\overline{co}\left\{\lim_{x_i\to x}\left(f+g\right)\left(x_i\right),x_i\notin N_{f+g}\cup N_f\cup N\right\}. \tag{2.11}$$

puisque f et g sont localement bornées, si la limite en 2.11 existe pour toute suite $x_i\to x$, alors il existe une sous-suite $x_i\to x$ telle que les deux limites $\lim_{x_i\to x}f\left(x_i\right)$ et $\lim_{x_i\to x}g\left(x_i\right)$ existes et

$$\lim_{x_i\to x}f\left(x_i\right)+\lim_{x_i\to x}g\left(x_i\right)=\lim_{x_i\to x}\left(f+g\right)\left(x_i\right),$$

donc

$$\begin{aligned}
F_{f+g}(x) &= \overline{co}\left\{\lim_{x_i\to x}(f+g)(x_i), x_i \notin N_{f+g}\cup N_f \cup N_g\right\} \\
&= \overline{co}\left\{\lim_{x_i\to x} f(x_i) + \lim_{x_i\to x} g(x_i), x_i \notin N_{(f+g)}\cup N_f \cup N_g\right\} \\
&\subset \overline{co}\left\{\lim_{x_i\to x} f(x_i), x_i \notin N_{f+g}\cup N_f \cup N_g\right\} \\
&\quad +\overline{co}\left\{\lim_{x_i\to x} g(x_i), x_i \notin N_{f+g}\cup N_f \cup N_g\right\} \\
&= F_f(x) + F_g(x)
\end{aligned}$$

Preuve 3. Considérons $b(x) = \prod_{j=1}^{j=N} f_j$ tel que $f_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n_j}$ où $j \in \{1, 2, ..., N\}$ sont localement bornées, alors d'après le première propriété on a

$$\begin{aligned}
F_b(x) &= \overline{co}\left\{\lim_{x_i\to x} b(x), x_i \notin N_b \cup N\right\} \\
&= \overline{co}\left\{\lim_{x_i\to x} b(x_i), x_i \notin N_b \cup \left(\bigcup_{j=1}^{N} N_f\right)\right\} \\
&= \overline{co}\left\{\lim_{x_i\to x} \prod_{j=1}^{j=N} f_j, x_i \notin N_b \cup \left(\bigcup_{j=1}^{N} N_f\right)\right\} \\
&\subset \overline{co}\prod_{j=1}^{j=N}\left\{\lim_{x_i\to x} f_j, x_i \notin N_b \cup \left(\bigcup_{j=1}^{N} N_f\right)\right\} \\
&= \prod_{j=1}^{j=N}\overline{co}\left\{\lim_{x_i\to x} f_j, x_i \notin N_b \cup \left(\bigcup_{j=1}^{N} N_f\right)\right\} \\
&= \prod_{j=1}^{j=N} F_{f_j}(x)
\end{aligned}$$

Preuve 4. Pour obtenir la preuve de cette propriété nous reproduisons le lemme ci-dessous.

Lemme 3. Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction C^1 et $x \in \mathbb{R}^{m+n}$ telles que $\dim D(f(x)) = n$, alors il existe deux ensembles négligeables U d'éléments de x et V d'éléments $f(x)$ tel que $W \subset \mathbb{R}^{m+n}$ et $N \subset \mathbb{R}^n$:

$$\lambda\{[f(U\cap W^c)]^c \cap V\} = 0, \lambda\left\{\left[f^{-1}(V\cup N^c)\right]^c \cap U\right\} = 0.$$

D'après ce lemme, il existe un ensemble négligeable U de x et négligeable V de $g(x)$ tels que :

$$\lambda\left\{\left[g\left(U\cap N^c_{f\circ g}\right)\right]^c \cap V\right\} = 0, \lambda\left\{\left[g^{-1}\left(V\cup N^c_f\right)\right]^c \cap U\right\} = 0.$$

et d'après la propriété (1), et le fait que $\Psi_g(x)$ dépend g de voisinage de x, on obtient :

$$F_{f\circ g}(x) = \overline{co}\mathcal{L}[f\circ g](x)$$

tel que

$$\mathcal{L}[f\circ g](x) = \left\{\lim_{x_i\to x}(f\circ g)(x_i), x_i \in U\cap N_{f\circ g}^c \cap g^{-1}\left(V\cup N_f^c\right)\right\}.$$

et

$$F_f(g(x)) = \mathcal{L}[f](g(x)), y_i \in V\cap g\left(U\cap N_{f\circ g}^c\right)\cap N_f^c$$

où

$$\mathcal{L}[f](g(x)) = \left\{\lim_{y_i\to g(x)} f(y_i),\right\}$$

Ceci entraîne que $\forall z \in \mathcal{L}[f\circ g](x)$, il existe $x_i \to x$ telle que $x_i \in U\cap N_{f\circ g}^c\cap g^{-1}\left(V\cup N_f^c\right)$ et $f(g(x_i)) \to z$.

Soit $y_i = g(x_i)$ alors $y_i \in V\cap g\left(U\cap N_{f\circ g}^c\right)\cap N_f^c$ et puisque g est continue alors $y_i \to g(x)$

Faisons $f(y_i)\to z$, on obtient

$$\mathcal{L}[f\circ g](x) \subset \mathcal{L}[f](g(x))$$

Pour l'inclusion inverse, soit $z\in\mathcal{L}[f](g(x))$, alors $\exists y_i \to g(x)$ tel que $y_i \in V\cap g\left(U\cap N_{f\circ g}^c\right)\cap N_f^c$ et $f(y_i)\to z$.

D'après la condition de rang sur $Dg(x)$, en deduit que g est lecallement surjective, alors il existe une sous-suite de $\{y_i\}$ tel que

$$y_i \in V\cap g\left[U\cap N_{f\circ g}^c\cap\left(x+2^{-i}B\right)\right]\cap N_f^c.$$

Faisons $x_i\to x$, alors :

$$x_i \in U\cap N_{f\circ g}^c\cap g^{-1}\left(V\cup N_f^c\right),$$

tel que $y_i = g(x_i)$ et $f(g(x_i)) \to z$, alors $z\in\mathcal{L}[f\circ g](x)$, et on déduire que :

$$\mathcal{L}[f\circ g](x) = \mathcal{L}[f](g(x)).$$

Pour les deux termes prenons la partie convexe fermée, alors on obtient

$$F_{f\circ g}(x) = F_f(g(x))$$

Preuve 5. D'après la propriété (1) on a :

$$\begin{aligned} F_{gf}(x) &= \overline{co}\left\{ \lim_{x_i \to x} gf(x_i), x_i \notin N_{gf} \cup N \right\} \\ &= \overline{co}\left\{ \lim_{x_i \to x} g(x_i) f(x_i), x_i \notin N_{gf} \cup N \right\} \end{aligned}$$

Et comme la fonction g est continue et f localement bornée et co associé avec une application linéaire, on déduit :

$$\begin{aligned} F_{gf}(x) &= \overline{co}\left\{ g(x) \lim_{x_i \to x} g(x_i) f(x_i), x_i \notin N_{gf} \cup N \right\} \\ &= g(x)\,\overline{co}\left\{ \lim_{x_i \to x} g(x_i) f(x_i), x_i \notin N_{gf} \cup N \right\} \\ &= g(x) F_f(x) \end{aligned}$$

Preuve 6. Maintenant, avec l'utilisation des propriétés fondamentales on se donne la lien entre l'enveloppe de Filippov et le gradient généralisé de Clarke. D'après la première propriété on a :

$$\begin{aligned} F_{\nabla V}(x) &= \overline{co}\left\{ \lim_{x_i \to x} \nabla V(x_i), x_i \notin N_{\nabla V} \cup N \right\} \\ &= \overline{co}\left\{ \lim_{x_i \to x} \nabla V(x_i), x_i \notin N_V \cup N \right\} \\ &= \partial_c V(x) \end{aligned}$$

Chapitre 3

Le principe du maximum de Pontryagin

Dans ce chapitre l'objectif est d'établir des conditions nécessaires d'optimalités (principe de maximum pontryagin) dans le cas déterministe.
Soit un système différentiel gouverné par l'équation différentielle ordinaire (**EDO**) suivante :

$$\begin{cases} dx(t) = f\left(t, x(t), u(t)\right) dt \qquad t \in [a, b] \\ \quad x_0 = \alpha \end{cases} \tag{3.1}$$

La fonction de coût est de la forme :

$$J\left(u(.)\right) = \int_0^T l\left(s, x_s, u_s\right) dt + g\left(x(t)\right) \tag{3.2}$$

l'objectif est d'obtenir les conditions nécessaire vérifiant par un contrôl optimal u^* qui minimiser la dernière fonction $J\left(u\right)$ sur un ensemble $\mathcal{U}$ de tous les contrôles admissibles. Alors le control optimal u^* vérifier

$$J\left(u^*(.)\right) = \min\left\{J\left(u\right), u \in \mathcal{U}\right\} \tag{3.3}$$

Sous l'hypothèse suivante :

H1. les deux fonctions f et l sont de $[0, T] \times \mathbb{R}^d \times A \to \mathbb{R}^d$ tel que :

$$\left|f\left(t, x, u\right) - f\left(t, y, u\right)\right| \leq K \left|x - y\right|$$

$$|f(t,x,u)| + |l(t,x,u)| \leq c(1+|x|)$$

Les deux fonction $f(t,x,.), l(t,x,.) : A \to \mathbb{R}^d$ sont continues en u, uniformément en $(t;x)$.

H2. Toute les fonction f, l et g sont de C^1en x.

Théorème 3.0.3 *(Principe du maximum de pontryagin)*

Soit (x^*, u^*) la solution optimale de 3.1 et 3.2, alors il existe un processus $p(t)$ tel que $\mathcal{F}_t - adapt\acute{e}$, solution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} dp(t) = -H_x(t, x(t), u(t), p(t))\, dt \\ x(0) = x, p(t) = -g_x(x(t)) \end{cases}$$

tel que

$$H(t, x^*(t), u^*(t), p(t)) = \max_{u \in \mathbf{A}} H(t, x^*(t), u(t), p(t)).$$

Preuve. Voir Hafayed [5]. ■

Bibliographie

[1] R. Buckdahn, Y. Ouknine, M. Quincampoix,(2008). *On limiting values of stochastic differential equations with small noise intensity tending to zero,* Bul Sci. Math. 133, pp. 229-237.

[2] F.H. Clarke (1976), *The maximum principle under minimal hypotheses.* Saim, Journal in cont. and Optim. Vol 14, N :6.

[3] F. H. Clarke (2001), *Nonsmooth Analysis in Control Theory* : a survey. Control and Cybernetics, Vol. 34 2005. No. 3

[4] F. H. Clarke (2008), *Nonsmooth Analysis in Systems and Control* Theory. Encyclopedia of Complexity and System Sience, Springer.

[5] M. Hafayed , (2009). *Gradient généralisé en contrôle stochastique,* Thèse de Doctorat, Univrsité de Biskra.

[6] M. Hafayed , (2010). *Fillipoov approach in stochastic maximum principle without differentiability assumptions,* Electronic journal of Differential Equation, Vol. 2010, No. 97, pp.1-13.

[7] A.F. Filippov (1988), *Differential equations with discontinuous right-hand sides. Mathematics and Its applications* : Soviet Series, 18. Dordrecht. etc. : Kluwer Aca-demic Publishers.

[8] D. Shevitz et B. Paden (1994). *Lyapunov Stability* Theory of Nonsmooth Systems, Vol.39, No.9.

[9] J. Yong, X.Y. Zhou, (1999) *Stochastic Controls. Hamiltonian Systems and HJB Equations* , Springer-Verlag. New York.

[10] B.E. Prad and S.S. Sastry (1987), *A calculus for Computing Filippov's Differential Inclusion with Application to the Variable Structure Control of Robot Manipulators. IEEE*, Vol cas-34, N°1.