République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Khider Biskra

Département de Mathématiques
Domaine Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité Statistique

Mémoire de fin d'étude en Master

Intitulé :

Le MESURE DE RISQUE DANS UN Marché financier

Présenté par :
Azzouz

Devant le jury
-Dr. YAHIA Djabrane
-Dr. FATAH Benatia
Encadreur : Dr. Sonia TOUBA

Année Universitaire
2011-2012

Résumé :

Ce travail a pour objectif initial de découvrir et comprendre le fonctionnement des mesures de risque, en particulier dans le domaine de la finance. Nous donnons dans un premier temps les définitions et les propriétés d'un marché financier. Nous exposons ensuite les différentes mesures de risque traditionnelles et actuelles pour couvrir les risques d'un marché selon le modèle proposé. Nous critiquons, pour finir ce mémoire, quelques méthodes d'estimation de la mesure VaR.

Mots clé : marché financier, risque financier, mesure de risque, cohérence, α-stable, queue lourde.

Abstract:

This work was initially intended to discover and understand the risk measures, particularly in the field of finance. We give at first the definitions and properties of a financial market. It then outlines the various measures of traditional and current risk to hedge a market as the proposed model. We criticize, to finish this thesis, some methods for estimating the VaR measure.

Key words: financial market, financial risk, risk measurement, consistency, α-stable, heavy tail.

ملخص:

الهدف الأساسي من هذا العمل هو اكتشاف وفهم مقاييس الخطر، وخاصة في مجال التمويل. نتطرق في البداية إلي مفاهيم وخصائص السوق المالية، ثم نتعرض إلي شرح مختلف مقاييس الخطر التقليدية والحالية لتغطية أخطار السوق المالية على حسب النموذج المقترح بها. و أخيرا قمنا بمقارنة طرق مختلفة لتقدير مقياس الخطر VaR.

المصطلحات: السوق المالية، المخاطر المالية، قياس المخاطر، التلاؤم ، α-مستقر، ذيل كثيف.

Remerciments

Au nom du Dieu Le Plus Clément et Le Plus Miséricordieux.

Louange à Allah, *Dieu* de l'univers et de tous les hommes, que sa grâce, son salut, son pardon et sa bénédiction soient accordés au meilleur de ses créatures notre prophète Mohamed ainsi qu'aux membres purs de sa famille et à tous ses compagnons. Je tiens à remercier en premier Dieu le tout puissant qui nous a accordé la volonté et le courage pour réaliser ce projet.

Tout d'abords je tiens à exprimer ma profonde gratitude à **Dr.Touba Sonia**, d'avoir accepter la charge de m'encadrer. Elle a su me donner une grande liberté d'initiative tout en restant toujours présente pour discuter des problèmes rencontrés, des résultats obtenus et des orientations à suivre. Son enthousiasme et son dynamisme m'ont à chaque fois permis de rebondir dans les moments difficiles. Je la remercie vivement pour son aide précieuse et tous les conseils qu'elle a pu me fournir durant la préparation de ce mémoire.

Je remercie Messieurs les membres du jury de soutenance pour m'avoir honorée en acceptant de juger mon travail.

J'ai eu la chance de profiter de beaucoup d'expériences à la fois douloureuses et enrichissantes. Merci à tous mes professeurs qui m'ont soutenu durant mes années d'études. Le monsieur le doyen K. MELKEMI, en particulier chef de déppartement, Messieurs A. Necir, Z. Mokthari, B. Labed, F. Benatia, Y. Djobran, D. Meraghni, M. Hfayed.

Un grand merci aussi à mes chères amies. Elles m'ont toujours aidée et m'ont apportée beaucoup de soutien moral.

Merci beaucoup à ma chère mère, qui a contribué minutieusement à l'amélioration de mon mémoire, pour ses encouragements, sa patience, son soutien et surtout son amour.

Enfin, je remercierai assez mes frères et sœurs pour leurs conseils et soutien.

Je vous dis : Merci
Azzouz Fouzia

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Notations et Abréviations

n	Nombre entier supérieur à 1.
$\mathbb{R}$	Ensemble des valeurs réelles.
$\mathbb{R}_+$	Ensemble des valeurs réelles
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	L'espace probabilisé.
F	La fonction de distribution.
$F^{\leftarrow}$	La fonction des quantiles (l'inverse généralisé).
$F_n^{\leftarrow}$	La fonction des quantiles empirique.
$v.a.$	Varaible alétoire défini sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
$v.a.r$	Varaible aléatoire réelle défini sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
$(X_1, ..., X_n)$	Echantillon de taille n de X.
VaR	Value-at-Risk.
ES	Expected Shortfall.
$CVaR$	Conditional Value-at-Risk.
WT	La Transformée de Wang.
PHT	La Proportioal Hazard Transformée.
X	v.a. défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
$X_{i,n}$	La $i^{ème}$ statistique d'ordre.
$CAC40$	Cotation Assistée en Continu.
$OPCVM$	Organisme de Placement Collectifs ou Valeurs Mobilières.
1_A	La fonction indicatrice sur l'ensemble A.

Introduction

Dans nos sociétés beaucoup de risque, par ce que ce dernier occupe désormais la place centrale dans les politiques publique, les controverses autour des nouvelles technologies. On ne compte plus les activités traitées de risque pour la santé ou l'environnement. Aussi, compte tenu de l'évolution et changement dans le domaine financier.

La gestion de risque est une préoccupation majeure pour les gouvernements et les entreprises donnant lieu à des tentatives de "mesure" des à tout niveau.

Ce pendant, les mesures de risque financier se manifestent explicitement dans beaucoup de différents type de problèmes d'assurances et de finance, elles se manifestent implicitement dans les problèmes impliquant le déficit et les ruines des probabilités. Dont le rôle important que peut jouer dans la prévision du comportement des marchés financiers. La mesure de risque est problème actuariel important base sur dévers système d'sacomes.

Il existe nombreuses façons de mesurer le risque, la mesure la plus répandue est la *Value-at-Risk (VaR)* établie par *JP Morgan (1994)*. VaR comme mesure de risque est profondément dénigrée et souffre des contradictions en raison de ne pas être une mesure cohérente de risque selon *Artzner et al. (1999)*.

Dans le but d'arriver à la réalisation de notre objectif, nous proposons un plan qui s'articule autour de 3 chapitres :

Le premier chapitre présente la caractéristique générale du marché financier à savoir sa définition, son rôle, et ses acteurs et l'efficience des marchés, les défauts modèle brownien ordinaire.

La mesures des risques est l'objectif du deuxième chapitre : au début nous présentons le risque son type et sa nature après nous définitions la mesure de risque et donnerons quelques propriétés désirables qu'une mesure du risque devrait réaliser, enfin nous donnons une idée simple sur le *Value-at-Risk*.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude empirique de l'indice boursier *CAC40*, ces propriétées, définition des méthodes d'estimation pour la *VaR* avec une comparaison entre ces derniers dans le terme d'efficacité des estimateurs obtenus.

Chapitre 1

Marché financier

Le marché financier est un lieu de financement à long terme, il se caractérise par une composition complexe et par des produits divers et ceci dans le but de s'adapter aux différents motifs de transactions et aux différent choix des acheteurs et vendeurs. Le marché financier assure plusieurs fonctions, d'ailleurs, il s'agit d'un circuit de financement de l'économie, d'un instrument organisant la liquidité de l'épargne investie à long terme, d'un instrument permettant la cotation des actifs ou valeurs mobilières, un outil de développement de la structure de l'entreprise et un outil de gestion des risques. Certains marchés sont plus efficaces en utilisant une telle organisation que d'autres ; tout dépend du besoin des investisseurs et des entreprises dans un tel environ amant. Dans le cadre de ce travail, on va traiter dans un premier temps les caractéristiques générales du marché financier à savoir sa définition, son rôle, ses acteurs, l'efficience, et les défauts modèles browniens.

1.1 Définition

Le marché financier est un lieu de rencontre de l'offre et de la demande des capitaux à long terme. Par opposition au marché monétaire, dans lequel les agents économiques négocient entre eux leurs besoins et leurs excédents de capitaux à court terme, le marché financier est le lieu de négociation des échanges de capitaux à long et moyen terme matérialisés par des instruments appelés valeurs mobilières. Pour comprendre le marché correctement, il est nécessaire de le diviser en marché primaire et en marché secondaire.

Le marché primaire : C'est le marché des émissions des valeurs mobilières, le marché primaire met en présence d'une part les agents économiques disposant d'un excédent d'épargne et souhaitant le placer ; et d'autre part les opérateurs qui ont des besoins de financement, et qui créent à ce titre, différentes valeurs mobilières. Il s'agit des actions, obligation, des obligations convertibles en actions à l'image des bons de privatisation et des certificats d'investissements. Sont aussi assimilés à des valeurs mobilières les droits d'attribution et de souscription.

Le marché secondaire : la bourse : C'est le marché sur lequel sont échangées des valeurs mobilières déjà émise (sur le marché primaire). Sur ce marché les investisseurs ayant déjà acheté des titres doivent pouvoir liquider rapidement leur position, dans des conditions de sécurités optimales. Le marché secondaire peut être décomposé en :

· Les bourses reconnus (cote de la bourse) :sur les quelles se négocient les titres inscrits à la cote . L'inscription à la cote de bourse permet aux sociétés d'accroître la liquidité pour leurs titre, leur degré de visibilité dans l'économie, leur prestige et leur notoriété.

· Le marché hors cote (hors bourse) :c'est le marché sur lequel se négocient tous les titres non inscrits à la cote d'une bourse.

1.2 Rôle du marché financier

En canalisant l'épargne des investisseurs sur les différentes valeurs mobiliéres, le marché financier joue un rôle important sur le plan économique en permettant à l'État (trésor), aux entreprises publiques semi-publiques ainsi qu'aux sociétés privées de trouver les ressources longues nécessaires au financement de leurs programmes de développement.

Le marché primaire :

Joue un rôle de conciliation des besoins des prêteurs et des emprunteurs, ainsi que la procuration des fonds nouveaux aux agents à besoins de financement par l'émission de titres.

Le marché secondaire permet :

✓ D'assurer la liquidité des titres

✓ D'encaisser la rémunération attachée à un placement

✓ Réaliser de la croissance externe en acquérant des actions suffisantes pour prendre participation dans le capital d'autres entreprises.

1.3 Acteurs du marché finaince

1.3.1 Les émetteurs

Les émetteurs sont les agents. Publics ou privés, à la recherche de ressources destinées à financer leurs investissements, on peut faire la distinction entre :

Les entreprises :

Elles sont dans l'obligation d'investir régulièrement pour financer leur développement économique. Face à ce besoin, elles ne disposent pas nécessairement des ressources internes suffisantes. Elles sont donc amenées à rechercher d'autres sources de financement notamment les emprunts. Les emprunts peuvent être obtenus auprès d'une banque ou un groupe de banques " le syndicat", ou d'un établissement spécialisé (crédit-bail).Ils peuvent également être placés par le biais d'émission d'obligations ou de titres à court et moyen terme : billet de trésorerie (pour les entreprises non financières), certificats de dépôt (banques), bon à moyen terme négociable.

L'État :

Le solde budgétaire de l'État permet de déterminer sa situation financières les recettes de l'État sont supérieures à ses dépenses, le budget est donc en excédent. Par contre, si les dépenses sont supérieures aux recettes, le solde budgétaire est déficitaire. L'État doit donc trouver des ressources pour financer son activité. Dans cette mesure, les administrations publiques (Etas et collectivités territoriales) ne peuvent que recourir à l'emprunt vue qu'elles ne peuvent pas se financer par l'émission d'actions.

Les investisseurs recherchent les titres émis par l'État car ils sont connus à faible risque, d'ailleurs les chances de faillite du gouvernement sont peu probables. Ces titres entrent en grand nombre dans les portefeuilles des OPCVM obligataires, les fonds de pension et les compagnies d'assurance.

Les collectivités locales :

Le financement des collectivités locales combine le recours aux fonds publics (impôts) est à l'emprunt bancaire, les collectivités locales émettent également des titres obligataires qui offrent une sécurité analogue à celle des émissions de l'État.

Les agences de notation :

Une agence de notation est une entreprise commerciale qui attribue une note aux émetteurs des titres négociés sur marché. Cette note évalue la solvabilité de l'émetteur, c'est-à-dire sa capacité à rembourser les emprunts émis. La note est attribuée à la demande de l'émetteur lui-même, ou à l'initiative de l'agence. La note obtenue conditionne la capacité d'un émetteur à trouver des investisseurs prêts à acheter leurs titres, et le taux de rémunération qu'il va devoir offrir pour attirer les investisseurs. La note la plus élevée est généralement attribuée aux Etats des pays développés.

1.3.2 Les intermédiaires

Les investisseurs institutionnels :

Ce sont des organismes qui détiennent du fait de leur activité une épargne abondant. Cette catégorie d'investisseurs est constituée : des compagnies d'assurance, des caisses de dépôt et aussi des OPCVM, qui placent une partie de leurs ressources en valeurs mobilières, afin de faire face aux engagements qu'ils ont pris vis-à-vis de leur clientèle.

Les banques :

Elles mènent une mission d'intermédiaire entre les agents à besoin de financement et ceux à excédent de financement.

Les intermédiaires boursiers :

Se sont des sociétés d'intermédiation, personnes physiques ou morales qui interviennent sur marchés boursiers et qui assurent toutes les opérations à effectuer sur une bourse des valeurs mobilières. Elles assurent l'émission des titres (action, obligations et valeurs assimilés), la négociation (achat, vente de titres), le conseil et la gestion de portefeuille. On peut citer :

Firmes de courtiers (brokers) : Ce sont des intervenants sur les marchés organisés, le broker est un intermédiaire financier changé de mettre en relation les prêteurs et les emprunteurs. Pour les titres il agit sur le marché primaire en garantissant la bonne fin d'une émission, mais également sur le marché secondaire en continuant de mettre en contact les différents intervenants.

Teneurs de marché (Market Maker) : Ce sont des entreprises, généralement une banque d'investissement, ou une personne qui se charge de transmette en contenu des prix à l'achat et à la vente soit uniquement à sa clientèle, soit, à l'ensemble du marché, y compris donc à ses concurents.On dit aussi qu'il ‹‹cote››.

Membres d'une Bourse : Ce sont des spécialistes. La dénomination dépend du lieu et du type de concurrence (monopole, etc.)...

1.4 L'efficience des marchés

Nous allons dans ce paragraphe énoncer l'hypothèse d'efficience des marché financiers, Selon Lacaze[26],"Un marché est efficient dès lors que les prix intègrent instantanément l'ensemble des informations pertinentes et nécessaires à l'évaluation des actifs financiers qui y sont traités. Autrement dit, un marché efficient intègre instantanément les incidences des événements passés et reflète intégralement l'ensemble des anticipations des agents concernant les événements à venir ". Il existe 3 degrés d'efficience

L'efficience au sens faible :

Le prix de l'actif reflète pleinement toute l'information contenue dans la série passée du prix de l'actif en question. Les prix futurs dépendront uniquement des informations qui parviendront quotidiennement aux marchés. Le prix de l'actif suit un modèle de martingale.

L'efficience au sens semi-fort :

le prix de l'actif pleinement toute l'information disponible publiquement.

L'efficience au sens fort :

le prix de l'actif reflète pleinement toute l'information qu'elle soit publique ou confidentielle. Dans ce cas, il est impossible de prévoir l'évolution des cours. L'hypothèse d'efficience des marchés, nous amène à considérer que les rendements suivent une marché aléatoire. Les variations successives du logarithme des cours sont totalement indépendantes. C'est pour cette raison que Bachelier a proposé de modéliser les rendements avec des mouvements browniens ordinaires.

1.5 Les défauts du modèle brownien ordinaire

Les mouvements browniens ordinaires sont très utilisés en finance pour étudier l'évolution des rendements. Ils supposent que les rendements sont des fonctions continues du temps et suivant la distribution de Gauss et que leurs accroissements sont indépendants et stationnaires. Nous allons voir dans ce partie qu'approcher les chroniques financières par des mouvements browniens ordinaires n'est pas correct.

Définition 1.1.

Un mouvement brownien (ou processus de Wiener) est un processus aléatoire $(X(t))$ *telque :*

1. *Avec une probabilité égale à* $1, X(0) = 0$,

2. *Les trajectoires de* $X(t)$ *sont continues,*

3. *Pour* $t > s \geq 0$, *l'accroissement* $X(t) - X(s)$ *a une distribution normale de moyenne variance* $t - s$,

4. *Si* $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_{2m}$ *,les accroissements* $X(t_2) - X(t_1), ..., X(t_{2m}) - X(t_{2m-1})$ *sont indépendants.*

Nous allons montrer que l'hypothèse du mouvement brownien n'est pas valable pour au moins 3 raisons :

1. *Les prix et les rendements sont discontinus en réalité,*

2. *Les rendements logarithmes ne suivent pas une loi normale,*

3. *Les accroissements des rendements ne sont pas stationnaires.*

1.5.1 Discontinuité des prix

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien alors la fonction $s \longrightarrow X_s(\omega)$ est presque sûrement une fonction continue. Nous savons qu'en réalité l'évolution des prix au cours du temps est loin d'être continue car :

1. Les prix ne sont infiniment divisibles (le prix est négocié au centime près),

2. Les titres ne sont pas côtés 24 heures sur 24 et le temps ne peut pas être subdivisé au-delà d'un certain rang (30 seconde, par exemple),

3. Les prix bougent instantanément quand une information importante est divulguée et des krachs surviennent de temps en temps.

1.5.2 Loi normale

Le modèle brownien fait aussi appel à la loi normale. Si la série des rendements est un mouvement brownien alors les rendements sont des variable aléatoires gaussiennes. Le graphique ci-dessous représente l'histogramme de l'accroissement du logarithme des cours au jour le jour de l'OPCVM Groupama Obligations France du 25 octobre 1992 au 18 mai 2001

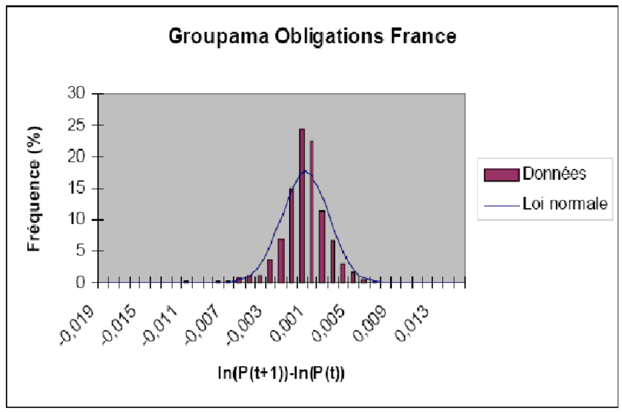

FIG.1.1- Distribution de l'accroissement du logarithme du cours de l'OPCVM Groupama Obligation France

Cet histogramme paraît être symétrique. La distribution des données et plus point que loi normale. Le graphique suivant montre que la queue la distribution des données réelles est plus épaisse et plus longue que la queue de distribution de la loi normale.

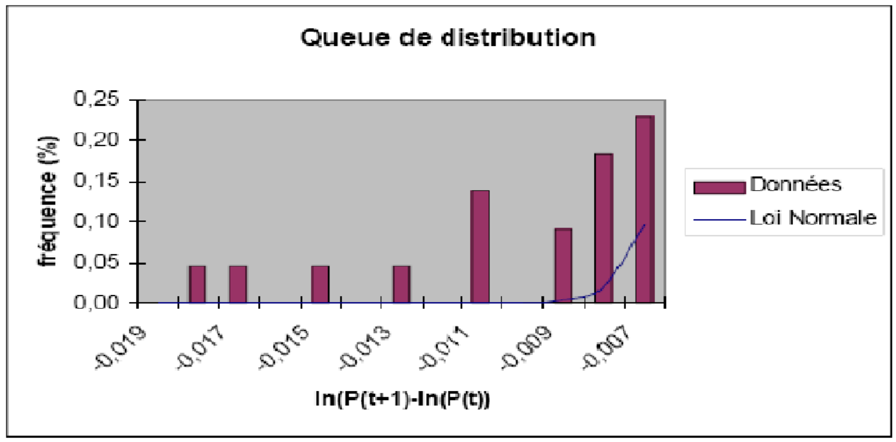

FIG.1.2- Argandissement du graphique $pr\acute{e}c\acute{e}$dent

Pour vérifier que les accroissements quotidiens du logarithme du cours de certains titres ne suivant pas une loi gaussienne, nous allons calculer la statistique de Kurtosis associée. Le Kurtosis caractérise la forme du pic ou l'aplatissement relatif d'une distribution comparée à une distribution normale. Un Kurtosis positif indique une distribution relativement pointue, tandis qu'un Kurtosis négatif signale une distribution relativement aplatie. Le Kurtosis se définit comme :

$$KURTOSIS_X = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^4}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2\right]^2}$$

Nous trouvons pour la série sur les cours de l'OPCVM Groupama Obligation France un Kurtosis égal à 8,31(contre 3 pour une loi gaussienne).La distribution de cette série est donc plus pointue et a des queues de distribution plus lourdes qu'une distribution normale. Nous avens calcule la statistique de Kurtosis pour plusieurs chroniques financières et nous constatons que pour certaines séries elle est supérieure voire très supérieure à 3.

Série	**Kurtosis**	**Série**	**kurtosis**
		Action	
OPCVM		Renault	2.03
Nippon Gan	3.42	France Télecom	3
GAN Croissance	11.07	AXA	26.42
France GAN	14.07	**Indices**	
Ameri-GAN	259.11	CAC 40	5.24
GAN Rendement	364.47	SBF 250	3.01
Group. Oblig. France		Nikkei 300	3.67
		Dow Jones Industrials	59.43
		Nasdaq Composite	416.78

TAB.1.1- Statistique de Kurtosis

Il semble donc inexact de considérer que le rendement est toujours une variable aléatoire gaussienne. Nous venons de voir que les queues de la loi normale sont bien moins épaisses que les queues des distributions empiriques du rendement, ce qui pose un gros problème pour gérer le risque en finance.

1.5.3 Les grandes fluctuations

Le modèle browninen suppose aussi que les accroissements sont stationnaires (voir FIG.1.3). Ces modèles excluent les grandes fluctuations, ils ne prennent donc pas en considération les Krachs et minikrachs qui se produisent de temps en temps. Ils sont donc insuffisants pour étudier les cours boursiers.

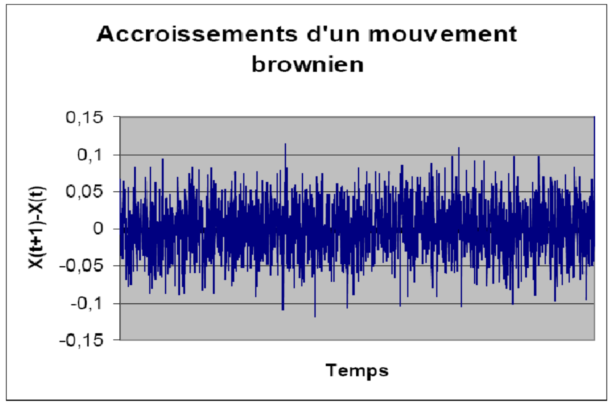

FIG.1.3- Simulation des accroissements d'un mouvement brownien ordinaire

Sur ce graphique, aucun accroissement n'est très différent des autres et la variance semble être à peu près constante au cours du temps. Les changements de prix sont réguliers et ne sont pas concentrés.

Chapitre 2

Mesure des risques

Le risque est un élément présent dans la plupart des décisions d'investissement prises par une entreprise ou par un épargnant, c'est un concept asymétrique, relatif, heteroskedastic, multidimensionnel qui doit tenir compte du comportement asymptotique des rendements et l'impact de plusieurs phénomènes économiques qui pour raient influencer les préférences d'un investisseur. Notons qu'en finance la mesure du risque est liée à sa volatilité et son écart-type, il existe toujours une incertitude concernant le risque ; c'est pour quoi les mesures de risque ont très souvent utilisées, par praticiens aussi bien que par les académiciens.

Dans la suite du ce chapitre, nous donnerons tous les détails de la théorie de mesure de risque :

Dans la première section ; nous allons donner quelques explications de différents types des risques financiers dans un cadre plutôt informel. Le but étant ici de motiver la définition de la notion de risque et la nécessité d'intégrer des mesures de risque dans le domaine de la gestion de risques. Dans le deuxième section ; nous allons exposer les différentes définitions et notions fondamentaux concernant les mesures de risques financiers. Dans la troisième section, nous sommes intéressés uniquement à traiter la mesure de *VaR* notamment sa définition, leur avantages et leur inconvénients. Pour pallier à ces déficiences, *Artzner et al. (1999)* ont présenté la notion des mesures cohérentes de risque et proposent les axiomes qu'une mesure de risque raisonnable doit satisfaire.

2.1 Risque Financier

Avant d'expliquer qu'est ce qu'une mesure de risque nous donnons une idée générale sur le risque, son type et sa nature

2.1.1 Le Risque

Le risque est un mot avec des implications diverses. Certaines personnes définissent le risque différemment des neutres. Cet désaccord causes des graves confusions dans le domaine de l'évaluation des risques et de leur gestion.

2.1.2 Définitions

Le Webster's Collegiate Dictionary, 5e édition, définit le risque comme la possibilité de perte, le degré de probabilité de la perte, le montant de la perte éventuelle, le type de la perte qu'une société d'assurance couvre, et ainsi de suite. Des autres dictionnaires posent des définitions telles que celles-ci ne sont pas suffisamment précises pour l'évaluation des risques.

La littérature scientifique et professionnelle plusieurs définitions différentes, par exemple :

Définition 2.1. *(Risque en littérature)*

Le risque est la prise en compte par une personne de la possibilité de réalisation d'un évènement contraire à ses attentes ou à son intérêt, il est alors la probabilité objective que les résultats réels de l'événement différeront de manière significative du revenu prévu c'est une perte potentielle, identifiée et quantifiable.

Par abus de langage, le risque peut aussi désigner à la fois l'évènement considéré et la probabilité de sa survenue. Il est alors la réunion d'ensembles de triplets comprenant : un scénario (c'est-à-dire un événement), une probabilité et une conséquence de cet événement.

Plus précisément ; le risque financier est un risque de l'argent suie à une opération financière (sur un actif financier) on à une opération économique ayant une incidence financière (par exemple une vente à crédit ou en devises étrangères)

Définition 2.2. *(Risque en Mathématiques)*

Fixons un espace mesurable (Ω, F). Un risque est une v.a. définie sur (Ω, F) désigné par X. Il représente la perte nette finale d'une position (éventualité) actuellement détenues. Lorsque $X\rangle 0$, on dit qu'il y a une perte, la classe de ces v.a. sur (Ω, F) est noté par ϕ.

2.1.3 Types de risque

Le risque est polymorphe. Avant d'aborder sa quantification, il convient de connaître ses différentes formes, natures ou manifestations.

Risque de baisse :

Le risque de baisse de la valeur d'un titre se décompose en deux parties l'une dite systématique qui correspond au risque global du marché et l'autre spécifique au titre particulier dite non systématique. Nous verrons plus loin que le risque systématique est loin d'être négligeable puisqu'il est responsable de 73 à 90% du rendement moyen [à reformuler of p.105 de "Principes de Finance Moderne"].

La diversification au sein d'un portefeuille, si elle est bien menée, permet d'éliminer le risque non systématique.

Risque de liquidité :

Si un titre est peu liquide, il est fort probable qu'un décalage de cours important aura lieu au premier problème. Il faut toujours garder à l'esprit que pour qu'un échange ait lieu, il faut qu'il y accord entre deux parties. Autrement dit, si vous souhaitez vendre à un prix donné, il faut qu'une autre partie accepte d'acheter à ce prix. Si personne ne souhait acheter, vous ne pouvez pas vendre ou vous devez accepter de vendre moins cher. Donc si de nombreuses personnes souhaitent vendre alors qu'aucun acheteur ne se présente... le cours s'effondre.

Le risque lié à liquidité est donc loin d'être négligeable.

Risque de change :

Le risque de change est lié aux, accusations des marnais entre elles, donc aux investissement réalisés en monnaies étrangères. Ainsi, si vous achetez des valeurs sur le NYSE par exemple lorsque le dollar est en hausse, donc cher par rapport à l'euro, vous risquez de voir vos éventuelles plus-values partir en fumée lorsque vous reconvertirez le fruit de votre vente de dollars en euros si dollar venait de baisser.

2.1.4 Nature des risques

Risques de crédit :

Incapacité d'un débiteur (entreprise, instit ion financière, particulier. . .) à respecter ses engagements financières vis-à-vis de sa banque.

Risques Pays :

Défaillance d'un pays émergent ou incapacité d'une autre partie localisée dans un pays émergent de faire face à ses engagements en raison de facteurs (politique, économique,...) échappant à son contrôle.

Risques de marché :

Risque de perte suite à une évolution défavorable des paramètres de marché pouvant causer des impacts négatifs sur la position de la banque.

Risques opérationnels :

Pertes résultant d'une inadéquation ou d'un échec au niveau des processus, des personnes, des systèmes (erreurs humaines, pannes systèmes, laudes, litiges. . .) ou perte résultant d'événements externes (catastrophes naturelles, incendies, . . .)

Risque de modèle :

Risque de perte liée à l'utilisation d'un modèle inapproprié ou erroné pour la valorisation de positions ou le calcul d'indicateurs de risques.

2.2 Differente Mesure de Risque

2.2.1 Mesure de risque

Le principal outil théorique pour calculer le besoin en fonds propres est défini sous le vocable « mesures de risque ». Certaines de ces mesures de risque sont manipulées depuis fort longtemps par les actuaires, plus particulièrement dans le domaine de la tarification. Les mesures de risque utilisées pour le besoin en fonds propres ont donné lieu à de nombreux travaux actuariels ces dernières années. De manière générale, elles visent à fixer un niveau de capital pour un portefeuille de risques donné, et mesurent le risque en un en ou plusieurs nombres. Dans ce qui suit-on donner a la définition d'une mesure de risque et les propriétés associées qui peuvent être recherchées pour évaluer le besoin en fonds propres, puis on présentera les principales mesures de risque permettant de fixer un niveau optimal de fonds propres.

Définition Formelle d'une Mesure de Risque

Une mesure de risque constitue un outil important, n'importe qu'elle établissement financière peut faire appel à diverses techniques pour mesurer et contrôler le risque qu'elle assume dans ses diverses activités. Pour chaque type d'activité, elle peut déterminer les mesures du risque les plus convenables. Une mesure de risque est définie comme suit :

Définition 2.3. *(Mesure de risque)*

Une mesure de risque est une application :

$$\rho : \quad \begin{array}{l} \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R} \\ X \longrightarrow \rho(X) \end{array}$$

censée à quantifier le risque porté par la v.a. X définie sur (Ω, F, P).

Une mesure de risque définie en tant qu'une trace d'une classe des v.a. définies sur un espace mesurable (représentant les risques actuels) aux nombre réelles. Un bon sens de la valeur numérique d'une mesure de risque est donné par la certitude équivalente pour une mesure de risque donnée et pour une v.a. donnée, l'équivalent de certitude est le nombre réel qui est tout aussi risque.

En termes économiques, nous interprétons $\rho(x)$ comme le montant de capital qui devrait être ajouté en tant qu'amortisseur pour un portefeuille avec une perte donnée par X, de sorte que le portefeuille devient acceptable à un contrôleur externe ou interne de risque (elle doit saisir le risque sur les préférences du décideur).

Mesure de risque

Soit (Ω, F) un espace mesurable. Soit X une fonction mesurable à valeurs réelles définie sur Ω.

Pour un seénario $\omega \in \Omega$, la position $X(\omega)$ s'interprète comme une perte (si $X(\omega)\langle 0$, alors $-X(\omega)$ s'interprète comme un gain).

On note L^{∞} l'ensemble des positions X telle que $\|X\|_{\infty} = \sup_{\omega\in\Omega} \mid X(\omega) \mid$est fini. Soit ρ une fonction définie sur $A \subset L^{\infty}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour une position X, $\rho(X)$ s'interprète comme le montant des fonds propres exigés associé à cette position.

Exemple 1. *On peut considérer :*

$\cdot$ $\rho_{\max}(X) = \sup_{\omega\in\Omega} X(\omega)$,

$\cdot$ $\rho(X) = \sup_{p\in P} E_p[X]$,*où* P *est un ensemble de probilités sur* (Ω, F).

Définition 2.4.

On dit que est une mesure de risque monétaire si :

$\cdot$ ρ *est coroissant :* $X \geq Y \Rightarrow \rho(X) \geq \rho(Y)$.

$\cdot$ *invariante par translation :* $\rho(X+m) = \rho(X) + m$ pour tout $m \in \mathbb{R}$.

Paramètres d'une Mesure de Risque

Pour chaque mesure de risque, il faut spécifier trois paramètres essentiels : l'horizon de modélisation, le seuil de confiance et la variable financière à modéliser.

1. Sélection de l'horizon : L'horizon est la durée de temps sur laquelle le modèle doit être projeté pour produire des informations adéquates. Un horizon relativement court a le désavantage que la plupart des stratégies ne peuvent pas avoir leurs effets complets à court terme. En revanche, un long horizon freine la modélisation en projetant le variable économique loin dans le futur, ce qui peut entraîner la dégradation de la capacité de modélisation à tirer des conclusions fiables. En effet, plus l'horizon est long, plus la sensibilité du modèle aux hypothèses sous-jacentes est élevée.

2. Sélection du seuil de confiance : Le choix du seuil de confiance est un paramètre capital de mesure de risque. Il s'agit de spécifier la valeur critique de la mesure qui distingue entre le niveau acceptable et le niveau inacceptable de risque. Généralement, pour une mesure de risque donnée, on fixe un niveau de confiance (par exemple 90% pour le risque de marché) qui correspond à la probabilité que le montant des pertes ne dépasse pas cette mesure de risque en valeur absolue. Du point de vue réglementaire, l'objectif de l'utilisation de ce seuil est la minimisation du nombre de faillites.

3. Sélection de la variable financière : Le risque est défini en termes de changement de valeur entre deux dates. Plus exactement, entre la date modélisation (où la valeur est connue) et une date future (l'horizon de modélisation). De ce fait, la variable à modéliser est tout simplement la valeur future dans tous les états du monde, due aux changements de marché ou plus généralement à des événements incertains. Cette variable aléatoire a interprétée en tant que valeur futures d'une postions ou d'un portefeuille actuellement détenu. De manière générale, la variable financière à modéliser peut représenter la perte d'un portefeuille donné, la perte globale d'une société,...

Outre le choix des paramètres de la mesure de risque, le choix de la mesure elle-même est également nécessaire. Ce choix, qui fait l'objet des paragraphes suivants, doit prendre en compte plusieurs critères, comme la cohérence, le risque de queue et la discontinuité de la fonction de répartition de la variable financière.

2.2.2 Écart type(Déviation)

Définition 2.5.

Si X est une variable aléatoire de carré intégrable, appartenant donc à l'espace $L^2(\Omega, A, P)$, son écart type, généralement noté σ_X , est défini comme la racine carrée de l'espérance mathématique de $(X - E[X])^2$, soit :

$$\sigma_X = \sqrt{E[(X - E[X])^2]} = \sqrt{E[X^2] - E[X]^2}.$$

L'élévation au carré pour le membre de droite désigne implicitement la norme euclidienne au carré dans le cas où X est à valeurs vectorielles.

Enfin, l'écart type élevé au carré est égal à la variance.

La variance de cette série est alors :

Dans le cas d'équiprobabilité

$$Var = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}x_i^2 - \bar{x}^2.$$

Propriétés

L'écart type est toujours positif ou nul, celui d'une constante est nul. L'écart type d'une variable aléatoire X à laquelle a été ajoutée une constante est égal à l'écart type de la variable X. Cette propriété est nommée *invariance par translation.* L'écart type d'une variable multipliée par une constante est égal à la valeur absolue de la constante multipliée par l'écart type de la variable. Cette propriété est nommée *invariance par dilatation.* Ceci peut se résumer par

$$\sigma_{cX+b} = \mid c \mid \sigma_X.$$

L'écart type de la somme algébrique de deux variables est égal à

$$\sigma_{X\pm Y} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \pm 2\sigma_X\sigma_Y\rho(X,Y)}.$$

Où ρ est le coefficient de corrélation entre les deux variables X et Y.

2.2.3 VaR(Value-at-Risque)

Depuis le milieu des années *90*, le pivot du processus de mesure du risque de marché, est sans aucun doute, la Value-at-Risque *(VaR).* La *VaR* constitue un repère de mesure de risque notamment pour la mesure du capital économique et réglementaire. Certaines directives s'appuient par exemple sur cette mesure de risque, elle est adoptée par *le Comite de Bâle* comme mesure de référence.

Il y a de vaste littérature consacrée aux méthodes d'évaluation et d'utilité de cette quantité dans les applications ; la littérature peut être également vaste également consacrée aux critiques de *VaR*. Pour une vue d'ensemble générale et récente au sujet de *VaR*, le lecteur devrait consulter *Cotter et Dowd (2004)* et les références là-dedans.

Définition de la VaR

Certaines des questions les plus fréquentes au sujet de la gestion des risques dans les finances comportent l'évaluation extrême de quantile qui présentent un concept bien-compris et à fond étudié dans les statistique. Ceci correspond à la détermination de la valeur qu'une variable donnée dépasse avec une probabilité donnée certain seuil, la *VaR* a hérité l'utilisation répandue en littérature de finance et d'assurance seulement après sa dénomination qui a été stabilisée après la publication du document technique de *RiskMetrics en 1994*, par *JPMorgan*. La *VaR* était la composante clé de ce modèle. Une définition qui est souvent utilisée pour *VaR* est la suivante :

Définition 2.6. *(La VaR)*

En termes mathématiques la mesures de VaR n'est rien autrement que $(1-\alpha)$-*niveau de quantile de la fonction de répartition* F *en effet pour un risque* X *sur une période donnée* $[0,T]$ *et* $0\langle\alpha\langle 1$*, la VaR est :*

$$\begin{aligned} VaR(X) &= \alpha \times 100\% \; quantile \\ &= F^{\leftarrow}(1-\alpha) \\ &= \sup\{x \in \mathbb{R} \mid \Pr(X \geq x)\rangle 1-\alpha\} \end{aligned}$$

Analytiquement, la *VaR* associe à une position X est le plus petit montant de capital qui, s'il est ajouté à la position X et investi sans risque, rend la position acceptable.

De point de vue économique, elle permet de répondre à la question suivant :

Combien (on cherche le montant monétaire) l'établissement financier peut-elle perdre avec une probabilité $1-\alpha$ *pour une période de temps* T *fixé ?*

VaR est la perte maximum c'est une estimation de la perte éventuelle supportée par un établissement sur son portefeuille de positivions, dans l'hypothèse d'un scénario défavorable de marché que nous pourrions prévoir à l'intérieur d'un intervalle de confiance donné (par exemple, $\alpha = 0.05$) et sur un horizon déterminé.

L'horizon associé à la *VaR* est quelques jours : 1 jour pour *RiskMetrics* ou 10 jours ouvrés, selon le *Comité de Bâle.* Le niveau de probabilité est typiquement de 95% ou 99%, il s'agit d'un quantile de la distribution projetée des gains et des pertes au cours de la cible horizon dans ce cas.

Limites de la VaR

VaR en dépit de son universalité, plusieurs auteurs ont précise ses déficiences. *VaR* comme mesure de risque est fortement critiquée :

1. *VaR* est difficile a optimiser. En outre, il est inadéquat d'employer la *VaR* dans la pratique en raison de sa non convexité elle possède beaucoup de minimum locaux. Ce qui peut avoir beaucoup d'extrémités locales, qui mènent au rang instable de risque.

2. *VaR* est un modèle de mesure de risque dépendante parce que, par définition, elle dépend de la référence de probabilité initiale.

3. *VaR* n'est pas une mesure de risque cohérente, car elle n'obéit pas l'axiome de sous additivité proposée par *Artzner et al. (1999)* et *Acerbi et Tasche (2002)* ce qui cause des contradictions, par conséquent il peut avoir un plus gros risque surgissant de la diversification. Ce résultat implique que l'agrégation des portefeuilles peut mener à une augmentation de risque.

4. La *VaR* ne mesure pas les pertes excédant le seuil de confiance, elle ignore toutes les informations concernant la queue de la distribution, et les propriétés statistiques de la perte significative au delà du seuil, par exemple elle ne s'inquiète de pas au risque de queue, ne nous indique rien au sujet de la taille potentielle de la perte qui l'excède, ne tient pas compte de la sévérité d'un événement encouru de dommages.

5. Pour les portefeuilles des titres, les modèles de *VaR* utilisés sont habituellement basés sur l'hypothèse (souvent implicite) que les rentabilités suivent une distribution normale. Or, la normalité ne peut pas capturer l'épaisseur de la queue

de distribution. Sous des fluctuations extrêmes des prix des actifs ou une structure extrême de la dépendance des actifs, la *VaR* peut sous-estimer de manière significative le risque. *Yamai et Yoshiba (2002)* prouvent que la *VaR* n'a pas de risque de queue quand les distributions sont de type elliptique. La *VaR* est sous additive seulement si la distribution de la variable financière est normale (ou de manière générale elliptique), ce qui n'est pas souvent le cas, même pour les rentabilités des actifs sur le marché.

2.2.4 Mesure de risque Cohérente

Le risque d'un portefeuille mesure par *VaR* peut être supérieur à la somme des *VaR* de ses composantes.

En écopons à ce type de critique *Artzner et al. (1999)* ont introduit le concept de mesure de risque cohérente

Proposition 2.1. (Caractérisations des mesures du risque cohérentes)

Si ρ est une mesure du risque cohérente, alors il existe un ensemble de mesures de probabilité Q tel que :

$$\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in Q} \{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X)\}.$$

Selon *Artzner et al. (1999)* une mesure de risque est cohérente si elle adhère aux axiomes que nous énumérons maintenant :

Définition 2.7. *(Mesure Cohérente)*

Une mesure du risque $\rho : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est cohérente si elle vérifiée* $(X, Y \in F)$:

1. *La sous additivté :*

$$\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y),$$

plus généralement

$$\rho(nX) = \rho(X + ... + X) \leq n\rho(X), \ n = 1, 2, ...$$

La fusion de deux centres de profit ne crée pas de risque supplémentaire. Au contraire, la diversification tend à réduire le risque global. Cette propriété permet ainsi une gestion décentralisée du besoin en capital dans les différents centres de profit sans courir le risque d'un besoin global supérieur à la somme des besoins individuels de chacun des certain niveau requis de capital pourrait être incitée à se scinder artificiellement en deux entités afin de réduire son besoin en capital.

2.*L'homogénéité positive :*

$$\rho(\lambda X) \leq \lambda\rho(X) \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}_+,$$

plus généralement

$$\rho(nX) = n\rho(X), \ n = 1, 2, ...$$

De même qu'une fusion ne crée pas risque supplémentaire ($\rho(\lambda X) \leq \lambda\rho(X)$), une fusion sans diversification ne réduit pas le besoin global en capital.

3. *La monotonie :*

$$X \geq Y \Rightarrow \rho(X) \geq \rho(Y) \ .$$

Si les pertes encourues avec le risque X sont toujours supérieures à celles obtenues avec Y, le besoin en capital pour X doit être supérieur à celui pour Y.

4. *L'invariance par translation :*

$$\rho(X + c) \leq \rho(X) - c \text{ pour tout } c \in \mathbb{R}.$$

Speciallement, nous avons $\rho(X + \rho(X)) = \rho(X) - \rho(X) = 0$ c'est-à-dire, en ajoutant $\rho(X)$ à la position initiale X, nous obtenons une position "neutre". On notera en particulier que $\rho(X) = -\alpha$ avec la convention que $\rho(0) = 0$.

5. *Convexe*

La convexité implique que la diversification n'augmente pas le risque, car la valeur de risque de la portefeuille diversifiée $\lambda X + (1 - \lambda) Y$ est inférieure ou égale à la moyenne re-pondérer des différentes valeurs de risque.

ρ est dite convexe si pour tout $\lambda \in [0, 1]$

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda) Y) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y).$$

Une mesure de risque ρ convexe et positivement homogène est dite cohérente.

Remarques 2.1.

✓ Il est clair qu'une mesure cohérente est convexe. La réciproque est fausse. La cohérence est la notion qui se rapproche le plus de notre intuition. C'est pourquoi cette définition est apparue historiquement en premier. On s'est aperçu ensuite que les principaux résultats de la théorie des mesures cohérentes de risque pouvaient être étendus de manière similaire aux mesures convexes.

✓ Notons que la cohérence est stable par combinaison convexe i.e. toute combinaison convexe de mesures de risques cohérentes est une mesure de risque cohérente.

✓ Un lecteur avisé pourrait remarquer que la définition de mesure convexe de risque est analogue à celle d'une fonction d'utilité. C'est une des raisons pour laquelle le sujet s'est développé aussi rapidement, plusieurs énoncés étant duaux à ceux de la théorie de l'utilité.

Axiomes de Cohérence

Nous expliquerons maintenant chaque axiome à leur tour :

La sous additivité :

C'est l'axiome le plus important elle peut être interprété comme la diversification pour ne pas accroitre les risques, parce qu'elle assure qu'une mesure cohérente de risque prend dans la diversification de portefeuille. Elle a une interprétions facile ; La mesure de risque d'une somme de deux portefeuilles est inférieure à la somme des mesures de risque de ces deux portefeuilles. Ce résultat est du à la corrélation qui peut exister entres ces derniers.

Dans le cas contraire, cela impliquerait, par exemple, que pour diminuer le risque, il pourrait être commode de fractionner une compagnie (ou un portefeuille) en deux parties distinctes.

L'homogénéité positive :

Cet axiome est un cas limite de la propriété de sous additivité qui représente l'absence de diversification, elle s'assure que nous ne pouvons pas augmenter ou diminuer le risque en investissant des montants ; en d'autres termes ; le risque résulte des provisions elle-même et n'est pas une fonction de la quantité achetée (note : ceci suppose que nous n'avons aucun risque de liquidité mais en réalité ce n'est pas vrai).

Les critères de sous additivité et homogénéité positive sont intuitivement évident du point de vue économique. En effet, en se rappelant qu'une v.a. X représente la perte par rapport à l'investissement dans un actif sans risque, il est clair que si une variable a une perte toujours moins grande qu'un autre investissement Y , alors ce dernier est nécessairement moins risqué.

La monotonie :

L'axiome de monotonie nous indique que nous associons un plus gros risque à une perte plus élevée i.e. si le portefeuille X domine le portefeuille Y , la mesure de risque du portefeuille X est supérieure à celle de Y. Ainsi, si le risque d'un portefeuille est supérieur à celui d'un autre, le capital requis pour le premier portefeuille est supérieur à celui requis pour le deuxième. Toute mesure de risque monotone et invariante par translation est $\mid \rho(X) - \rho(Y) \mid \leq \| X - Y \|_\infty$ pour la norme infinie $\| \cdot \|_\infty$.

L'invariance par translation :

L'axiome d'invariance par translation peut être expliquée par le fait que l'investissement dans un lien plus risqué ne soutient aucune perte avec la probabilité 1. Par conséquent nous devons toujours recevoir la quantité initiale investie. L'investissement initial est soustrait parce que le risque mesure la perte de mesure comme quantité positive, par conséquent un gain est négatif. La propriété d'invariance par translation signifie que l'addition (ou la soustraction) d'un montant initial sûr c au portefeuille initial et son investissement dans l'actif de référence décroît (accroît) simplement la mesure de risque ρ par c.

2.2.5 Mesures Alternatives à la VaR

Comme alternatives à la VaR, il existe dans le littérature financière différentes mesures qui définissent le risque comme la moyenne de la queue de distribution des profits/pertes *(TCE, ES, CVaR,...)*. Ces différentes mesures fournissent le même niveau de risque dans le cas d'une distribution sous-jacente continue.

TCE

Artzner et al. (1999) ont proposé une mesure de risque appelée la Tail Conditional Expectation (CTE) qui est à la fois cohérent et mesurant la pert au-delà de la VaR ;

$$TCE(X) = -E[X \diagup X \leq -VaR(X)]$$

Dans le cas d'un saut en $x = -VaR(X)$, i.e $P(X = -VaR(X))$ positive, l'intervalle $]\infty, -VaR(X)]$ a une probabilité de γ^+ qui est supérieure à la probabilité $(1-\alpha)$ sélectionnée pour la mesure de risque.

Cette mesure de la perte moyenne de la queue de distribution est parfois appelée Expected Shortfall (ES) ou Conditional VaR (CVaR). Cette multitude des noms donnés à cette mesure traduit le problème de la discontinuité de la distribution empirique. Dans ce cas, ces mesures aboutissent à des résultats différents.

ES

Acerbi et Tasch (2001) montrent que la CTE ne stisfait pas généralement la propriété de sous-additivité dans le cas d'une distribution discontinuité. Ils proposent l'ES (Expected Shortfall) comme mesure cohérente définie par :

$$ES(X) = -E[X \diagup X \langle -VaR(X)]$$

Toutefois, cette mesure est définie sur l'intervalle $]\infty, -VaR(X)]$ qui a une probabilité égale à γ^- et qui est inférieure à $(1-\alpha)$.

CVaR

Conditional *VaR* proposée par *Rockafellar et Uryasev (2001)* est définie en terme de la VaR et de l'ES pour donner une mesure définie exactement sur l'intervalle $(1-\alpha)$ et qui satisfait l'ensemble des propriétés de cohérence définies par *Artzner et al (1999) :*

$$CVaR(X) = \lambda(x)VaR(x) + (1 - \lambda(x))ES(x),$$

et

$$\lambda(x) = \frac{\gamma - \gamma^-}{1-\alpha}$$

2.2.6 Mesures Spectrales de risque

Définition 2.8. *(Mesure Spectrale)*

Soit (Ω, F) un espace mesurable, c'est à dire un ensemble Ω muni d'une tribu F. Une mesure spectrale ; aussi application Φ définie sur l'algèbre M des fonctions complexe mesurable bornées sur Ω ayant les propriétés suivants :

1. *Φ est un homorphisme involutif de l'algèbre involutive des opérateurs bornés dans un espace hilbertien H.*

2. *Si* $\xi \in H$, *alors la fonction d'ensemble* $\upsilon(E) = \langle \varphi(E)\, \xi / \xi \rangle$ *est une mesure a valeurs complexes.*

Propriétés 2.2.

1. *La positivité :* Un élément $\varPhi \in L^1([0,1])$ est dit "positif" si :

$$\forall I \subset [0,1], \int_I \Phi(p)\, dp \geq 0.$$

2. *La décroissance :* On dit $\varPhi \in L^1([0,1])$ est décroissance si pour tous $x \in]0,1[$ et $h \rangle 0$, on a :

$$\int_{x-h}^{x} \Phi(p)\, dp \geq \int_{x}^{x+h} \Phi(p)\, dp.$$

3. *La normalisation :* On dit que $\varPhi \in L^1([0,1])$ est normalisée, si :

$$\int_0^1 \Phi(p)\, dp = 1.$$

2.2.7 Exemples des Mesures Spectrales de Risque

Proportionl Hazards Transform(PHT)

La mesure PHT est définie par la fonction de distorsion

$$g(s) = s^r$$

Ou de façon équivalente, puisque la fonction g est dérivable, par fonction

$$\Psi(s) = r(1-s)^{r-1}$$

Et est donc donné par :

$$\begin{aligned} PHT(F,r) &= \int_0^{\infty} [1-F(u)]^r du \\ &= r\int_0^1 F^{-1}(t)(1-t)^{r-1} dt. \end{aligned}$$

Wang Transform(WT)

Pour la mesure WT de la fonction de distorsion

$$g(x) = \Phi(\Phi^{-1}(s) + \lambda)$$

Est aussi différentiable, par conséquent, la mesure peut être définie soit par la fonction g ou

$$\Psi(s) = e^{\lambda\Phi^{-1}(t) - \lambda^2/2}$$

Et est donnée par :

$$\begin{aligned} WT(F, \lambda) &= \int_0^{\infty} \Phi(\Phi^{-1}(1 - F(u)) + \lambda) du \\ &= \int_0^1 F^{-1}(t) e^{\lambda\Phi^{-1}(t) - \lambda^2/2} dt, \end{aligned}$$

où Φ et Φ^{-1}, respectivement, indiquent la fonction de répartition cdf et l'inverse de la distribution normale standar, et le paramètre λ reflète le niveau de risque systématrique et s'appelle le prix de marché du risque. La fonction distorsion

$$g(s) = \Phi(\Phi^{-1}(s) + \lambda)$$

a été présenté par *Wang (2000,2002)* comme un outil de tarification à la fois le passif (les pertes d'assurance) et le (gains) des rendements d'actifs et, par conséquent, est valable sur intervalle $] - \infty, +\infty[$.

La gestion des risques ne peut pas s'appuyer sur une seule mesure de risque. Chaque mesure de risque offre ses propres avantage et inconvénients. A l'instar de ce qui est acquis dans la réglementation, la *VaR* peut être combinée avec le teste stress et d'autres mesures de risque extrêmes. Une autre approche consiste à combiner la *VaR* avec l'*ES* (ou *TCE* et *CVaR*) pour avoir toutes informations concernant la perte potentielle et la perte moyenne au-delà du niveau de confiance. En assurance par exemple, la *VaR* peut être utilisée pour le sinistres "courants" et *l'ES* pour les sinistres rares (queue de distribution épaisse). A proposé la théorie des mesures spectrales de risque qui appartiennent à la famille des mesures de risque cohérentes.

Chapitre 3

Estimation des mesures de risque

3.1 VaR comme exemple

La value-at-Risk est la perte maximale espérée sur un certain horizon et avec un certain niveau de confiance prédéfini.

Nôtres données représentent des rendements journalières pour indices boursiers, nous avons prendre par exemple le *CAC40*

Les rendements logarithmiques (CAC40)

Définition 3.1.*(CAC40)*

L'indice CAC40 est un indice pondéré par la capitalisation flottante1, mesurant l'évolution de la performance de 40 valeurs admises à la cote du marché réglementé d'Euronext Paris.

Objet de l'indice *CAC40*

L'indice *CAC40* a pour vocation de représenter l'évolution du marché Euronext Paris. Composé de valeurs très liquides choisies parmi les 100 premières capitalisations admises à la cote du marché réglementé d'Euronext Paris, le *CAC40* est un instrument adapté aux produits des marchés dérivés et à la gestion de portefeuille.

Évolution de l'indice *CAC40*

Le tableau ci-dessus représente les cinq plus grandes capitalisations boursières composant le *CAC40* au 15 novembre 2006.

Les capitalisations boursieres	En millions d'euros
Total	137006
EDF	90744
Sanofi	90139
BNP	78578
AXA	62791
Volume Quotidien Moyen en 2006	3500

TAB.3.1- Les cinq plus grands capitalisation boursières

Quelques entreprises du *CAC40* :

Schneider Electric, Société générale, Thomson, Total, EDF, Sanofi, Total, Vinci, Sanofi-Aventis, Suez, STMicroelectronics, Veolia Environnement, AXA, Alcatel, Danone, BNP Paribas...

Exemple :

Alcatel :

FIG.3.1- Logo de l'entrepris Alcatel

› Alcatel est un ancien équipementier en télécommunication qui a fusionné avec Lucent Technologies pour devenir Alcatel-Lucent.

›Dates clés :

1. 1898 Création d'Alcatel.

2. 1982 Nationalisation.

3. 1987 Privatisation.

›Alcatel est leader mondial du marché des équipements d'accès DSL et dans les réseaux optiques. C'est aussi un des leaders mondiaux dans la fourniture de commutateurs téléphoniques, des routeurs ATM et IP, des câbles de transmission sous-marins, de l'infrastructure mobile (GSM, GPRS, UMTS), des applications de réseaux intelligents, des applications de Centre d'Appel, des applications vidéo (fixe et mobile) ainsi que des satellites et des charges embarquées.

›Alcatel fournit aussi des services à tous ses clients depuis la conception de réseaux jusqu'à l'exploitation de ceux-ci en passant par le déploiement, l'intégration et l'installation.

› Avec un chiffre de 13.1 milliards d'euros en 2005, Alcatel est présent dans plus de 130 pays.

›L'actuel PDG (2006) est Serge Tchuruk.

›L'action Alcatel a fait partie du *CAC40*.

Des faits stylisés du *CAC40*

FIG.3.2- Prix des série financiere CAC40

Le rendement des capitaux présent les croissances quotidiennes du logarithme du prix, c'est le gain relatif (ou la perte). il est donc intéressant pour l'investisseur qui le prix il même, parce qu'il lui permet de déterminer les bénéfices qu'il peut réaliser. Il est définit comme suit :

Définition (Le rendement d'un actif financier)

Le rendement journalier (hebdomadaire, mensuel,...) d'un actif financier est définin comme suit :

$$R_t = \log \frac{P_t}{P_t - 1}, \ t\rangle 0$$

Là où P_t indique le cours financier à l'instant t.

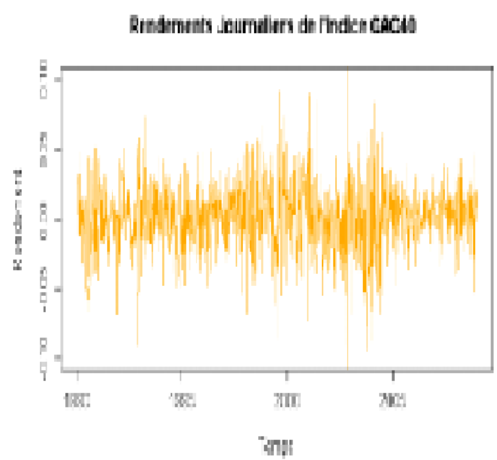

FIG.3.3- Série de rendement de CAC40

Pour mesurer les variations d'amplitude d'une action d'un marché nous employons la volatilité comme mesure d'instabilité au-dessus d'un actif financier. Ce paramètre mesurant le risque d'exécution et de prix. La volatilité est également employée pour timiser les calculs pour les portefeuilles diversifiés des actifs financiers.Ce phénomène, que nous appelons le "heteroskedastique conditionnel" est particulièrement commun dans des données de la bourse, des cours du change ou d'autres prix déterminés sur les marchés des capitaux :

	CAC40
Min	-0.1213
Max	0.1103
Moyenne	0.0012
Variance	0.0007
Ecart-type	0.0271
Kurtosis	4.03
Skewness	-0.14

TAB.3.2- Statistique de série de rendement

Dans cette table et selon la figure (FIG.3.3) qui représente le graphique des rendements du futur index, nous notons que le skewness est inférieur à 0, signifie que la distribution de densité des rendements s'est écarte vers la gauche. Cette observation est confirmée par l'aspect du graphique. Ainsi, nous pouvons dire que la distribution des rendements du futur index a une asymétrie négative. De même manière, nous constatons que le kurtosis, qui est dans notre cas intensivement supérieur à 3. Nous sommes donc confrontés avec le cas d'une distribution sensiblement leptokurtic, il a des queues épaisses comparées à celle du distribution normale. Beaucoup de techniques dans les finances modernes se fondent fortement sur l'hypothèse que les v.a financières suivent une distribution gaussienne. Cependant, les séries chronologique observées dans les finances-mais également dans d'autres applications-dévier souvent du modèle gaussien, du fait leurs distributions marginales sont a queues lourdes et, probablement tout asymétrique comme il est semblé dans le graphique suivant :

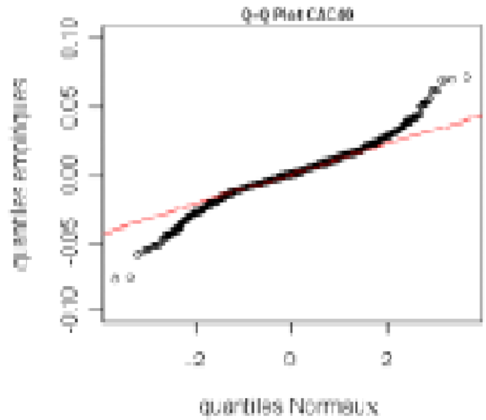

FIG.3.4- Test graphique de la normalite de série de rendement

Le premier modèle de *Benoît Mandelbrot* traite uniquement des discontinuités et fait l'hypothèse que les données sont indépendantes. Nous avons montré la présence non négligeable des grandes fluctuations des prix et l'existence d'une valeur de Kurtosis très supérieure à 3, il faut donc travailles avec une loi qui a queues de distribution lourdes. De plus, la variance ne se stabilise pas. Etant donné que quel que soit la taille de l'échantillon la variance continue à varier considérablement, il est impossible d'estimer cette variance, pour ces raisons (et d'autres que nous verrons au fur et à mesure), *Benoît Mandelbrot* utilise les lois stables.

Lois Lévy-stables

Les Lois Pareto-stable, appelées aussi *Lévy-stables* ou tout simplement lois stables, ont été introduies par Paul *lévy* en 1924 (*lévy*). Les définitions et propriétés énoncées dans ce chapitre sont issues de Janicki et Weron et de Samorodnitsky et Taqqu.

Définition 3.2.

Soit une suite de variables aléatoires réelles $(Y_n)_{n\rangle 0}$ indépendantes et identiquement distribuée de loi L. La loi de probabilité L sur $\mathbb{R}$ est dite stable s'il existe deux fonction réelles A et B avec A fonction positive telle que : $\frac{Y_1+....+Y_n}{A(n)} + B(n)$ ait la même distribution que chacun des Y_i

Dans le cas où la Loi normale, cette définition correspond au théorème central limite.

Définition 3.3.

La variable aléatoire réelle Y est de loi stable de paramètres α, β ,σ et μ que l'on note $Y \equiv S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$,où$0\langle\alpha \leq 2, -1 \leq \beta \leq 1, \mu$ réel, si sa fonction caractéristique est de la forme :

$\Psi_Y(t) = \exp[-\sigma^2 \mid t \mid^\alpha (1 - i\beta.sign(t).tg(\frac{\pi\alpha}{2}) + i\mu.t]$ si $\alpha \neq 1$,

$\Psi_Y(t) = \exp[-\sigma \mid t \mid .(1 + \frac{2}{\pi}i\beta.sign(t).\ln \mid t \mid) + i\mu.t]$ si $\alpha = 1$.

où

$$sign(t) = \begin{cases} 1 \text{ quand } t\rangle 0 \\ 0 \text{ quand } t = 0 \\ -1 \text{ quand } t\langle 0 \end{cases}$$

Les lois stables sont intéressantes car elles ne sont pas trop compliquées. En effet, il suffit de quatre paramètres pour les connaître complètement.

Le principal inconvénient est que les densités des lois stables sont inconnues sauf dans trois cas :

1. La distribution gaussienne $S_2(0, \sigma, \mu)$ où $f(x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{4\sigma^2})$.
2. La distribution de Cauchy $S_1(0, \sigma, \mu)$ où $f(x) = \frac{2\sigma}{\pi((x-\mu)^2+4\sigma^2)}$.
3. La distribution des Lévy $S_{\frac{1}{2}}(0, \sigma, \mu)$ où $f(x) = (\frac{\sigma}{2\pi})^{\frac{1}{2}} (x-\mu)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\sigma}{2(x-\mu)}\right) \times 1_{]\mu,+\infty[}$ avec 1 fonction indicatrice.

Mais, depuis l'implantation de la transformée de Fourier rapide (Fast Fourier Transform), les densités stables sont faciles à calculer. Nous pouvons approcher par cette méthode la densité :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \Psi_X(t) dt.$$

Générateur de variables aléatoires stables

Le premier pas été fait par Kanter (1975), qui a donné la méthode directe pour simuler $S_{\alpha\langle 1}(1, 0, 1)$. L'algorithme de Chambers, Mallows et Stuck (1976), nous a permis de générer une loi $S_\alpha(\beta,1,0)$, et pour obtenir une loi $S_\alpha(\beta,\sigma,\mu)$, il suffit de faire une changement de variables

Première étape :

Elle consiste à générer une loi Φ uniforme sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et une loi W exponentielle de paramètre 1.Pour cela, il faut d'abord générer deux variables aléatoires réelles uniformes sur]0 ;1[(notées U_1, U_2). Puis, en utilisant le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} \Phi &= \pi U_1 - \frac{\pi}{2}. \\ W &= -\log(1-U_2). \end{aligned}$$

Deuxième étape :

Elle consiste à calculer des différentes quantités (en fonction de Φ et de W).

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 1-\alpha \\ a &= \tan(\frac{\Phi}{2}) \\ b &= \tan(\frac{\varepsilon\Phi}{2}) \\ \tau &= -\varepsilon\tan(\alpha\Phi_0) \\ B &= \frac{b}{\frac{\varepsilon\Phi}{2}} \\ z &= \frac{\cos(\varepsilon\Phi)-\tan(\alpha\Phi_0)\sin(\varepsilon\Phi)}{W\cos(\Phi)} \\ d &= \frac{z^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}-1}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Troisième étape :

Elle consiste à générer une loi Y stable $S_\alpha(\beta;1;0)$. Pour obtenir cela, il faut utiliser la proposition suivante :

Proposition 3.1.

Soit Φ une loi uniforme sur$]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et W une loi exponentielle de paramètre 1.
Pour $\alpha = 1$:

$$Y = \frac{2}{\pi}\left((\frac{\pi}{2} + \beta\Phi)\tan(\Phi) - \beta \log\left(\frac{\frac{\pi}{2} W \cos(\Phi)}{\frac{\pi}{2} + \beta\Phi} \right) \right).$$

Pour $\alpha \neq 1$:

$$Y = \left(\frac{\sin(\alpha(\Phi - \Phi_0))}{(\cos(\Phi))^{\frac{1}{\alpha}}} \right) \left(\frac{\cos(\Phi - \alpha(\Phi - \Phi_0))}{W} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

où

$$\Phi_0 = \left(\frac{\pi\beta}{2} \right) \left(\frac{1- \mid 1 - \alpha \mid}{\alpha} \right)$$

Alors la variable aléatoire Y suit une loi $S_\alpha(\beta, 1, 0)$.

Les figures qui suivent nous permettent de constater que le générateur de variables aléatoires stables choisi approche correctement la loi théorique.

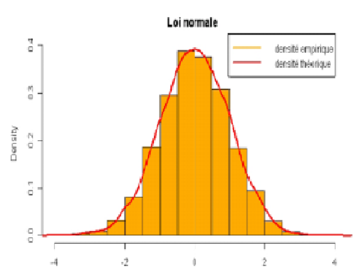

FIG.3.5- Densite d'une loi normale de paramètre $\alpha = 1.5, \beta = 0, \mu = 0$ et $\sigma = 1, n = 100$

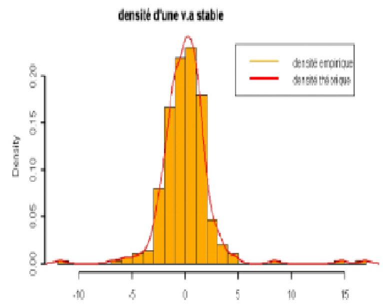

FIG.3.6- Distribution d'une loi stable de paramètre $\alpha = 1.5, \beta = 0, \sigma = 1$, et $\mu = 0$ pour $n = 1000$

Les propriétés d'une v.a qui suit la stable Maintenant nous faisons un rappel de quelques propriétés importantes des v.a stable de loi $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ que nous utiliserons dans la suite de ce mémoire.

Propriété 3.2. *(L'additivité)*

Soient X_1 et X_2 *deux v.a. indépendantes de loi stable* $S_\alpha(\beta_1, \sigma_1, \mu_1)$ *et* $S_\alpha(\beta_2, \sigma_2, \mu_2)$ *alors* $X_1 + X_2$ *suit une loi stable* $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$ *avec :*

$$\beta = \frac{\beta_1 \sigma_1^\alpha + \beta_2 \sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}, \ \sigma = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \ \mu = \mu_1 + \mu_2,$$

Notons que si $\beta_1 = \beta_2$ *alors* $\beta = \beta_1 = \beta_2$.

Cette propriété d'additivité est très intéressante en fiance, car deux titres ayant les mêmes valeurs des paramètres peuvent être considérés ensemble, et la loi qui résultera cette association conservera les mêmes valeurs du paramètre mais les autres paramètres seront modifiés.

Propriété 3.3. *(L'asymétrie)*

$X \overset{D}{=} S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$*est symétrique si et seulement si* $\beta = 0$ et $\mu = 0$. *Elle est trique environ si seulement environ* μ *si et seulement si* $\beta = 0$.

Propriété 3.4. *(Les moments)*

Soit X *une v.a. de loi* $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$ *avec* $\alpha \in]0, 2[$*alors :*

$$\mathbb{E} \mid X|^p \langle p \quad si \quad p \in]0, a[,$$
$$\mathbb{E} \mid X|^p = \infty \quad si \quad p \in]a, \infty[,$$

si $\alpha \in]1, 2[$ *alors* $\mathbb{E}(X) = \mu$.

$0\langle\alpha \leq 1$	$1\langle\alpha \leq 2$	$\alpha = 2$
$\mathbb{E}(X) = \infty$	$\mathbb{E}(X) = \mu$	$\mathbb{E}(X) = \mu$
$Var(X) = \infty$	$Var(X) = \infty$	$Var(X) = 2\sigma^2$

TAB.3.3- Moments d'une v.a suivant une loi $\alpha -$ stable.

Cette classe des distributions ont des propriétés gentilles des queues lourdes :

Propriété 3.5. *(Queues lourdes des données financières)*

Soit X *une v.a. avec une fonction de distribution* F *qui appartient à la famille* $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$ *alors :*

$$G(x) := \Pr(\mid X \mid \leq x) = F(x) - F(-x), \ x \in \mathbb{R} \ \text{ pour } \alpha\rangle 1.$$

Samorodnitsky et Taqqu(1994) par exemple lui a montré, on voient, que G change régulièrement avec l'index de queue α et satisfait une condition d'équilibre de queue sachant :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - G(tx)}{1 - G(t)} = x^{-\alpha} \quad \text{pour tout} \quad x\rangle 0,$$

et

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - F(t)}{1 - G(t)} = p \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{F(-t)}{1 - G(t)} = 1 - p =: q.$$

avec $p := (\beta + 1)/2$.

Rappelons que nous disons que la variance est infinie pour signaler que la variance est instable. Comme nous ne pouvons pas lui attribuer une valeur pour une période donnée, nous préférons considérer que la variance n'existe pas.

L'estimation des mesures de risque

Les méthodes d'évaluation de la *Value-at-Risk* existantes sont les suivantes :

1. Estimation non-paramétrique

2. Estimation gaussienne.

3. Méthode basée sur l'estimation de l'épaisseur des queues en utilisant la méthode de Hill.

Estimation non-paramétrique

Cette méthode est la plus intuitive et la plus simple à utiliser. Elle repose sur l'hypothèse que les mouvements passés des prix de marchés reflètent les mouvements futurs. Il est donc possible de les extrapoler.

Nous classons les n derniers rendements observés $R_{t-1}, ..., R_{t-n}$ par ordre croissant : $R_{(1)}, ..., R_{(n)}$

Supposons que ces rendements sont indépendants et identiquement distribués de fonction de densité f et de fonction de répartition F. Alors quand n tend vers l'infini et si le rapport $p = \frac{k}{n}$ reste constant, $R(k)$ tend asymptotiquement vers une loi normale de moyenne $\xi = F^{-1}(p)$ et d'écart type $\frac{1}{f(\xi)}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

Dans ce cadre, $R_{(k)}$ peut être considérée comme une approximation du quantile $100 \times p\%$.

L'avantage de cette méthode est que nous avons seulement fait l'hypothèse que les rendements sont indépendants et identiquement distribués. L'estimateur obtenu est asymptotiquement normal pour la plupart des distributions utilisé es en finance. L'inconvé nient principal est que le rang des quantiles que l'on peut estimer sont limités : nous ne pouvons pas calculer correctement un quantile $0,5\%$ avec 100 observations. De plus, estimer la *Value-at-Risk* de cette manière pour un portefeuille complexe peut s'avérer être long.

Estimation gaussienne

Nous adoptons une approche analytique. Nous pouvons calculer à partir des n dernières observations des rendements, la volatilité des rendements avec l'estimateur des moindres carrés.

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(R_{t-i} - \bar{R}_t\right)^2 \text{ où } \bar{R}_t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_{t-i}$$

Les quantiles peuvent être dé duit aisément à partir de l'approximation numérique de la fonction de distribution. L'hypothèse usuelle est la normalité des rendements R_{t-i} d'où le nom de cette méthode. Si les rendements des actifs du portefeuille suivent une loi normale, alors la perte maximale probable est :

$$VAR_t^{(n)} = E\left(R_p\right) + q_p \hat{\sigma}_t$$

où q_p est le quantile de la loi normale centrée réduite associé à la probabilité p, et $E\left(R_p\right)$ est le rendement moyen du portefeuille.

Méthode basée sur l'épaisseur des queues

Cette méthode est aussi appelée la méthode de Hill. Nous remplaçons dans cette méthode l'hypothèse gaussienne par l'hypothèse que les queues de distributions sont épaisses et vérifie $F(x) \simeq \frac{C}{|x|^\alpha}$ où $F(x)$ la fonction de répartition des rendements (queues de Pareto).

Soient $R_{(1)}, ..., R_{(n)}$ les n derniers rendements observés rangés par ordre croissant. Hill proposa en 1975 un estimateur de α pour des distributions avec des queues de Pareto :

$$\hat{\alpha}_{HILL} = \frac{1}{\frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m} \ln \mid R_{(i)} \mid - \ln \mid R_{(m+1)} \mid} \text{ où } m = \frac{1}{10}.$$

Notons $\hat{F}(x)$ la fonction de répartition de l'échantillon :

$$F(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{\left[R_{(i)} \leq x\right]}.$$

L'estimateur de la *Value-at-Risk* d'intervalle de confiance de niveau p est :

$$VAR_t^{(n)} = \exp\left(\frac{\ln(\hat{C}) - \ln(p)}{\hat{\alpha}}\right).$$

où $\ln(C) = \frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m} \ln(\hat{F}(R_{(i)})) + \hat{\alpha}\frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m} \ln \mid R_{(i)} \mid$.

L'estimateur de Hill est très utilisé pour estimer même si il n'est pas robuste lorsque les lois ne sont pas exactement stables comme l'a montré Gamrowski. Les résultats sont similaires que nous utilisions l'estimateur de Hill.

3.2 Comparaison des méthode dans la VaR

Nous comparons d'abord deux à deux les méthodes d'estimation de la *Value at Risk* pour différents niveaux de probabilité . Nous mesurons à chaque fois l'écart minimum, l'écart maximum, la moyenne des écarts et l'écart médian. Nous travaillons entre le 19 juillet 1988 et le 6 septembre 2001 sur 3279 observations. Les résultats sont regroupés dans les tableaux suivants. La notation Hill désigne la méthode basée sur l'épaisseur des queues de distribution (méthode de Hill), Gauss représente la méthode gaussienne et NP annonce la méthode d'estimation non-paramétrique.

	Hill/Gauss	Hill/NP	NP/Gauss
Minimum	-0.63	-0.48	-0.55
Médiane	-0.17	-0.09	-0.10
Maximum	0.27	0.16	0.55
Moyenne	-0.16	-0.11	-0.05

TAB.3.4- Statistiques sur écarts entre les méthodes avec $p = 5\%$

Les méthodes les plus similaires sont la méthode de Hill et la méthode non paramétrique.

Nous pouvons mieux visualiser les divergences entre les méthodes en dessinant des box-plots. Le box-plot permet de visualiser les traits caractéristiques d'une distribution. La boîte représente 50% des données, plus la boîte est grande et plus les données sont dispersées. La position de la médiane fournit une indication sur la symétrie. Plus la médiane est centré e dans la boîte et plus les données sont symétriques. Le rapport de la longueur des "moustaches" du box-plot est une autre indication de la symétrie. Deux "moustaches" de même taille est une indication de symétrie pour les queues de distribution. La quantité de données en dehors de l'intervalle interquartiles fournit une indication sur la taille des queues de distributions. Plus la queue de distribution est importante, plus il y aura de valeurs extrêmes associées au box-plot.

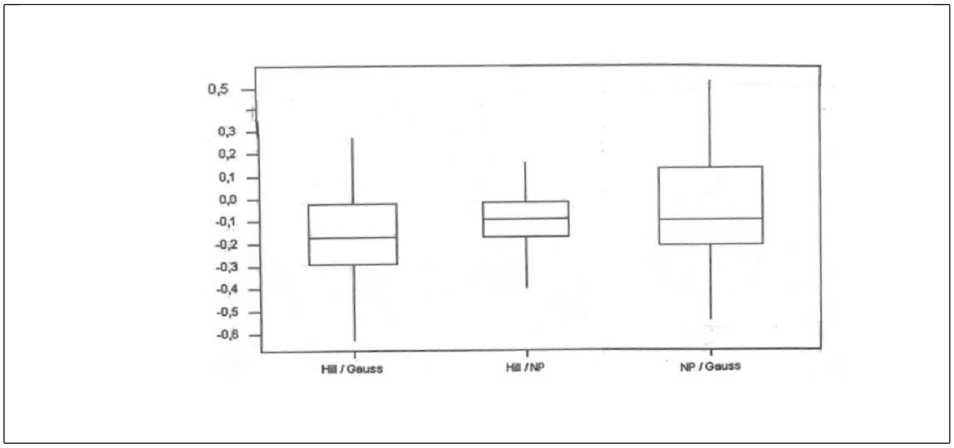

FIG.3.7-Box plots des écarts entre les méthodes pour $p = 5\%$

Lorsque p vaut 5%, les méthodes les plus proches sont la méthode de Hill et la méthode non-paramétrique. En effet, la différence entre les *Value at Risk* estimée avec chacune de ces méthodes ont une distribution avec des queues peu épaisses et l'intervalle interquartile correspondant à leur distribution est le plus faible des trois intervalles interquartile calculés.

	Hill/Gauss	Hill/NP	NP/Gauss
Minimum	-0.55	-2.34	-0.45
Médiane	0.71	0.50	0.54
Maximum	2.68	1.99	3.70
Moyenne	0.86	0.12	0.74

TAB.3.5- Statistiques sur les écarts entre les méthodes avec $p = 1\%$

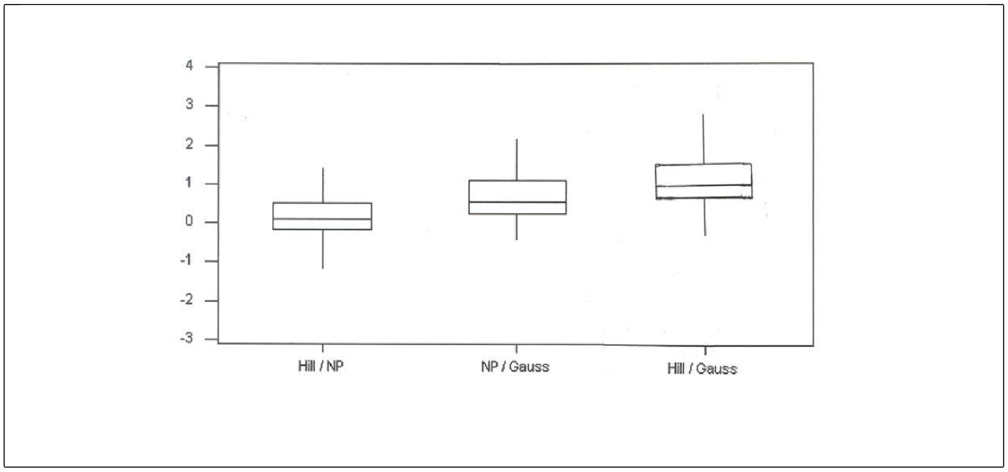

FIG.3.8-Box plots des écarts entre les méthode pour $p = 1\%$

Chaque boîte a à peu près la même hauteur, cependant la boîte correspondant aux écarts des *Value-at-Risk* estimé es avec la méthode de Hill et avec la méthode non-paramétrique est la moins épaisses. Cette distribution est aussi la distribution la plus symétrique et la plus centrée autours de 0. Les distributions des écarts NP/Gauss et Hill/Gauss sont centrées autours d'une valeur strictement positive. Ceci signifie que la méthode non-paramétrique et la méthode de Hill fournissent en général une valeur estimée de la *Value-at-Risk* supérieure à la valeur de la *Value-at-Risk* estimée avec la méthode gaussienne.

	Hill/Gauss	Hill/NP	NP/Gauss
Minimum	-0.55	-5.34	-0.54
Médiane	1.58	0.39	1.29
Maximum	5.58	2.97	6.94
Moyenne	1.88	0.44	1.85

TAB.3.6- Statistiques sur écarts entre les méthodes avec $p = 0.5\%$

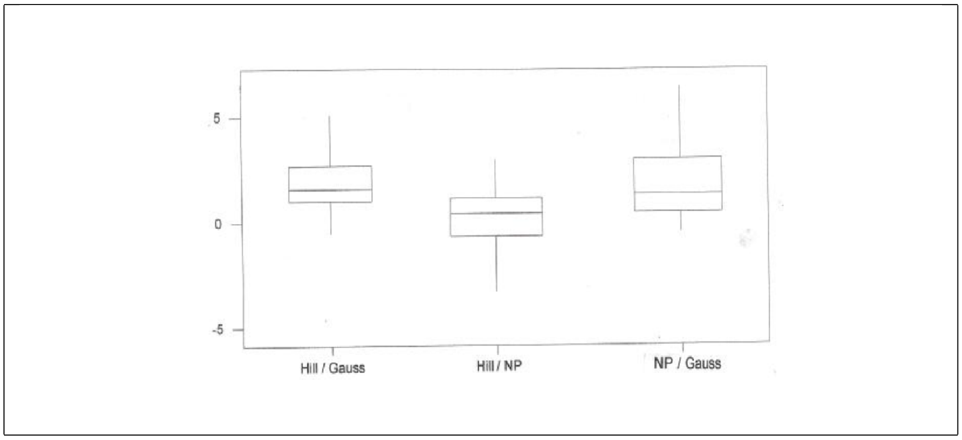

FIG.3.9-Box plots des écarts entre les méthodes pour $p = 0.5\%$

De même pour une probabilité de perte $p = 0.5\%$, les méthodes donnant les résultats les plus proches sont la méthode de Hill et la méthode non-paramétrique. Nous constatons encore que la méthode non-paramétrique et la méthode de Hill fournissent en général une valeur estimée de la *Value-at-Risk* supérieure à la valeur de la *Value-at-Risk* estimée avec la méthode gaussienne.

D'après les études précédentes [**L'analyse fractale des marchés financiers**]. Nous avons de lui observées que la VaR est mieux adaptée que σ pour mesurer le risque de marché, et ce pour deux raisons principales : le risque financier est un risque de pertes et non de gains, et les tests empiriques ont démontré que la modélisation gaussienne des rendements des actifs, à laquelle la volatilité est fortement liée, ne permettait pas de tenir compte des Variations extrêmes. Par ailleurs, une analyse plus approfondie des marchés d'actions dans le monde a permis de mettre en évidence des différences de comportements statistiques entre les marchés financiers développés et les marchés financiers dits émergents.

Conclusions

La gestion du risque prend une part importante (et de plus en plus prépondérante) dans la gestion d'un établissement financier. Un certain nombre de risque peuvent être qualifiés de "risques extrêmes", car ils présentent une probabilité d'occurrence très faible (ou un temps de retour très élevé). Ils correspondent à des événements rares. A première vue, nous pouvons penser que la théorie des extrêmes va permettre de modéliser ces types d'événements. En fait, il faut être très prudent avec cette théorie. Dans de nombreux cas, l'estimation est fortement instable (même si certaine auteurs prétendent le contraire). La théorie des extrêmes n'est donc pas une méthode miracle pour mesure le risque de ces événements rares.

La variance infinie ne représente pas un obstacle à la compréhension du phénomène dans lequel apparaissent des grands changements de prix, mais au contraire, elle permet d'expliquer ce phénomène. Supposons que X soit la somme des variables Lévy-stables X_i ; il est probable que la valeur x de X provienne en partie substantielle du plus grand des x_i. Les queues de distributions sont porteuses d'informations essentielles, il ne faut donc pas les négliger comme on le fait malheureusement en considérant la loi des Gauss. Nous allons voir dans ce mémoire que le problème des grands changements des variables financières semble être résolu avec l'utilisation des lois stables à variance infinie pour trouver un estimateur plus robuste aux mesures des risques financiers via la théorie des valeurs extrêmes.

Bibliographie

[1] AUBRY.H. et LOTFI.B.(Janvier 1999) ; Au delà de la VaR, vers une nouvelle mesure du risque en gestion de portefeuille. Rapport de recherche.

[2] BENBRAIKA.Gh.(2009) ; Dependance des risques et application. Mémoire de Magistère (Universite Biskra).

[3] Danial.H.(17 juin 2011) ; Value at Risk-étude de Cas.

[4] DAVID.C. et JEAN.M.(2004) ; Couple et dépendances : application pratique à la détermination du besion en fonds propres d'un assureur non vie. Instilut de Actuaires, Paris.

[5] DEHOVE.M.(September 2001) ; Cours le marché financier, institutions et théorie de la monnaie.

[6] Estelle.A.(2000-2001) ; L'analyse fractale des marchés financiérs. Stage effectué à Finama Asset Management.

[7] HECHAM et HAKIM. (juin 2006) ; La modelisation des séries financieres. Mémoire d'ingénieur.

[8] MATHLOUHI.I.et ZENAIDAI.A.Théorie des valeurs extrême va. Méthodes classiques de calcul de la VaR : Application au Tunindex.

[9] OUAAR.F. (Mai 2010) ; Estimation empirique de la mesure sepctrale des risques financiers. Mémoire de Magistère (Universite Biskra).

[10] Roncllai.T ; Théorie des valeurs estrême ou Modélisation des Evénements Rares pour Gestion des Risques. DESS 203 de l'Université Paris IX Dauphine Marchés financiers, Marchés de Matières Premières et Gestion des Risques.

[11] http ://Régles de l'indice CAC40.(Janvier 2009).

[12] http ://www-chip-leaders.com/winamax-le-poker-100-friancais-dinige-par-des-pros/.

[13] http ://validator.w3.org/check ?uri=referer.

[14] http ://www/finance. etudiant.fr/.../Microstructures-et-Marchés Financiers-19

[15] http ://www.doc-etudiant.fr> Documents> Commerce> Economie. Les differents types de marchés financier-86387.

[16] http ://www.fineprint.com

[17] http ://www.wikipédia.com

Résumé : Ce travail a pour objectif initial de découvrir et comprendre le fonctionnement des mesures de risque, en particulier dans le domaine de la finance. Nous donnons dans un premier temps les définitions et les propriétés d'un marché financier. Nous exposons ensuite les différentes mesures de risque traditionnelles et actuelles pour couvrir les risques d'un marché selon le modèle proposé. Nous critiquons, pour finir ce mémoire, quelques méthodes d'estimation de la mesure VaR.

Mots clé : marché financier, risque financier, mesure de risque, cohérence,$\alpha-$stable, queue lourde.