République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Khider Biskra

Département de Mathématiques
Domaine Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Probabilités

Mémoire de fin d'étude en Master

Intitulé :

Introduction à la théorie du filtrage stochastique

Présenté par :
Manel MAAZ

Devant le jury

Encadreur : Pr Brahim MEZERDI
Examinateur 1 : Dr Boubakeur LABED

Année Universitaire
2011-2012

Remerciments

D'abord je voudrais remercier mon encadreur Pr. ***Brahim Mezerdi,*** *pour m'avoir aidé et pour m' avoir guidé dans ce chemin et dans ce travail.*

Je tiens aussi à remercier Monsieur ***Fatah Benatia*** *pour ses encouragements et son aide précieuse.*

Je tiens aussi à rendre un hommage particulier à notre chef de département de mathématiques, ***Dr Zouheir Mokhtari*** *ainsi qu'à tous mes enseignants au sein du département de mathématiques à l'université Mohamed Khider.*

Mes remerciements vont également à toute personne ayant oeuvré de prés ou de loin à accomplir et à améliorer ce travail

Je dédie ce travail à mes parents, à mes soeurs et à mon frére.

Résumé

Dans notre mémoire de master, nous nous somme intéressés au probléme du filtrage. Il s'agit d'une opération fondamentale en traitement du signal et en automatique. Le but du problème de filtrage linéaire est de calculer les moyennes conditionnelles $\widehat{X}_t = E\left[X_t/\mathcal{G}_t\right]$ où X_t désigne le signal et $\mathcal{G}_t$ désigne la filtration engendrée par les observations. Aprés une introduction à la théorie des processus aléatoires, on présente quelques propriétés du mouvement Brownien et des intégrales stochastiques. La suite est consacrée aux équations différentielles stochastiques pour lesquelles on donne une démonstration du théorème d'existence et d'unicité des solutions fortes. A la fin on présente quelques outils ayant trait à la théorie du filtrage stochastique. Plus précisément, on présente de façon détaillée le filtre de Kalman Bucy.

Abstract

In this work, we are interested in the filtering of stochastic processes. This is a fundamental operation in signal processing and control. The goal of the linear filtering problem is to compute the conditional expectation $\widehat{X}_t = E\left[X_t/\mathcal{G}_t\right]$ where X_t denotes the signal and $\mathcal{G}_t$ denotes the filtration generated by observations . After an introduction to the theory of random processes, we give some definitions of the Brownian motion and stochastic integrals. After that we present some properties of stochastic differential equations and we give a proof of the theorem of existence and uniqueness of strong solutions. At the end of this work we present some tools related to the theory of stochastic filtering. Specifically, we present in details the Kalman Bucy filter.

Table des matières

Introduction Générale

Les domaines d'application du filtrage de l'information sont assez variés, et d'une grande importance économique, et utilisés aussi dans de nombreux domaines des sciences et techniques : physique, biologie, écologie, météorologie,ingénierie.

Le problème du filtrage consiste à déterminer des estimateurs de variables du système lorsque l'environnement présente des perturbations aléatoires. Dans ce mémoire, on se restreindra à des filtres linéaires, c'est-à-dire dont l'information extraite est une combinaison linéaire des observations exploitées.

Dans ce cadre du filtrage linéaire optimal, le critère usuel est l'erreur quadratique moyenne. Par conséquent, le filtrage linéaire optimal a pour objectif de rechercher le "meilleur" filtre linéaire, c'est-à-dire celui qui fournit une approximation telle que l'erreur quadratique moyenne est minimale.

Ce mémoire s'articule autour de quatre chapitres qui nous permettront de présenter les différents aspects de notre travail.

Le premier chapitre est dédié au cadre des processus stochastiques.Il introduit les termes et concepts essentiels pour appréhender ce dernier.

Le deuxiéme chapitre vise à établir une étude sur le mouvement Brownien et les intégrales stochastiques.

Le troisième chapitre présente les équations différentielles stochastiques et plus précisément la solution forte d'une EDS.

Enfin, Le quatrième chapitre est consacré à l'etude du filtrage stochastique où on va étudier le filtre de Kalman Bucy, comme un cas particulier du filtrage linéaire.

Chapitre 1

Processus stochastiques, définitions

1.1 Rappels de probabilité

Un espace de probabilité est un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où :
- Ω est un ensemble,
- $\mathcal{F}$ est une tribu (ou σ-algèbre) sur Ω,
- P est une (mesure de) probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Définition 1.1.1 *Une **tribu** (ou σ-algèbre) sur Ω est une famille $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de Ω (appelés "événements") tels que :*

i) $\emptyset \in \mathcal{F}$,

ii) $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$,

iii) $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \Longrightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Définition 1.1.2 *Soit $A = \{A_i, i \in I\}$ une famille de sous-ensemble de Ω. Alors la tribu engendrée par A est la plus petite tribu sur Ω qui contient tous les sous-ensembles A_i, $i \in I$.*

Définition 1.1.3 *Soit $\Omega = [0,1]$. La tribu borélienne sur $[0,1]$ est la tribu engendrée par la famille des sous-ensembles de la forme $A = \{]a,b[: 0 \leq a \leq 1\} = \{$intervalles ouverts dans $[0,1]\}$. Elle est notée $B([0,1])$.*

Définition 1.1.4 *Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω. Une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est une application $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$ telle que :*

i) $P(\phi) = 0$ *et* $P(\Omega) = 1$,

ii) $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ *disjoints* $(i.e. A_n \cap A_m = \phi, \forall n \neq m) \Longrightarrow P\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

Définition 1.1.5 ***(Variable aléatoire)*** *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et X une application de Ω dans $\mathbb{R}$. On dit que X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ lorsque pour tout borelien B de $\mathbb{R}$, on a :*

$$X^{-1}(B) \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Définition 1.1.6 ***(fonction de répartion)*** *on appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, la fonction $F(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$F(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}).$$

Définition 1.1.7 *Si $F_X(x)$ est une fonction dérivable sa dérivé notée $f_X(x)$ s'appelle densité de probabilité de la variable X.*

$$\frac{\partial F_X(x)}{\partial x} = f_X(x)$$

Définition 1.1.8 ***(Moment d'ordre 1)*** *le moment d'ordre 1 appellé espérance mathématique ou moyenne est notée $E(X)$ elle est égale à :*

1. Cas discret :

$$E(X) = \sum_{x \in \mathcal{V}} x.P_X(x),$$

tel que

$$\mathcal{V} = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\},$$

au encore :

$$E(X) = \sum_{K=1}^{\infty} x_K P(X = x_K).$$

2.Cas continu :

Si X est une variable aléatoire réelle (absolument continue)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x).$$

Définition 1.1.9 *Soient X et Y deux v.a. de carré intégrable. On pose*

$$\begin{aligned} Var &= E\left((X - E(X))^2\right) \\ &= E\left(X^2\right) - E(X)^2 \geq 0, \\ Cov(X, Y) &= E((X - E(X))(Y - E(Y))) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y). \end{aligned}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

Soient X et Y deux v.a. de carré intégrable. Alors

i) XY est intégrable,

ii) $(E(|XY|))^2 \leq E(X^2)E(Y^2).$

Inégalité triangulaire :

Soient X et Y deux v.a. de intégrables. Alors

$$E(|X + Y|) \leq E(|X|) + E(|Y|).$$

Inégalité de Jensen :

Soient X une v.a et $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne et convexe telle que $E(|\varphi(X)|) < \infty$

alors

$$\varphi(E(X)) \leq E(\phi(X)).$$

Définition 1.1.10 *Deux évènements A et B $(\in \mathcal{F})$ sont indépendants si*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

1.1.1 Espérance conditionnelle

Conditionnement par rapport à un évènement : $B \in \mathcal{F}$

Soit $A \in \mathcal{F}$: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, si $P(B) \neq 0$.
Soit X une v.a. intégrable ($i.e. E(|X|) < \infty$) :

$$E(X/B) = \frac{E(X\ 1_B)}{P(B)},\ si\ P(B) \neq 0.$$

Conditionnement par rapport à une v.a.Y (à valeurs dans D dénombrable) :

Soit X une v.a. intégrable :

$$E(X/Y) = \psi(Y),$$

où

$$\psi(y) = E(X/Y = y),\ y \in D$$

Exemple 1.1.11 *Soient* $(X_1,\ X_2)$ *deux jets de dés indépendants :*

$$E(X_1 + X_2/X_2) = \psi(X_2)$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\psi(y) &= E(X_1 + X_2/X_2 = y) \\
&= \frac{E\left((X_1 + X_2)\, 1_{\{X_2 = y\}}\right)}{P(\{X_2 = y\})} \\
&= \frac{E\left((X_1 + y)\, 1_{\{X_2 = y\}}\right)}{P(\{X_2 = y\})} \\
&= \frac{E((X_1 + y)\, P(\{X_2 = y\}))}{P(\{X_2 = y\})} \\
&= E(X_1) + y,
\end{aligned}$$

donc

$$E(X_1 + X_2/X_2) = E(X_1) + X_2.$$

■

Conditionnement par rapport à une tribu $\mathcal{G}$

Soit X une v.a.(intégrable) définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

Définition 1.1.12 *Il existe une v.a. Z telle que $E(|Z|) < \infty$ et*

i) *Z est une v.a. $\mathcal{G}$-mesurable,*

ii) *$E(XU) = E(ZU)$, $\forall U$ v.a. $\mathcal{G}$-mesurable et bornée.*

Z est notée $E(X/\mathcal{G})$ et est applée l'espérance conditionnelle de X par rapport à $\mathcal{G}$.

Propriétés de l'espérance conditionnelle

Soient X, Y deux v.a. intégrables.

1. Linéarité :
$$E(cX + Y/\mathcal{G}) = cE(X/\mathcal{G}) + E(Y/\mathcal{G}) \ \ p.s.$$
2. Si $X \perp \mathcal{G}$ alors
$$E(X/\mathcal{G}) = E(X) \ \ p.s.$$
3. Si X est $\mathcal{G}$-mesurable, alors
$$E(X/\mathcal{G}) = X \ p.s.$$
4. Si Y est $\mathcal{G}$-mesurable et bornée, alors
$$E(YX/\mathcal{G}) = YE(X/\mathcal{G}) \ \ p.s.$$

1.1.2 Convergences de suites de variables aléatoires

Soient $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de v.a et X une autre v.a. toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Il y a plusieurs façons de définir la convergence de la suite (X_n) vers X, car $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et une fonction .

Convergence en probabilité

$X_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\xrightarrow{P}} X$ si $\forall\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}(P\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) = 0.$

Convergence presque sûre

$$X_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} X \text{ p.s. si } P\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n \longrightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1.$$

Convergence en moyenne (ou convergence dans L_1)

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} E\left(|X_n - X|^1\right) = 0.$$

Convergence quadratique (ou convergence dans L_2)

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} E\left(|X_n - X|^2\right) = 0.$$

1.2 Notion de processus stochastique

Définition 1.2.1 *Soit T un ensemble. On appelle* ***processus stochastique*** *sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ indexé par T et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, une famille $(X_t)_{t \in T}$ d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $\left(\mathbb{R}^d, \beta\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$; où pour tout $t \in T$, X_t est une variable aléatoire.*

Définition 1.2.2 *On appelle* ***filtration*** *$(\mathcal{F}_t)_{t>0}$ de $(\Omega, \mathcal{F})$, une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$ i.e. $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, \forall s \leq t$.*

Définition 1.2.3 *Un processus stochastique $(X_t)_{t \in T}$ est adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t>0}$ si $\forall t \geq 0$, $X_t \in \mathcal{F}_t$ i.e. X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable pour tout t.*

Définition 1.2.4 *Soient $(X_t)_{t \in T}$ et $(Y_t)_{t \in T}$ deux processus stochastiques définis sur même espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*

- X est une **modification** de Y si : pour tout $t \geq 0$, les variables X_t et Y_t sont égales

$$P.p.s\ \forall t \geq 0,\ P(X_t = Y_t) = 1.$$

- X et Y sont **indistinguables** si $P.p.s$, les trajectoires de X et Y sont les mêmes i.e.

$$P(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 1.$$

Remarque 1.2.5 *Les fonctions* $t \rightarrow X_t(\omega)$ *sont appelées les* ***trajectoires*** *du processus stochastique* X_t.

Définition 1.2.6 *On dit que* X *est un* ***processus continu*** *s'il est continu trajectoire par trajectoire, i.e.* $t \longrightarrow X_t(\omega)$ *est* C^0*pour presque tout* ω.

1.3 Martingales

Définition 1.3.1 *Un processus* M *est* $\mathcal{F}_t-$*martingale si :*

i) M est $\mathcal{F}_t-$adapté,

ii) pour tout $t \leq T$, $M_t \in \mathcal{L}^1(\Omega)$, i.e. $E[|M_t|] < \infty$,

iii) $E[M_t/\mathcal{F}_s] = M_s$ pour tout $s \leq t$.

Une sur-martingale et une sous-martingale sont des processus qui vérifient les deux premières propriétés et pour tout $s \leq t$ respectivement $E[M_t/\mathcal{F}_s] \leq M_s$ et $E[M_t/\mathcal{F}_s] \geq M_s$.

Proposition 1.3.2 *Toute martingale* M *vérifie :*

$$\forall t \leq T,\ E[M_t] = E[M_0],$$

Preuve. On a pour tout $t \leq T$,

$$\begin{aligned} E[M_t] &= E\left[E[M_t/\mathcal{F}_0]\right] \\ &= E[M_0]. \end{aligned}$$

■

Proposition 1.3.3 *Soit* M *une* $\mathcal{F}-$*martingale et* $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction convexe mesurable, alors si* $\phi(M)$ *est intégrable, c'est une sous-martingale.*

Preuve. $\phi(M)$ est intégrable et adapté et l'inégalité de Jensen conditionelle nous donne :

$$E[\phi(M_t)/\mathcal{F}_s] \geq \phi\left(E\left[M_t/\mathcal{F}_s\right]\right) = \phi(M_s)$$

■

Proposition 1.3.4 *Soit M une $\mathcal{F}-$martingale de carré intégrable (i.e. $E[M_t]^2 < \infty$ pour tout t), alors, pour $s \leq t$, on a :*

$$E[(M_t - M_s)^2 / \mathcal{F}_s] = E[M_t^2 - M_s^2 / \mathcal{F}_s]$$

Preuve.

$$\begin{aligned} E[(M_t - M_s)^2 / \mathcal{F}_s] &= E[M_t^2 / \mathcal{F}_s] - 2E[M_t M_s / \mathcal{F}_s] + E[M_s^2 / \mathcal{F}_s] \\ &= E[M_t^2 / \mathcal{F}_s] - 2M_s E[M_t / \mathcal{F}_s] + M_s^2 \\ &= E[M_t^2 - M_s^2 / \mathcal{F}_s] \end{aligned}$$

On retrouve donc que M^2 est une $\mathcal{F}$ sous martingale. ■

Définition 1.3.5 *Un **temps d'arrêt** par rapport à $(\mathcal{F}_n)$ est une v.a. T à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ telle que $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Définition 1.3.6 *Soit X un processus càdlàg adapté. On dit que c'est une **martingale locale** s'il existe une suite de temps d'arrêt T_n croissante vers l'infini telle que pour tout n le processus arrêté $X^{T_n} 1_{\{T_n > 0\}}$ soit une martingale.*

Théorèm 1.3.7 *Soit X une martingale locale continue. Il existe un unique processus croissant et continu, $\langle X, X \rangle$, nul en 0, tel que $X^2 - \langle X, X \rangle$ soit une martingale locale.*

Définition 1.3.8 (Semimartingales) *On appelle semimartingale (continue) un processus adapté X_t s'écrivant sous la forme :*

$$X_t = X_0 + M_t + V_t$$

où M est une martingale locale et V un processus à variation finie, nuls en 0, continus adaptés.

Chapitre 2

Mouvement Brownien et Integrales stochastiques

À travers ce chapitre, nous présentons le mouvement brownien ainsi que les intégrales stochastiques et le processus d'Itô.

2.1 Mouvement Brownien

Historiquement, il s'agit du mouvement irrégulier de particules de pollen en suspension dans l'eau, observées par Robert BROWN en 1828. Il en résulte une dispersion des microparticules dans l'eau, on dit aussi une "diffusion" du pollen dans l'eau. De fait, ce mouvement sert actuellement à beaucoup d'autres modélisations de phénoménes dynamiques :

- prix d'actions en bourse
- erreurs de mesures physiques

2.1.1 Processus Gaussien

Définition 2.1.1 *Un vecteur de v.a* $(X_1, ..., X_n)$ *est un* ***vecteur Gaussien*** *si et seulement si toute combinaison linéaire des* X_i *est Gaussienne*

$(i.e\ \langle a, X\rangle$ est une v.a. Gaussienne pour tout $a \in \mathbb{R}^n)$.

Proposition 2.1.2 *Si le vecteur (X_1, X_2) est Gaussien, les v.a. X_1et X_2 sont indépendantes si et seulement si cov $(X_1, X_2) = 0$.*

Proposition 2.1.3 *Tout vecteur de variables aléatoires Gaussienne indépendantes est un vecteur Gaussien.*

Définition 2.1.4 *Un processus $(X_t)_{t \in T}$ est appelé* ***processus Gaussien*** *si pour tout n et tout $t_1 \leq ... \leq t_n$ le vecteur $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ est Gaussien.*

Définition 2.1.5 *Un* ***Mouvement Brownien*** *(standard) est un processus B vérifiant :*

1. $B_0 = 0$ $P.p.s$,
2. B est continu, $i.e.t \longrightarrow B_t(\omega)$ est C^0 pour presque tout ω,
3. B est à accroissements indépendants : $B_t - B_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s^B = \sigma(B_s, s \leq t)$,

   Les accroissements sont stationnaires, Gaussiens et pour $s \leq t$:
   $B_t - B_s \rightarrow \mathcal{N}(0, t-s)$.

Proposition 2.1.6 *Si B est un Mouvement Brownien et $\mathcal{F}$sa filtration naturelle, les processus $(B_t), (B_t^2 - t), \left(e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2 t}{2}}\right)$ sont des $\mathcal{F}-$martingales.*

Proposition 2.1.7 *Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard, alors B_t est un processus gaussien i.e. pour tout n et tous $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 ... \leq t_n$, $(B_{t_1}, ..., B_{t_n})$ est un vecteur gaussien.*

Théorèm 2.1.8 *X est un mouvement brownien standard si et seulement si X est un processus gaussien continu centré de fonction de covariance*

$$cov(X_s - X_t) = s \wedge t = \min(s, t)$$

Proposition 2.1.9 *Soit B un mouvement browwnien on a :*

1. $\forall t$, $P.p.s$, B_t n'est pas différentiable en aucun point t,
2. B_t n'est pas à variation fini en aucun point t.

2.1.2 Variation totale et Variation quadratique

Définition 2.1.10 *On définit la variation infinitésimal d'ordre p d'un processus X sur* $[0, T]$ *associée à une subdivision* $\Pi_n = (t_1^n, ..., t_n^n)$ *de* $[0, T]$ *par :*

$$V_T^p(\Pi_n) = \sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right|^p$$

Si $V_T^p(\Pi_n)$ *a une limite dans un certain sens lorsque*
$\pi_n = \|\Pi_n\|_\infty = Max_{i \leq n} \left| t_{i+1}^n - t_i^n \right| \to 0$, *la limite ne dépand pas de la subdivision choisie et nous l'appellerons variation d'ordre p de X sur* $[0, T]$.

En particulier :

- Si $p = 1$, la limite s'appellera **variation totale** de X sur $[0, T]$,
- Si $p = 2$, la limite s'appellera **variation quadratique** de X sur $[0, T]$ notée $\langle X \rangle_T$.

Remarque 2.1.11 *Si la variation totale d'un processus existe presque sûrement alors elle vaut :*

$$V_T^1 = \sup_{\Pi \in \rho} \sum_{i=1}^{n} |X_{t_i} - X_{t_i - 1}| \;\; p.s.$$

ou ρ *est l'ensemble des subdivisions possibles de* $[0, T]$.

Proposition 2.1.12 *La variation quadratique sur* $[0, T]$ *du mouvement Brownien existe dans* $L^2(\Omega)$ *et vaut* T. *De plus, si la subdivision* Π_n *satisfait* $\sum_{n=1}^{\infty} \pi_\infty < \infty$, *on a la convergence au sens presque sûr. On a donc :*

$$\langle B \rangle_T = T.$$

2.2 Intégrale stochastique

Définition 2.2.1 ***(Intégrale de Wiener)*** *L'intégrale de Wiener est simplement une intégrale du type :*

$$\omega \longmapsto Y_t(\omega) = (\int\limits_0^t X_s dB_s)(\omega),$$

avec X fonction déterministe, i.e. ne dépendant pas de ω.

On veut généraliser l'integrale de Wiener et définir $\int_0^t \theta_s dB_s$ pour des processus stochastiques θ.

Cas de processus étagés

On dit qu'un processus θ est étagé (ou élémentaire) s'il existe une suite de réels t_j, $0 \leq t_0 \leq t_1 ... \leq t_n$ et une suite de variables aléatoires θ_j telles que θ_j soit $\mathcal{F}_{t_j}$-mesurable, appartienne à $L^2(\Omega)$ et que $\theta_t = \theta_j$ pour tout $t \in \left]t_j, t_{j+1}\right]$, soit :

$$\theta_s(\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j(\omega) 1_{]t_j, t_{j+1}]}(s).$$

On définit alors :

$$\int_0^\infty \theta_s dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j (B(t_{j+1}) - B(t_j)).$$

On a :

$$E(\int_0^\infty \theta_s dB_s) = 0$$

et

$$Var(\int_0^\infty \theta_s dB_s) = E\left[\int_0^\infty \theta_s^2 ds\right].$$

Cas général

On peut prolonger la définition de l'intégrale de Wiener à une classe plus grande de processus. On perd le caractère gaussien de l'intégrale, ce qui est déja le cas pour le processus étagé.

On définit les processus càglàd de carré intégrale (appartenant à $L^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ comme l'ensemble Γ des processus θ adaptés continus à gauche limités à droite, $(\mathcal{F}_t)$-adaptés tels que :

$$\| \theta \|^2 \stackrel{déf}{=} E\left[\int_0^\infty \theta_t^2 dt\right] < \infty$$

Les processus étagés appartiennent à Γ. On dit que θ_n converge vers θ dans $L^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ si $\| \theta - \theta_n \|^2 \to 0$ quand $n \to \infty$

Et on a :

$$E(\int_0^\infty \theta_s dB_s) = 0 \ et \ E(\int_0^\infty \theta_s dB_s)^2 = E(\int_0^\infty \theta_s^2 ds),$$

on note :

$$\int_0^t \theta_s dB_s \overset{déf}{=} \int_0^\infty \theta_s 1_{[0,t]}(s) dB_s.$$

Si θ est étagé $\int_0^\infty \theta_s dB_s = \sum_i \theta_i (B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i \wedge t})$.

Propriétés de l'intégrale stochastique

Sur l'ensemble des processus élèmentaires, l'intégrale stochastique satisfait les propriétés suivantes :

1. $\theta \mapsto \int_0^t \theta_s dB_s$ est linéaaire,
2. $t \mapsto \int_0^t \theta_s dB_s$ est continue p.s,
3. $(\int_0^t \theta_s dB_s)_{0 \leq t \leq T}$ est un processus $\mathcal{F}$-adapté,
4. $E\left[\int_0^t \theta_s dB_s\right] = 0$ et $Var(\int_0^t \theta_s dB_s) = E\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$,
5. propriétés d'Isométrie :

$$E\left[(\int_0^t \theta_s dB_s)^2\right] = E\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right].$$

Exemple 2.2.2 *Que vaut* $\int_0^T B_s ds$?

$B_s^n = \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i} 1_{]t_i, t_{i+1}]}(s)$;

$$\begin{aligned} 2\int_0^T B_s ds &= 2\sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\left(B_{t_{i+1}}^2 - B_{t_i}^2\right) - \sum_{i=0}^{n-1}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)^2 \\ &= B_T^2 + \sum_{i=0}^{n-1}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)^2. \end{aligned}$$

Le deuxiéme terme converge dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ vers la variation quadratique sur $[0,T]$ du Mouvement Brownien qui vaut T donc on obtient finalement :

$$B_T^2 = \int_0^T 2B_s dB_s + T$$

Alors

$$\int_0^T B_s ds = \frac{1}{2}\left(B_T^2 - T\right).$$

Théorèm 2.2.3 ***(Inégalité de Doob)*** *Soit $(M_n, n \in N)$ une martingale réelle de carré intégrable. On a :*

$$E\left[\max_{0\leq k\leq n} M_k^2\right] \leq 4E\left[M_n^2\right].$$

En particulier, $E\left[\sup_{n\in\mathbb{N}} M_n^2\right] \leq 4\sup_{n\in\mathbb{N}} E\left[M_n^2\right]$, ces termes pouvant être éventuellement infinis.

2.2.1 Processus d'Itô.

Nous allons maintenant introduire un calcul différentiel sur ces intégrales stochastiques.

On appelle ce calcul "calcul d'Itô" et l'outil essentiel en est la "formule d'Itô ".

Définition 2.2.4 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ un espace de probabilité muni d'une filtration et $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t-$mouvement brownien. On appelle processus d'Itô, un processus $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s, \ P-p.s \ \forall t \leq T$$

Avec :

X_0 est $\mathcal{F}_t-$mesurable.

$(K_s)_{0\leq t\leq T}$ et $(H_s)_{0\leq t\leq T}$ des processus adaptés à $\mathcal{F}_t$.

$$\int_0^t |K_s|\, ds < +\infty, P-p.s$$

$$\int_0^t |H_s|^2\, ds < +\infty, P-p.s$$

Proposition 2.2.5 *Soit* $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ *une martingale continue telle que :*

$$M_t = \int_0^t K_s ds,\ P-p.s,\ avec \int_0^T |K_s|\, ds < +\infty,$$

alors :

$$P-p.s, \forall t \leq T,\ M_t = 0.$$

ceci entraîne que :

- La décomposition d'un processus "d'Itô" est unique . Ce qui signifie que si :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s = X_0^{'} + \int_0^t K_s' ds + \int_0^t H_s' dB_s$$

alors $X_0 = X_0',\ Pp.s\ H_s = H_s',\ ds \times P - p.p\ K_s = K_s',\ ds \times P - p.p.$

Théorèm 2.2.6 *Soit* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *un processus d'Itô :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$$

et f *une fonctioin deux fois continûment différentiable, on a :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, d\langle X, X\rangle_s$$

où par définition :

$$\langle X, X\rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds,$$

et

$$\int_0^t f'(X_s)\, dX_s = \int_0^t f'(X_s)\, K_s ds + \int_0^t f'(X_s)\, H_s dB_s.$$

De même si $(t,x) \to f(t,x)$ *est une fonction deux fois différentiable en* x *et une fois différentiable en* t*, ces dérivées étant continues en* (t,x) *(on dit dans ce cas que* f *est de classe* $C^{1,2}$*),est on a :*

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t f_s'(s,X_s)\, ds + \int_0^t f_x'(s,X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s,X_s)\, d\langle X, X\rangle_s.$$

Proposition 2.2.7 (Formule d'intégration par parties) .

Soient X_t et Y_t deux processus d'Itô,

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$$

et

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t K_s^{'} ds + \int_0^t H_s^{\prime} dB_s.$$

Alors :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t$$

avec la convention

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t H_s H_s^{\prime} ds.$$

La formule d'Itô sous toute ses formes

1. Pour le Mouvement Brownien avec $f \in C^2(\mathbb{R})$:

$$f(W_t) = f(W_0) + \int_0^1 f^{'}(W_s) \, dW_s + \frac{1}{2} \int_0^1 f^{''}(W_s) \, ds$$

2. Pour un processus d'Itô avec $f \in C^2(\mathbb{R})$:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^1 f^{'}(X_s) \, dW_s + \frac{1}{2} \int_0^1 f^{''}(X_s) \, d\langle X \rangle_s$$

3. Pour un processus d'Itô avec $f \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ fonction du temps et de l'espace :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_s^{\prime}(s, X_s) \, ds + \int_0^t f_x^{\prime}(s, X_s) \, dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}^{\prime\prime}(s, X_s) \, d\langle X, X \rangle_s$$

4. Pour un processus d'Itô multidimensionnel avec $f \in C^{1,2}\left([0, T] \times \mathbb{R}^d\right)$:

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) \, dX_i(s) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) \, d\langle X_i, X_j \rangle_s$$

Chapitre 3

Equation différentielle stochastique

Ce chapitre introduit, la notion de solution forte d'une EDS.

Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme :

$$\begin{cases} dX_t = b\,(t, X_t)\,dt + \sigma\,(t, X_t)\,dB_t \\ X_0 = Z \end{cases} \tag{3.1}$$

où T est un réel strictement positif, $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times m}$ sont deux fonctions mesurables et où Z est une variable aléatoire quelconque.

b est appelée dérive de l'EDS, et σ coefficient de diffusion de l'EDS.

3.1 Existence et unicité

Définition 3.1.1 *Un processus X est solution de cette EDS (3.1) si c'est un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté vérifiant :*

a) *Pour tout $t \geq 0$, les intégrales $\int_0^t b\,(s, X_s)\,ds$ et $\int_0^t \sigma\,(s, X_s)\,dB_s$ sont bien définies :*

$$\int_0^t |b\,(s, X_s)|\,ds + \int_0^t |\sigma\,(s, X_s)|^2\,dB_s < \infty \ \forall t \in \mathbb{R}^+ \ P\text{-}p.s$$

b) $(X_t)\,, t \geq 0$ *vérifie(3.1) :*

$$X_t = Z + \int_0^t b\,(s, X_s)\,ds + \int_0^t \sigma\,(s, X_s)\,dB_s \forall t \in \mathbb{R}^+ P - p.s.$$

Le théoréme suivant donne des conditions suffisantes sur b et σ sous lesquelles on a un résultat d'existence et d'unicité de la solution.

Théorèm 3.1.2 *On suppose qu'il existe une constante K telle que pour tout $t \in [0, T]$, x, y dans $\mathbb{R}^n$ si on a :*

1. condition de Lipschitz en espace, uniforme en temps :

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|, \tag{3.2}$$

2. croissance linéaire :

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|), \tag{3.3}$$

3. $E|Z|^2 < \infty$.

Alors l'EDS (3.1) posséde une unique solution, de plus cette solution vérifie :

$$E\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2\right) < \infty.$$

Pour démontrer l'unicité, on utilise le lemme de Gronwall :

Lemme 3.1.3 (Lemme de Gronwall) *Soit $g : [0, T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour*

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s)ds, \;\; a \in \mathbb{R}, \;\; b \geq 0.$$

Alors, pour tout t, $g(t) \leq aexp(bt)$.

Preuve. On pose $G(t) = a + b \int_0^t g(s)ds$, alors $g(t) \leq G(t)$.
Si g est continue, G est une fonction dérivable et

$$\left(e^{-bt}G(t)\right)' = -be^{-bt}G(t) + e^{-bt}G'(t) = -be^{-bt}G(t) + be^{-bt}g(t) \leq 0$$

donc $e^{-bt}g(t) \leq e^{-bt}G(t) \leq G(0) = a$.

Si g est seulement mesurable bornée, G est continue et vérifie

$$G(t) = a + b\int_0^t g(s)ds \leq a + b\int_0^t G(s)ds$$

donc la même conclusion est vraie. ■

Preuve. de l'unicité

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P), (B_t)_{t\geq 0}$. Considérons les deux processus (X_t) et (Y_t) :

$$\begin{array}{l} X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s \\ Y_t = Z + \int_0^t b(s, Y_s) ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s) dB_s \end{array}$$

On va montrer que si $X_t = Y_t, P - p.s$

Ce qui revient à montrer que :

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}(X_t - Y_t)^2\right] = 0, \qquad 0 \leq t \leq T$$

alors

$$\begin{aligned} |X_t - Y_t|^2 &= \left|\int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s - \int_0^t b(s, Y_s)ds - \int_0^t \sigma(s, Y_s)dB_s\right|^2 \\ &= \left|\int_0^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s))\, ds + \int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))\, dB_s\right|^2 \\ &\leq 2\left[\left|\int_0^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s))\, ds\right|^2 + \left|\int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))\, dB_s\right|^2\right] \end{aligned}$$

comme $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ pour $0 \leq t \leq r \leq T$

$$\sup_{0\leq t\leq T}|X_t - Y_t|^2 \leq 2\sup_{0\leq t\leq T}\left[\left|\int_0^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s))\, ds\right|^2 + \left|\int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))\, dB_s\right|^2\right]$$

En utilisant l'inégalité de Doob,

$$\begin{aligned} E\left(\sup_{0\le t\le T}|X_t-Y_t|^2\right) &\le 2E\left[\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t (b(s,X_s)-b(s,Y_s))\,ds\right|^2\right] \\ &\quad +E\left[\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t (\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s))\,dB_s\right|^2\right] \\ &\le 2E\left[\left|\int_0^T (b(s,X_s)-b(s,Y_s))\,ds\right|^2\right] \\ &\quad +2\times 4E\left[\int_0^T |\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s)|^2\,ds\right] \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz,

$$\begin{aligned} E\left(\sup_{0\le t\le T}|X_t-Y_t|^2\right) &\le 2TE\left[\int_0^T |b(s,X_s)-b(s,Y_s)|^2\,ds\right]+8E\left[\int_0^T |\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s)|^2\,ds\right] \\ &\le (8\vee 2T)\,E\left[\int_0^T (|\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s)|^2+|b(s,X_s)-b(s,Y_s)|^2)ds\right] \end{aligned}$$

comme les fonctions b et σ sont Lipschitzienne en espace $(\Omega,\mathcal{F},P)$, on obtient , pour tout

$r\in[0,T]$,

$$\begin{aligned} E\left(\sup_{0\le t\le T}|X_t-Y_t|^2\right) &\le (8\vee 2T)\,K^2E\left[\int_0^T |X_s-Y_s|^2\,ds\right] \\ &\le C\,(T,K)\,E\left[\int_0^T |X_s-Y_s|^2\,ds\right] \\ &\le C\,(T,K)\int_0^T E\left(|X_s-Y_s|^2\right)ds \\ &\le C\,(T,K)\int_0^T E\left(\sup_{r\le s}|X_s-Y_s|^2\right)ds \end{aligned}$$

donc

$$E\left(\sup_{0\le t\le T}|X_t-Y_t|^2\right)\le C\,(T,K)\int_0^T E\left(\sup_{r\le s}|X_s-Y_s|^2\right)ds$$

le lemme de Gronwall une permet d'écrire

$$E\left(\sup_{0\le t\le T}|X_t-Y_t|^2\right)\le 0e^{C(T,K)T}=0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad E\left(\sup_{0\leq t\leq T}|X_t-Y_t|^2\right)=0\\
&\Rightarrow \quad \sup_{0\leq t\leq T}|X_t-Y_t|^2=0\\
&\Rightarrow \quad \text{unicite forte}
\end{aligned}$$

Existence de la solution

Pour démontrer l'existence d'une solution X de l'EDS (3.1) on utilise la méthode des approximations successives dite "méthode d'itération de Picard". On définit par récurrence une suite de processus $\left(X^{(n)}\right)$:

$$\begin{cases} X_t^0 = x_0 \\ X_t^{n+1} = x_0 + \int_0^t \sigma\left(s, X_s^n\right) dB_s + \int_0^t b\left(s, X_s^n\right) ds \end{cases}$$

On peut montrer que la suite de $\left(X^{(n)}\right)$ est une suite de Cauchy dans l'espace $\mathcal{X}_T$ définie par

$$\mathcal{X}_T = \left\{ (X_t, t\in[0,T]) \text{ processus continu et adapté à } (\mathcal{F}_t) \text{ tel que } E\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^2\right|\right) < +\infty \right\}$$

Noter que l'espace vectoriel $\mathcal{X}_T$ muni de la norme $\|X\|_{T,2}^2 = E\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^2\right|\right)$ est complet, alors la suite $\left(X^{(n)}\right)$ est convergente et la limite de la suite est solution de l'EDS (3.1). ■

Exemple 3.1.4 (pont brownien) *La solution de*

$$\begin{cases} dX = \frac{X}{1-t}dt + dW \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

est

$$(\forall\ 0\leq t<1) \quad X_t = (1-t)\int_0^1 \frac{1}{1-s}dW$$

et est appelée le pont brownien entre l'origine au temps 0 *et au temps* 1.

Exemple 3.1.5 (Processus d'Ornstein-Uhlenbeck) *Soit $a, x_0\in\mathbb{R}$, $\sigma>0$ fixés. On considère l'EDS :*

$$\begin{aligned}
&dX_t = -aX_t dt + \sigma dB_t,\\
&X(0) = x_0.
\end{aligned}$$

Les fonctions $f(x) = -ax$ et $g(x) \equiv \sigma$ sont Lipschitziennes, donc il existe un unique processus (X_t) solution de l'équation ci -dessus. Ce processus est appelé processus d'Ornstein-Uhlenbeck donné par :

$$X_t = e^{-at}.x_0 + \int_0^t e^{-a(t-s)} dB_s.$$

3.2 Equations linéaires

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $a,\ \sigma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continues et bornées. On appelle équation linéaire une EDS de la forme

$$dX_t = a(t) X_t dt + \sigma(t) dB_t \text{ et } X_0 = x_0.$$

Exemple 3.2.1 *Considérons l'EDS linéaire avec*

$$dX_t = a(t) X_t dt + \sigma(t) dB_t; \tag{3.4}$$

où a et σ sont des fonctions déterministes. Dans le cas particulier $\sigma \equiv 0$, la solution peut s'écrire simplement

$$X_t = e^{\alpha(t)} X_0,\ \ \alpha(t) = \int_0^t a(s) ds.$$

Ceci suggère d'appliquer la méthode de la variation de la constante, c'est-à-dire de chercher une solution de la forme

$$X_t = e^{\alpha(t)} Y_t.$$

La formule d'Itô appliquée à

$$Y_t = u(X_t, t) = e^{-\alpha(t)} X_t$$

nous donne

$$dY_t = -a(t) e^{-\alpha(t)} X_t dt + e^{-\alpha(t)} dX_t = e^{-\alpha(t)} \sigma(t) dB_t,$$

d'où en intégrant et en tenant compte du fait que $Y_0 = X_0$

$$Y_t = X_0 + \int_0^t e^{-\alpha(s)} \sigma(s) dB_s.$$

Ceci donne finalement la solution forte de l'´equation(3.4)

$$X_t = X_0 e^{\alpha(t)} + \int_0^t e^{t\alpha(t)-\alpha(s)} \sigma\left(s\right) dB_s.$$

Chapitre 4

Filtrage Stochastique

En théorie du filtrage on s'occupe esentiellement du problème suivant : Supposons que nous avons un certain processus de signal–un processus stochastique X_t que nous ne pouvons pas observer directement. On observe un processus d'observation Z_t qui est en corrélation avec X_t. Nous nous limiterons au cas particulier important du signal plus bruit blanc des observations de type :

$$dZ_t = h\left(X_t\right) dt + \sigma dW_t$$

où W_t un processus de Wiener. Étant donné que par le temps t on peut observer seulement $\{Z_s : s \leq t\}$, il devient nécessaire d'estimer X_t à partir des observations $Z_{s\leq t}$. Pour n'importe quelle fonction f a déjà vu que la meilleure estimation, dans le sens de moyenne carrée, de $f\left(X_t\right)$ étant donné $Z_{s\leq t}$, est donnée par l'espérance conditionnelle $\pi_t\left(f\right) = E\left(f\left(X_t\right)/\mathcal{G}_t^Z\right)$, ou $\mathcal{G}_t^Z = \sigma\left\{Z_s : s \leq t\right\}$.

Le but du problème de filtrage est de trouver une expression explicite pour $\pi_t\left(f\right)$ en termes de $Z_{s\leq t}$; en particulier, nous chercherons à exprimer $\pi_t\left(f\right)$ comme la solution d'une équation différentielle stochastique entraîné par Z_t Ceci est intéressant en lui-même : il conduit à des algorithmes qui nous permettent d'estimer de manière optimale un signal dans un bruit blanc qui est important dans de nombreuses applications.

Dans ce chapitre, nous définissons tout d'abord le filtrage linéaire. Ensuite une étude particulière va concerner le filtre de Kalman de bucy.

4.1 Notions de filtrage

Supposons que le processus $X_t \in \mathbb{R}^n$ au temps t d'un système est donné par une équation différentielle stochastique

$$\frac{dX_t}{dt} = b\left(t, X_t\right) + \sigma\left(t, X_t\right) W_t, \quad , t \geq 0, \tag{4.1}$$

où $b : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \sigma : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ vérifiant les conditions (3.2) (3.3) et W_t est le bruit blanc p-dimensionnel. Comme discuté plus haut, l'interprétation d'Itô de cette équation est

$$\text{(système) } dX_t = b\left(t, X_t\right) dt + \sigma\left(t, X_t\right) dU_t, \tag{4.2}$$

où U_t est un mouvement Brownien. Nous supposons aussi que la distribution de X_0 est connue et indépendante de U_t.

Dans la version continue du problème de filtrage, nous supposons que le processus des observations $H_t \in \mathbb{R}^m$ est de la forme :

$$H_t = c\left(t, X_t\right) dt + \gamma\left(t, X_t\right) .\widetilde{W_t} \tag{4.3}$$

où $c : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^m, \gamma : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m\times r}$ et $\widetilde{W_t}$ désigne le bruit blanc $r-$dimensionnel, indépendant de U_t et de X_0.

Pour obtenir une interprétation mathématique commode de (4.3), nous présentons

$$Z_t = \int_0^t H_s ds \tag{4.4}$$

et ainsi nous obtenons la représentation intégrale stochastique

$$\text{(observations) } dZ_t = c\left(t, X_t\right) + \gamma\left(t, X_t\right) dV_t, Z_0 = 0 \tag{4.5}$$

où V_t est un mouvement brownien r-dimensionnel, indépendant de U_t et de X_0.

Notez que si H_s est connu pour $0 \leq s \leq t$, alors Z_s est également connu pour $0 \leq s \leq t$ et réciproquement.

Donc aucune information n'est perdue ou gagnée en considérant que Z_t nos «observations» au lieu de H_t.Mais ceci nous permet d'obtenir un modèle mathématique bien défini.

Le problème de filtrage est le suivant :

Etant donné les observations de Z_s vérifiant (4.5) pour $0 \leq s \leq t$, quel est le meilleur estimateur $\widehat{X}$ de X_t du système (4.2) basé sur ces observations ?

Comme nous avons précisé plus tôt, il est nécessaire de trouver une formulation mathématique précise de ce problème : dire que l'évaluation $\widehat{X}_t$ est basée sur les observations $\{Z_s; s \leq t\}$ veut dire :

$\widehat{X}_t\,(.)$ et $\mathcal{G}_t$-mesurable,

où $\mathcal{G}_t$ est la σ-algèbre engendrée par $\{Z_s\,(.)\,; s \leq t\}$.

En disant que $\widehat{X}_t$ est la meilleur estimation, nous voulons dire que

$$\int_\Omega \left|X_t - \widehat{X}_t\right|^2 dP = E\left[\left|X_t - \widehat{X}_t\right|^2\right] = \inf\left\{E\left[|X_t - Y|^2\right]; Y \in \mathcal{K}\right\} \tag{4.6}$$

et dans le reste de ce chapitre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est l'espace de probabilité correspondant au mouvement Brownien $(p + r)$ -dimensionnel (U_t, V_t) commençant à 0, E désigne l'espérance par rapport à P et

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_t = \mathcal{K}\,(Z,t) = \left\{Y : \Omega \to \mathbb{R}^n; Y \in L^2\,(P) \text{ et } Y \text{ est } \mathcal{G}_t \text{ mesurable}\right\}; \tag{4.7}$$

où $L^2\,(P) = L^2\,(\Omega, P)$.

Après avoir trouvé la formulation mathématique de notre problème, nous commençons maintenant à étudier les propriétés de la solution $\widehat{X}_t$.

Nous allons d'abord établir le lien suivane utile entre l'espérance conditionnelle et la projection.

Lemme 4.1.1 *Soit $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ une sous σ-algèbre et $X \in L^2\,(P)$ $\mathcal{F}$-mesurable.*

Soit $\mathcal{N} = \{Y \in L^2\,(P)\,; Y$ est $\mathcal{H}$ -mesurable$\}$ et soit $\mathcal{P}_\mathcal{N}$ la projection orthogonale de l'espace de Hilbert $L^2\,(P)$ dans le sous-espace $\mathcal{N}$. Alors on a

$$\mathcal{P}_\mathcal{N}\,(X) = E\,[X/\mathcal{H}]\,.$$

Preuve. Rappelons que E est par définition la P-unique fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ de telle que :

i) $E\,[X/\mathcal{H}]$ est $\mathcal{H}$ -mesurable,

ii) $\int_A E[X/\mathcal{H}]\, dP = \int_A X dP$ pour tout $A \in \mathcal{H}$.

Maintenant $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(X)$ est $\mathcal{H}$ -mesurable et

$$\int_\Omega Y(X - \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(X))\, dP = 0 \text{ pour tout } Y \in \mathcal{N}.$$

En particulier,

$$\int_A (X - \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(X))\, dP = 0 \text{ pour tout } A \in \mathcal{H}.$$

i.e.

$$\int_A \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(X)\, dP = \int_A X dP \text{ pour tous } A \in \mathcal{H}.$$

Par conséquent, par unicité, $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(X) = E[X/\mathcal{H}]$.

De la théorie générale des espaces de Hilbert nous savons que le $\widehat{X}_t$ solution du problème (4.6) est donné par la projection $\mathcal{P}_{\mathcal{K}_t}(X_t)$. Par conséquence directe du lemme (4.1) on a le résultat utile suivant : ■

Théorèm 4.1.2

$$\widehat{X}_t = \mathcal{P}_{\mathcal{K}_t}(X_t) = E[X_t/\mathcal{G}_t].$$

Ceci sert de base à l'équation Générale de Fujisaki-Kallianpur-Kunita de la théorie du filtrage.

4.2 Le Problème du filtrage linéaire unidimensionnel

Dorénavant, nous nous concentrerons sur le cas linéaire, qui permet de donner une solution explicite en termes d'équation stochastique pour $\widehat{X}_t$ (le filtre de Kalman-Bucy) :

Dans le problème du filtrage linéaire, le système et les équations d'observation ont la forme :

$$dX_t = F(t) X_t dt + C(t) dU_t; \text{ (système linéaire)}$$

$$F(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}, C(t) \in \mathbb{R}^{n\times p} \tag{4.8}$$

$$dZ_t = G(t)\, X_t dt + D(t)\, dV_t;\ \text{(observations linéaires)}$$

$$G(t) \in \mathbb{R}^{m\times n}, D(t) \in \mathbb{R}^{m\times r} \tag{4.9}$$

Pour pouvoir se concentrer sur les idées principales dans la solution du problème de filtrage, nous considérerons d'abord seulement le cas à une dimension :

$$\text{(système linéaire) } dX_t = F(t)\, X_t dt + C(t)\, dU_t;\ F(t) \in \mathbb{R}, C(t) \in \mathbb{R} \tag{4.10}$$

$$\text{(observations linéaires) } dZ_t = G(t)\, X_t dt + D(t)\, dV_t;\ G(t) \in \mathbb{R},\ D(t) \in \mathbb{R} \tag{4.11}$$

Nous supposons que F, G, C, D sont bornées sur des intervalles bornés. Sur la base de notre interprétation (4.4) de Z_t nous supposons $Z_0 = 0$. Nous supposons aussi que X_0 est normalement distribué (et indépendant de $\{U_t\}, \{V_t\}$). Finalement on suppose que $D(t)$ est limité loin de 0 sur les intervalles bornés.

1. X_0 est une variable aléatoire gaussienne,
2. L'équation de $(X_t; Z_t)$ a une solution unique $\mathcal{G}_t$-adapté,
3. $D(t)$ est inversible pour tout t,
4. $F(t), C(t), G(t), D(t), D(t)^{-1}$ sont continues.

Le but du problème du filtrage linéaire est de calculer les moyennes conditionnelles

$$\widehat{X}_t = E[X_t/\mathcal{G}_t].$$

Dans toute la suite X_t, et Z_t sont des processus satisfaisant (4.10), (4.11). Dans ce qui suit nous définirons les différentes étapes du filtrage.

Étape 1. Soit $\mathcal{L} = \mathcal{L}\ (Z, t)$ la fermeture de $\mathcal{L}^2\ (P)$ de fonctions combinaisons linéaires des Z_j de la forme :

$$c_0 + c_1 Z_{s_1}(\omega) + ... + c_k Z_{s_k}(\omega)\,, \text{ avec } s_j \leq t, c_j \in \mathbb{R}.$$

On note

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}} \text{ la projection de } \mathcal{L}^2(P) \text{ sur } \mathcal{L}.$$

Puis, avec $\mathcal{K}$ définie dans (4.7),

$$\widehat{X}_t = \mathcal{P}_{\mathcal{K}}(X_t) = E[X_t/\mathcal{G}_t] = \mathcal{P}_{\mathcal{L}}(X_t)\,.$$

Ainsi, la meilleure estimation Z-mesurable de X_t correspond à la meilleure estimation Z-linéaire de X_t.

Étape 2. Remplacer Z_t par N_t le processus d'innovations :

$$N_t = Z_t - \int_0^t (GX)_s^\wedge\, ds,$$

où

$$(GX)_s^\wedge = \mathcal{P}_{\mathcal{L}(Z,s)}((G(s)\,X_s)) = G(s)\,\widehat{X}_s.$$

Donc

(i) N_t est a accroissements orthogonaux, c.-à-d.

$$E[(N_{t_1} - N_{s_1})(N_{t_2} - N_{s_2})] = 0,$$

pour des intervalles $[s_1, t_1]\,, [s_2, t_2]$

(ii) $\mathcal{L}\ (N,t) = \mathcal{L}\ (Z,t)$, donc $\widehat{X}_t = \mathcal{P}_{\mathcal{L}(N,t)}(X_t)\,.$

Étape 3. Si on pose :

$$dR_t = \frac{1}{D(t)} dN_t,$$

alors R_t est un mouvement Brownien 1-dimensionnel. De plus,

$\mathcal{L}\ (N,t) = \mathcal{L}\ (R,t)$ et

$\widehat{X}_t = \mathcal{P}_{\mathcal{L}(N,t)}(X_t) = \mathcal{P}_{\mathcal{L}(R,t)}(X_t) = E[X_t] + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} E[X_t R_s]\, dR_s.$

Étape 4. Trouver une expression de X_t solution de l'équation différentielle stochastique (linéaire)

$$dX_t = F(t) X_t dt + C(t) dU_t.$$

Étape 5. Remplacer le X_t de l'étape 4 par $E[X_t R_s]$ et utilisez l'étape 3 pour obtenir une équation différentielle stochastique pour $\widehat{X}_t$:

$$d\widehat{X}_t = \frac{\partial}{\partial s} E[X_t R_s]_{s=t} dR_t + \left(\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E[X_t R_s] dR_t \right) dt.$$

Avant que nous ne passions à établir les étapes 1-5, considérons un simple exemple de motivation.

Exemple 4.2.1 *supposer* $X, W_1, W_2, ...$*sont des variables aléatoires réelles indépendantes ,* $E[X] = E[W_j] = 0$ *pour tout* j, $E[X^2] = a^2$, $E\left[W_j^2\right] = m^2\ \forall j$.

Soit $Z_j = X + W_j$

Quel est la meilleure estimation linéaire $\widehat{X}_t$ *de* X *basé sur les* $\{Z_j; j_k\}$? *plus précisément, soit*

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(Z, k) = \{c_1 Z_1, ..., c_k Z_k; c_1, ..., c_k \in \mathbb{R}\}.$$

Alors nous voulons trouver

$$\widehat{X}_k = \mathcal{P}_k(X),$$

où P_k *désigne la projection dans* $\mathcal{L}(Z, k)$. *Nous utilisons le procédé de Gram-Schmidt pour obtenir des variables aléatoires* $A_1, A_2, ...$*telles que*

(i) $E[A_i A_j] = 0$ pour $i \neq j$,

(ii) $\mathcal{L}(A, k) = \mathcal{L}(Z, k)$ pour tout k.

Puis

$$\widehat{X}_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{E[X A_j]}{E\left[A_j^2\right]} A_j \text{ pour } k = 1, 2, ... \tag{4.12}$$

Nous obtenons une relation récursive entre le $\widehat{X}_k$ et le $\widehat{X}_{k-1}$ en posant

$$A_j = Z_j - \widehat{X}_{j-1},$$

Ainsi

$$A_j = Z_j - \mathcal{P}_{j-1}(Z_j) = Z_j - \mathcal{P}_{j-1}(X), \text{ puisque } \mathcal{P}_{j-1}(W_j) = 0.$$

$$E[XA_j] = E\left[X\left(Z_j - \widehat{X}_{j-1}\right)\right] = E\left[X\left(X - \widehat{X}_{j-1}\right)\right] = E\left[\left(X - \widehat{X}_{j-1}\right)^2\right]$$

et

$$E\left[A_j^2\right] = E\left[\left(X + W_j - \widehat{X}_{j-1}\right)^2\right] = E\left[\left(X - \widehat{X}_{j-1}\right)^2\right] + m^2,$$

donc

$$\widehat{X}_k = \widehat{X}_{k-1} + \frac{E\left[\left(X - \widehat{X}_{k-1}\right)^2\right]}{E\left[\left(X - \widehat{X}_{k-1}\right)^2\right] + m^2}\left(Z_k - \widehat{X}_{k-1}\right).$$

Si on pose :

$$\overline{Z}_k = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} Z_j,$$

alors :

$$\widehat{X}_k = \frac{a^2}{a^2 + \frac{1}{k}.m^2}\overline{Z}_k.$$

Ceci peut être vu comme suit :

Soit

$$\alpha_k = \frac{a^2}{a^2 + \frac{1}{k}.m^2},\ U_k = \alpha_k \overline{Z}_k.$$

Alors

(i) $U_k \in \mathcal{L}(Z,k)$,

(ii) $X - U_k \perp \mathcal{L}(Z,k)$, puisque

$$\begin{aligned} E[(X - U_k) Z_i] &= E[XZ_i] - \alpha_k E\left[\overline{Z}_k Z_i\right] \\ &= E[X(X - W_j)] - \alpha_k \frac{1}{k}\sum_j E[Z_j Z_i] \\ &= a^2 - \alpha_k \frac{1}{k}\sum_j E[(X + W_j)(X + W_i)] = a^2 - \alpha_k \frac{1}{k}\left[ka^2 + m^2\right] = 0). \end{aligned}$$

Le résultat peut être interprété comme suit :

Pour k assez grand , on a : $\widehat{X}_k \approx Z_k$, alors que pour k petit la relation entre a^2 et m^2 devient plus importante. Si $m^2 \gg a^2$, les observations sont dans une large mesure négligées (pour les k petits) et $\widehat{X}_k$ est égale à sa valeur moyenne, 0.

Cet exemple donne la motivation de notre démarche :

Nous remplaçons le processus Z_t par un processus à accroissements orthogonaux N_t (Étape 2) afin d'obtenir une représentation de $\widehat{X}_t$ analogue à (4.12). Une telle représentation est obtenue à l'étape 3, après avoir identifié la meilleure estimation linéaire avec la meilleure estimation mesurable (étape 1) et établi la connexion entre N_t et le mouvement Brownien.

Étape 1. Estimations Z-linéaire et Z-mesurables

Lemme 4.2.2 *Soit $X, Z_s; s \leq t$ des variables aléatoires dans $L^2(P)$ et supposons que*

$$(X, Z_{s_1}, Z_{s_2}, ..., Z_{s_n}) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

sont distribution normale pour tous les $s_1, s_2, ..., s_n \leq t, n \geq 1$. Alors

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}}(X) = E[X/\mathcal{G}] = \mathcal{P}_{\mathcal{K}}(X).$$

En d'autres termes, la meilleure estimation Z-linéaire de X est égale à la meilleure estimation $Z-$ mesurable.

Preuve. Soit $\breve{X} = \mathcal{P}_{\mathcal{L}}(X)$, $\widetilde{X} = X - \breve{X}$. Alors $\widetilde{X}$ est indépendant de $\mathcal{G}$: Rappelons qu'un vecteur aléatoire $(Y_1, Y_2, ..., Y_k) \in \mathbb{R}$. est normale si et seulement si $c_1Y_1 + c_2Y_2 + ... + c_kY_k$ est normale, pour tous les choix de $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$. Et toute limite dans L^2 de v.a. normales est encore normale. Par conséquent

$$\left(\widetilde{X}, Z_{s_1}, Z_{s_2}, ..., Z_{s_n}\right) \text{ est normale pour tous les } s_1, s_2, ..., s_n \leq t.$$

Puisque $E\left[\widetilde{X}\ Z_{s_j}\right] = 0$, $\widetilde{X}$ et Z_{s_j} ne sont pas corrélés, pour $1 \leq j \leq n$.Il s'en suit que :

$$\widetilde{X} \text{ et } (Z_{s_1}, Z_{s_2}, ..., Z_{s_n}) \text{ sont indépendant.}$$

Si $\widetilde{X}$ est indépendant de $\mathcal{G}$ on a

$$E\left[1_G\left(X - \breve{X}\right)\right] = E\left[1_G\ \widetilde{X}\right] = E[1_G].E\left[\widetilde{X}\right] = 0 \quad \text{pour tout } G \in \mathcal{G}$$

i.e.$\int_G XdP = \int_G \breve{X}dP$. puisque $\breve{X}$ est $\mathcal{G}$ mesurable, nous concluons que $\breve{X} = E[X/\mathcal{G}]$. ■

Étape 2. Le processus d'innovation

Avant que nous présentions le processus d'innovation N_t on établis d'abords une représentation utile des fonctions dans l'espace $\mathcal{L}(Z,T)$

$$\mathcal{L}(Z,T) = \text{la fermeture dans } L^2(P) \text{ de toutes les combinaisons linéaires}$$

$$c_0 + c_1 Z_{t_1} + ... + c_k Z_{t_k}; \quad 0 \leq t_i \leq T, c_j \in \mathbb{R}.$$

si $f \in L^2[0,T]$, alors :

$$\begin{aligned} E\left[\left(\int_0^T f(t)\,dZ_t\right)^2\right] &= E\left[\left(\int_0^T f(t)\,G(t)\,X_t dt\right)^2\right] + E\left[\left(\int_0^T f(t)\,D(t)\,X_t dV_t\right)^2\right] \\ &\quad +2E\left[\left(\int_0^T f(t)\,G(t)\,X_t dt\right)\left(\int_0^T f(t)\,D(t)\,X_t dV_t\right)\right]. \end{aligned}$$

puisque :

$$\begin{aligned} E\left[\left(\int_0^T f(t)\,G(t)\,X_t dt\right)^2\right] &\leq A_1.\int_0^T f(t)^2\,dt \text{ par l'inégalité de Cauchy-Schwartz,} \\ E\left[\left(\int_0^T f(t)\,D(t)\,X_t dV_t\right)^2\right] &= \int_0^T f(t)^2\,D^2(t)dt \text{ par l'isométrie Itô} \end{aligned}$$

et comme $\{X_t\}, \{V_t\}$ sont indépendants, nous concluons alors que :

$$A_0 \int_0^T f(t)^2\,dt \leq E\left[\left(\int_0^T f(t)\,dZ_t\right)^2\right] \leq A_2 \int_0^T f(t)^2\,dt, \tag{4.13}$$

pour des constantes, quelconques A_0, A_1, A_2 ne dépendant pas de f.

Lemme 4.2.3 $\mathcal{L}(Z,T) = \left\{c_0 + \int_0^T f(t)\,dZ_t;\ f \in L^2[0,T], c_0 \in \mathbb{R}\right\}$

Preuve. Notons le terme de droite par $\mathcal{N}(Z,T)$. Il est assez pour montrer :

a) $\mathcal{N}(Z,T) \subset \mathcal{L}(Z,T)$.

b) $\mathcal{N}(Z,T)$ contient toutes les combinaisons linéaires de la forme

$$c_0 + c_1 Z_1 + c_2 Z_2 + ... + c_k Z_k;\ 0 \leq t_i \leq T.$$

c) $\mathcal{N}(Z,T)$ est fermé dans $L^2(P)$.

a : Si f est continue alors

$$\int_0^T f(t)\,dZ_t = \lim_{n\to\infty}\sum_j f\left(j.2^{-n}\right).\left(Z_{(j+1)2^{-n}} - Z_{j.2^{-n}}\right)$$

b : Supposon $0 < t_1 < t_2 < ... < t_k \leq T$. Nous pouvons écrire :

$$\sum_{i=1}^{k} c_i Z_{t_i} = \sum_{i=0}^{k-1} c_j^{'} \triangle Z_j = \sum_{i=0}^{k-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} c_j^{'} dZ_t = \int_0^T \left(\sum_{i=0}^{k-1} c_j^{'} 1_{[t_j,t_{j+1}]}(t)\right) dZ_t,$$

Où $\triangle Z_j = Z_{j+1} - Z_j$.

c : Ceci suit de (4.13) et le fait que $L^2[0,T]$ est complet.

Maintenant nous définissons le **processus d'innovation** N_t comme suit :$N_t = Z_t - \int_0^t (GX)_s^{\wedge}\,ds$, où

$$(GX)_s^{\wedge} = \mathcal{P}_{\mathcal{L}(Z,s)}\left((G(s)X_s)\right) = G(s)\widehat{X}_s.$$

i.e.

$$dN_t = G(t)\left(X_t - \widehat{X}_t\right)dt + D(t)\,dV_t. \tag{4.14}$$

■

Lemme 4.2.4

(i) N_t a accroissements orthogonaux,

(ii) $E\left[N_t^2\right] = \int_0^T D^2(s)\,ds$,

(iii) $\mathcal{L}(N,T) = \mathcal{L}(Z,T)$ pour tous $t \geq 0$,

(iv) N_t est un processus gaussien.

Preuve.

(i) si $s < t$ et $Y \in \mathcal{L}(Z,s)$ nous avons

$$\begin{aligned} E\left[(N_t - N_s)Y\right] &= E\left[\left(\int_s^t G(r)\left(X_r - \widehat{X}_r\right)dr + \int_s^t D(r)\,dV_r\right)Y\right] \\ &= \int_s^t G(r)\,E\left[\left(X_r - \widehat{X}_r\right)Y\right]dr + E\left[\left(\int_s^t D dV\right)Y\right] = 0, \end{aligned}$$

de $X_r - \widehat{X}_r \perp \mathcal{L}(Z,r) \supset \mathcal{L}(Z,s)$ pour $r \geq s$ et V possède des accroissements indépendants.

(ii) Par la formule d'Itô's, avec $g(t,x) = x^2$, nous avons

$$d\left(N_t^2\right) = 2N_t dN_t + \frac{1}{2}2\left(dN_t\right)^2 = 2N_t dN_t + D^2 dt.$$

Ainsi

$$E\left[N_t^2\right] = E\left[\int_0^t 2N_t dN_s\right] + \int_0^t D^2(s)\, ds.$$

Maintenant

$$\int_0^t N_s dN_s = \lim_{\triangle t_j \to 0} \sum N_{t_j}\left[N_{t_{j+1}} - N_{t_j}\right],$$

donc comme N est a accroissements orthogonaux nous avons

$$E\left[\int_0^t N_s dN_s\right] = 0, \text{et (ii) en découle}$$

(iii) Il est clair que $\mathcal{L}(N,t) \subset \mathcal{L}(Z,t)$ $\forall t \geq 0$. Alors, choisissez $f \in L^2[0,t]$ et laissez-nous voient ce que des fonctions peuvent être obtenues sous la forme

$$\begin{aligned}
\int_0^t f(s)\, dN_s &= \int_0^t f(s)\, dZ_s - \int_0^t f(r)\, G(r)\, \widehat{X}_r dr \\
&= \int_0^t f(s)\, dZ_s - \int_0^t f(r)\left[\int_0^T g(r,s)\, dZ_s\right] dr - \int_0^t f(r)\, c(r)\, dr \\
&= \int_0^t \left[f(s) - \int_s^t f(r)\, g(r,s)\, dr\right] dZ_s - \int_0^t f(r)\, c(r)\, dr,
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le lemme(4.2.2) et le lemme(4.2.3) pour écrire, pour chaque r,

$$(GX)_r^{\wedge} = c(r) + \int_0^r g(r,s)\, dZ_s \text{ pour certaines } g(r,s) \in L^2[0,r],\ c(r) \in \mathbb{R}.$$

il existe pour tout $h \in L^2[0,t]$ an $f \in L^2[0,t]$ telle que

$$f(s) - \int_s^t f(r)\, g(r,s)\, dr = h(s).$$

Ainsi, en choisissant $h = \mathcal{X}_{[0,t_1]}(s)$, où $0 \leq t_1 \leq t$, nous obtenons

$$\int_0^t f(r)\, c(r)\, dr + \int_0^t f(s)\, dN_s = \int_0^t \mathcal{X}_{[0,t_1]}(s)\, dZ_s = Z_{t_1};$$

ce qui permet de conclure : $\mathcal{L}(N,t) \supset \mathcal{L}(Z,t)$

(iv) $\widehat{X}_t$ est une limite (dans $L^2(P)$) des combinaisons linéaires de la forme

$$M = c_0 + c_1 Z_{s_1} + ... + c_k Z_{t_k}, \text{ où } s_k \leq t.$$

Par conséquent

$$\left(\widehat{X}_{t_1}, ..., \widehat{X}_{t_m}\right)$$

est une limite des variables aléatoires m-dimensionnelles $\left(M^{(1)}, ..., M^{(m)}\right)$ où $M^{(j)}$ sont les combinaisons linéaires de distribution normale puisque $\{Z_t\}$ est gaussien, et donc de limite normale. Par conséquent $\left\{\widehat{X}_t\right\}$ est gaussien. Il suit alors :

$$N_t = Z_t - \int_0^t G(s)\, \widehat{X}_s ds$$

est gaussien.

■

Étape 3. Le processus d'innovation et le mouvement brownien

Soit $N_t = Z_t - \int_0^t G(s)\, \widehat{X}_s ds$ le processus d'innovation défini dans d'étape 2. Supposons que $D(t)$ est bornée loin de 0 sur des intervalles bornés. On définit le processus (R_t) par

$$dR_t = \frac{1}{D(t)} dN_t(\omega)\,;\ t \geq 0, R_0 = 0. \tag{4.15}$$

Lemme 4.2.5 *R_t est un mouvement brownien 1-dimensionnel.*

Preuve. On observe que

(i) R_t est a trajectoires continues,

(ii) R_t est a accroissements orthogonaux (depuis N_t a),

(iii) R_t est gaussiene puisque N_t l'est.

(iv) $E[R_t] = 0$ et $E[R_t R_s] = \min(s,t)$.

Pour prouver la dernière affirmation (iv), on a grâce à la formule d'Itô

$$d\left(R_t^2\right) = 2R_t dR_t + \left(dR_t^2\right) = 2R_t dR_t + dt,$$

puisque R_t est a accroissements orthogonaux, et :

$$E\left[R_t^2\right] = E\left[\int_0^t ds\right] = t.$$

Par conséquent, si $s < t$,

$$E\left[R_t R_s\right] = E\left[\left(R_t - R_s\right) R_s\right] + E\left[R_s^2\right] = s.$$

Des propriétés (i), (iii) et (iv) constituent l'une des caractéristiques de nombreux d'un mouvement brownien 1-dimensionnelle

de

$$\mathcal{L}\left(N, t\right) = \mathcal{L}\left(R, t\right)$$

nous concluons que

$$\widehat{X}_t = \mathcal{P}_{\mathcal{L}(R,t)}\left(X_t\right).$$

■

Il se trouve que la projection vers le bas pour l'espace $\mathcal{L}(R, t)$ peut être bien décrite :

(à comparer avec la formule (4.12) dans exemple (4.2.1))

Lemme 4.2.6

$$\widehat{X}_t = E\left[X_t\right] + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} E\left[X_t R_s\right] dR_s. \tag{4.16}$$

Preuve. Du lemme (4.2.3) nous savons que :

$$\widehat{X}_t = c_0\left(t\right) + \int_0^t g\left(s\right) dR_s \text{ pour certains } g \in L^2\left[0, t\right], c_0\left(t\right) \in \mathbb{R}.$$

En passant à les espérance, nous voyons que $c_0\left(t\right) = E\left[\widehat{X}_t\right] = E\left[X_t\right]$

et puisque on a :

$$\left(X_t - \widehat{X}_t\right) \perp \int_0^t f\left(s\right) dR_s \text{ pour tous } f \in L^2\left[0, t\right].$$

Donc

$$\begin{aligned} E\left[X_t \int_0^t f\left(s\right) dR_s\right] &= E\left[\widehat{X}_t \int_0^t f\left(s\right) dR_s\right] = E\left[\int_0^t g\left(s\right) dR_s \int_0^t f\left(s\right) dR_s\right] \\ &= E\left[\int_0^t g\left(s\right) f\left(s\right) ds\right] = \int_0^t g\left(s\right) f\left(s\right) ds, \text{ pour tous } f \in L^2\left[0, t\right], \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'isométrie d'Itô. En particulier, si nous choisissons $f = 1_{[0,r]}$ pour un $t < r$, nous obtenons

$$E[X_t R_r] = \int_0^r g(s)\, ds$$

où

$$g(r) = \frac{\partial}{\partial r} E[X_t R_r]$$

Ce qui termine l'étape 3. ■

Étape 4.Une formule explicite pour X_t

Ceci est facilement obtenu en utilisant la formule d'Itô, d'après l'exmple (3.2.1) le résultat est :

$$\begin{aligned} X_t &= \exp\left(\int_0^t F(s)\, ds\right)\left[X_0 + \int_0^t \exp\left(-\int_0^s F(u)\, du\right) C(s)\, dU_s\right] \\ &= \exp\left(\int_0^t F(s)\, ds\right) X_0 + \int_0^t \exp\left(\int_s^t F(u)\, du\right) C(s)\, dU_s. \end{aligned}$$

En particulier, nous notons que $E[X_t] = E[X_0] \exp \int_0^t F(s)\, ds$.

Plus généralement, $0 \leq r \leq t$,

$$X_t = \exp\left(\int_r^t F(s)\, ds\right) X_r + \int_r^t \exp\left(\int_s^t F(u)\, du\right) C(s)\, dU_s. \tag{4.17}$$

Étape 5. L'équation différentielle stochastique pour $\widehat{X}_t$

Nous combinons maintenant les étapes précédentes pour obtenir la solution au problème de filtrage, c.-à-d. une équation stochastique pour le $\widehat{X}_t$. Commencons par la formule du lemme (4.16)

$$\widehat{X}_t = E[X_t] + \int_0^t f(s,t)\, dR_s,$$

où

$$f(s,t) = \frac{\partial}{\partial s} E[X_t R_s], \tag{4.18}$$

on utilise

$$R_s = \int_0^s \frac{G(r)}{D(r)} \left(X_t - \widehat{X}_t\right) dr + V_s \text{ à partir de (4.14) et (4.15)}$$

donc

$$E\left[X_tR_s\right]=\int_0^s \frac{G\left(r\right)}{D\left(r\right)}E\left[X_t\widetilde{X}_r\right]dr,$$

où

$$\widetilde{X}_r = X_t - \widehat{X}_t. \tag{4.19}$$

En utilisant la formule (4.17) pour X_t, nous obtenons

$$E\left[X_t\widetilde{X}_r\right]=\exp\left(\int_r^t F\left(v\right)dv\right)E\left[X_r\widetilde{X}_r\right]=\exp\left(\int_r^t F\left(v\right)dv\right)S\left(r\right),$$

où

$$S\left(r\right)=E\left[\left(\widetilde{X}_r\right)^2\right], \tag{4.20}$$

i.e.**l'erreur quadratique moyenne de l'estimation au moment** $r\geq 0$, ainsi

$$E\left[X_tR_s\right]=\int_0^s \frac{G\left(r\right)}{D\left(r\right)}\exp\left(\int_r^t F\left(v\right)dv\right)S\left(r\right)dr$$

de sorte que

$$f\left(s,t\right)=\frac{G\left(s\right)}{D\left(s\right)}\exp\left(\int_s^t F\left(v\right)dv\right)S\left(s\right) \tag{4.21}$$

Nous affirmons que $S(t)$ satisfait l'équation différentielle (déterministe)

$$\frac{dS}{dt}=2F\left(t\right)S\left(t\right)-\frac{G^2\left(t\right)}{D^2\left(t\right)}S^2\left(t\right)+C^2\left(t\right) \qquad \text{(L'équation de Riccati).} \tag{4.22}$$

Pour prouver (4.22) le théorème de Pythagore, (4.16) et l'isométrie d'Itô permetent d'écrire :

$$\begin{aligned} S(t) &= E\left[\left(X_t-\widehat{X}_t\right)^2\right]=E\left[X_t^2\right]-2E\left[X_t\widehat{X}_t\right]+E\left[\widehat{X}_t^2\right] \\ &= T\left(t\right)-\int_0^t f\left(s,t\right)^2ds-E\left[X_t\right]^2, \end{aligned}$$

où

$$T\left(t\right)=E\left[X_t^2\right]. \tag{4.23}$$

Or, par (4.17) et l'isométrie d'Itô nous avons :

$$T(t) = \exp\left(2\int_0^t F(s)\,ds\right) E\left[X_0^2\right] + \int_0^t \exp\left(2\int_s^t F(u)\,du\right) C^2(s)\,ds,$$

puisque que X_0 est indépendante de $\{U_s\}_{s\geq 0}$. On a

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= 2F(t).\exp\left(2\int_0^t F(s)\,ds\right) E\left[X_0^2\right] + C^2(t)\\ &\quad + \int_0^t 2F(s)\exp\left(2\int_s^t F(u)\,du\right) C^2(s)\,ds\end{aligned}$$

i.e.

$$\frac{dT}{dt} = 2F(t)\,T(t) + C^2(t)\,. \tag{4.24}$$

En substituant dans (4.23), on obtient (en utilisant l'étape 4),

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{dT}{dt} - f(t,t)^2 - \int_0^t 2f(s,t)\,.\frac{\partial}{\partial t}f(s,t)\,ds - 2F(t)\,E\left[X_t\right]^2\\ &= 2F(t)\,T(t) + C^2(t) - \frac{G^2(t)\,S^2(t)}{D^2(t)} - 2\int_0^t f^2(s,t)\,F(t)\,ds - 2F(t)\,E\left[X_t\right]^2\\ &= 2F(t)\,S(t) + C^2(t) - \frac{G^2(t)\,S^2(t)}{D^2(t)},\ \text{qui est le (4.22).}\end{aligned}$$

Nous sommes maintenant prêts pour définir l'équation différentielle stochastique pour $\widehat{X}_t$:

De la formule

$$\widehat{X}_t = c_0(t) + \int_0^t f(s,t)\,dR_s \qquad \text{où } c_0(t) = E\left[X_t\right]$$

viens :

$$d\widehat{X}_t = c_0^{'}(t)\,dt + f(t,t)\,dR_t + \left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}f(s,t)\,dR_s\right) dt, \tag{4.25}$$

et de

$$\begin{aligned}\int_0^u \left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}f(s,t)\,dR_s\right) dt &= \int_0^u \left(\int_s^u \frac{\partial}{\partial t}f(s,t)\,dt\right) dR_s\\ &= \int_0^u \left(f(s,u) - f(s,s)\right) dR_s = \widehat{X}_u - c_0(u) - \int_0^u f(s,s)\,dR_s.\end{aligned}$$

Si

$$d\widehat{X}_t = c_0^{'}(t)\,dt + \frac{G(t)\,S(t)}{D(t)}dR_t + \left(\int_0^t f(s,t)\,dR_s\right)F(t)\,dt$$

où

$$\begin{aligned} d\widehat{X}_t &= c_0^{'}(t)\,dt + F(t)\,.\left(\widehat{X}_t - c_0(t)\right)dt + \frac{G(t)\,S(t)}{D(t)}dR_t \\ &= F(t)\,\widehat{X}_t dt + \frac{G(t)\,S(t)}{D(t)}dR_t, \end{aligned}$$

depuis $c_0^{'}(t) = F(t)\,c_0(t)$ (étape.4.)
Si nous remplaçons

$$d\widehat{X}_t = \left(F(t) - \frac{G(t)^2\,S(t)}{D^2(t)}\right)\widehat{X}_t dt + \frac{G(t)\,S(t)}{D^2(t)}dZ_t.$$

Nous arrivons à la conclusion suivante :

Théorèm 4.2.7 ***(Le filtre à une dimension de Kalman-Bucy)***

La solution $\widehat{X}_t = E[X_t/\mathcal{G}_t]$ du problème de filtrage linéaire 1-dimensionnelle

(système linéaire) $dX_t = F(t)\,X_t dt + C(t)\,dU_t; F(t) \in \mathbb{R}, C(t) \in \mathbb{R}$ (4.10)

(observations linéaires) $dZ_t = G(t)\,X_t dt + D(t)\,dV_t; G(t) \in \mathbb{R}, D(t) \in \mathbb{R}$ (4.11)

(avec des conditions comme indiqué plus tôt) satisfait l'équation différentielle stochastique

$$d\widehat{X}_t = \left(F(t) - \frac{G^2(t)\,S(t)}{D^2(t)}\right)\widehat{X}_t dt + \frac{G(t)\,S(t)}{D^2(t)}dZ_t;\ \widehat{X}_0 = E[X_0]$$

Où

$S(t) = E\left[\left(X_t - \widehat{X}_t\right)^2\right]$ satisfait à l'équation (déterministe) de Riccati

$$\frac{dS}{dt} = 2F(t)\,S(t) - \frac{G^2(t)}{D^2(t)}S^2(t) + C^2(t)\,,\ S(0) = E\left[(X_0 - E[X_0])^2\right].$$

Exemple 4.2.8 ***(Observations bruyantes d'un processus constant)***

Considérons le cas simple

$$\text{(système) } dX_t = 0, \text{i.e. } X_t = X_0; E\left[X_0^2\right] = a^2$$

$$\text{(observations) } dZ_t = X_t dt + m dV_t; Z_0 = 0$$

(correspondant à

$$H_t = \frac{dZ_t}{dt} = X_t + mW_t, (W_t = \text{un bruit blanc}).$$

Nous allons d'abord résoudre l'équation de Riccati correspondante pour

$$\begin{aligned} S(t) &= E\left[\left(X_t - \widehat{X}_t\right)^2\right] : \\ \frac{dS}{dt} &= -\frac{1}{m^2}S^2, \quad S(0) = a^2 \\ S(t) &= \frac{a^2 m^2}{m^2 + a^2 t}; \qquad t \geq 0. \end{aligned}$$

Cela donne l'équation suivante pour $\widehat{X}_t$:

$$d\widehat{X}_t = -\frac{a^2}{m^2 + a^2 t}\widehat{X}_t dt + \frac{a^2}{m^2 + a^2 t} dZ_t; \quad \widehat{X}_0 = E\left[X_0\right] = 0$$

où

$$d\left(\widehat{X}_t \exp\left(\int_0^t \frac{a^2}{m^2 + a^2 s} ds\right)\right) = \exp\left(\int_0^t \frac{a^2}{m^2 + a^2 s} ds\right) \frac{a^2}{m^2 + a^2 t} dZ_t$$

ce qui donne

$$\widehat{X}_t = \frac{m^2}{m^2 + a^2 t}\widehat{X}_0 + \frac{a^2}{m^2 + a^2 t} Z_t; \quad t \geq 0.$$

C'est l'analogue continu de l'exemple (4.2.1).

Conclusion Générale

L'objectif de notre travail a concerné le filtrage linéaire. Nous avons tout d'abord présenté les notions suivants : processus stochastique, mouvement Brownien, intégrale stochastique et les EDS. Le filtre de Kalman est un estimateur d'état dans un environnement stochastique. Lorsque les variances des bruits sont connues, c'est un estimateur linéaire minimisant la variance de l'erreur d'estimation. Ainsi comme touts outils de filtrage, le filtre de Kalman a des avntages qui sont les suivants :

Il minimise l'erreur quadratique moyenne, récursive (pas besoin d'avoir toutes les données avant de commencer les calculs). Il est utile pour le temps réel, permet l'estimation d'états passés, présents et futurs, utilisable même si le modèle du processus est imprécis.

En non-linéaire, le filtre de Kalman étendu n'est pas le meilleur estimateur, mais donne de bons résultats.

Bibliographie

[1] Bernt Øksendal, Stochastic Differential Equations. Springer Verlag, Sixth edition.

[2] Ramon van Handel, Stochastic Calculus, Filtering, and Stochastic Control. (This version : May 29, 2007).

[3] Gopinath Kallianapur, Stochastic Filtering Theory. Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, (1969).

[4] Philippe Briand, Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades (Mars 2001).

[5] Olivier Lévêque, Cours de probabilités et calcul stochastique (Semestre d'hiver 2004-2005).

[6] Nils Berglund, Martingales et calcul stochastique Master 2 Recherche de Mathématiques. Université d'Orléans, Version de Décembre (2010).

[7] Romuald ELIE, Calcul stochastique pour la finance.