### **République Algérienne Démocratique et Populaire**

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

### UNIVERSITE MOHAMED KHIDER BISKRA

### Faculté des Sciences et de la Technologie

### Département Génie Mécanique

PROJET DE FIN DE CYCLE POUR L'OBTENTION DU

### **DIPLOME DE MASTER**

### En Génie Mécanique

Option: systèmes énergétiques et développement durable

# THEME

## ETUDE DE L'INFLUENCE DES MODELES DE VISCOSITE SUR LA SIMULATION DU REMPLISSAGE DES MOULES

### Etudiant

TAMMA Abdel Ghani

### Encadreur

Pr. HECINI Mabrouk

**Promotion : Juin 2012** 

# Remerciements

Je remercie Dieu tout puissant clément et miséricordieux de m'avoir soigné et aidé.

Je tiens, avant tout, à exprimer ma profonde gratitude à monsieur **HECINI Mabrouk**, Professeur au département de Génie Mécanique de l'Université Mohamed Khider Biskra, qui a assumé la direction de ce travail. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma reconnaissance pour son dévouement, sa patience, sa disponibilité, ses conseils et son aide constant qu'il m'a apporté tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier tout particulièrement le Mr. Salah hommadi, pour ses nombreux conseils concernant la partie numérique.

Je remercie vivement le Mr. Md Taher MANSOURI qui nous donne l'aide et nous encourage pour terminer ce travail.

Je remercie vivement le membre du jury pour avoir bien vouloir accepter de faire partie du jury de soutenance. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma gratitude.

J'adresse mes vífs remerciements à tous les enseignants qui par leur enseignement, leur encouragement et leur aide ont contribués à ma formation durant toutes mes études à l'Université de Mohamed Khider Biskra.

Je tiens également à remercier tous mes collègues d'études pour leurs soutiens et leur motivation.

Que tous mes amís sans exception, ils sont nombreux, je ne peux tous les citer mais je ne les oublie.

*Enfin, que toutes les personnes ayant contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail, soient chaleureusement remerciées.* 

# Dédicace

Je dédie ce travail à ma mère et mon père pour ses encouragements et ses prières tout au long de mes études, et nous plantent l'amour de science.

Je le dédie à mes frères et sœurs, et je les remercie pour leurs encouragements et leurs aides ainsi que toute ma grande famille.

A tous mes amis sans citer les noms.

Somm	naira
Somm	Iane

Remerciem	ents	
Dédicace		
Sommaire.		i
Introduction	n générale	. 1
	Chapitre 1 : Généralités	
1.1.	Généralités sur les polymères	.4
1.1.1.	Définition d'un polymère	.4
1.2.	Mise en forme des matières plastiques	5
1.2.1.	Moulage par injection	5
1.2.2.	Description d'une presse à injecter	6
1.2.3.	Le cycle de moulage par injection	8
1.2.4.	Mise en œuvre de la phase d'injection (remplissage)	9
1.2.5.	Etat du polymère dans le moule	11
1.2.5.1.	Thermique	11
1.2.5.2.	Écoulement du polymère dans le moule	12
	Chapitre 2 : Comportement rhéologique des polymères	
2.1.	Introduction	15
2.2.	Notions générales sur la viscosité	15
2.3.	Viscosité : un phénomène physique	16
2.3.1.	Définition	16
2.3.2.	Unités et ordres de grandeur	17
2.3.3.	Importance de la nature du fluide et de l'écoulement	17
2.3.4.	Nature de l'écoulement	17
2.3.5.	Influence de la température et de la pression	18
2.4.	les différents modèles de viscosité	19
2.4.1.	modèle newtonien	19
2.4.2.	Modèle Pseudo-plastique	21
2.4.2.1.	Loi Ostwald – de Waele	21
2.4.2.2.	Loi de Cross	21
2.4.2.3.	Loi de Carreau-Yasuda	21
2.4.2.4.	Modèle d'Ellis	22
2.4.3.	Modèle Pseudo-plastique thermo-dépendant	23
2.4.3.1.	Loi de Williams, Landel et Ferry (WLF)	23
2.4.3.2.	Loi d'Arrhenius	24

2	2.4.3.3.	Variation de la viscosité en fonction du cisaillement et de la température couplés	24
2	2.4.3.4.	Variation de la viscosité en fonction de la pression	25
		Chapitre 3 : Modélisation du remplissage des moules	
3.1.		Introduction	27
3.2.		Principales hypothèses	27
3.3.		Modélisation de la phase du remplissage	28
3.3	3.1.	Formulations Mathématiques	28
3.3	3.2.	Modélisation de l'écoulement dans un moule plaque	29
3	3.3.2.1.	le champ de vitesse	30
3	3.3.2.2.	tenseur de contrainte	30
Э	3.3.2.3.	Calcul de l'évolution de la pression dans le moule	32
3.4.		Echange de chaleur entre matière plastique et le moule	32
3.4	4.1.	hypothèses de calcul	33
3.4	4.2.	résolution de l'équation de chaleur	33
3	3.4.2.1.	pour les nœuds internes	34
3	3.4.2.2.	pour les nœuds situés au milieu de la plaque	34
Э	3.4.2.3.	pour les nœuds situés à l'interface de la plaque et le moule	35
3	3.4.2.4.	pour les nœuds situés au seuil d'injection	36
3	3.4.2.5.	Température mélange	36
		Chapitre 4 : Programmation	
4.1.		Introduction	39
4.2.		L'organigramme détaille du programme	39
4.3	3.1.	Données du programme	40
4.3	3.2.	Résultats du programme	41
		Chapitre 5 : Etude et résultats	
5.1.		Etude d'un cas d'application	43
5.2.		les données et les résultats	43
5.2	2.1.	les données	43
5.2	2.2.	résultats numériques	45
5	5.2.2.1.	modèle newtonien	45
5	5.2.2.2.	Modèle Pseudo-plastique	46
5	5.2.2.3.	Modèle Pseudo-plastique thermo-dépendant	48
5.2	2.3.	Interprétation des graphes	49
5	5.2.3.1.	La pression à l'intérieure de la plaque (Fig. : 5-3, 5-7,5-11,5-15,4-19)	49
5	5.2.3.2.	Le champ de vitesse (Fig. : 5-2, 5-6,5-10,5-14,5-18)	50

5.2.3.3.	La température (Fig. : 5-4, 5-8,5-12,5-16,5-20)	50
5.2.4.	Comparaison entre les trois modèles	50
Conclusion	générale et perspective	51
<b>Références</b>	Bibliographiques	52

#### Introduction générale

Le moulage par injection est le procédé le plus utilisé pour l'élaboration en série des pièces en matière plastique. Il consiste à injecter de la matière fondue et chaude dans un moule froid. Ainsi le polymère subit des transformations thermomécaniques importantes qui conditionnent la qualité du produit fini.

La modélisation de l'état de la matière dans le moule apportera une aide considérable au mouliste durant la détermination des paramètres de moulage.

Le cycle de moulage par injection est habituellement divisé en trois phases, phase de remplissage, compactage, refroidissement.

Cette étude s'intéresse à la première phase de ce procédé, dite la phase de remplissage, qui est la phase dynamique de transfert de la matière à l'intérieur du moule.

La simulation de l'écoulement et le transfert de chaleur durant cette phase suppose que le polymère soit incompressible visqueux. La viscosité joue un rôle important dans l'écoulement dans cette phase car elle est dans ce cas très élevée  $(10^6 à 10^8 fois celle de l'eau)$ . La viscosité du matériau dépend fortement du taux de cisaillement et de la température.

Ce travail consiste à l'étude de l'influence des différents modèles de viscosité sur les résultats de simulation de la phase de remplissage d'un moule plaque.

La méthode de différence finis basée sur un discrétisation par contrôle sera utilisée pour la résolution de l'équation de la chaleur.

Cette modélisation sera programmée avec le logiciel MATLAB R2010.a. Ceci permettra de donner les valeurs des paramètres rhéologiques du polymère au cours et à la fin de remplissage d'une manière numérique et graphique.

#### Le plan de travail est le suivant :

Chapitre I : Généralités

Ce chapitre présente en bref les structures des polymères et les procédés de moulage des matières plastiques.

Chapitre II : Comportement rhéologique du polymère

Vu la grande influence de la viscosité sur l'écoulement du polymère dans le moule, et on présente les modèles mathématiques décrivant la viscosité avec les consistances correspondantes. L'accent est mis sur le modèle newtonien, pseudo-plastique et le modèle pseudo-plastique thermo-dépendant. Chapitre III: Modélisation du remplissage

Ce chapitre présente les principes de la mécanique des milieux continus utilisés pour étudier les phénomènes de moulage. Il traite en détail les équations qu'on a utilisées pour déterminer les paramètres mécaniques et thermiques du moulage.

Chapitre IV : programmation

Ce chapitre présente l'organigramme général et détaillé du la programmation, ainsi que les paramètres d'entrée et de sortie du programme.

Le logiciel utilisé pour cette programmation est MATLAB version R2010.a

Chapitre IV : étude d'un cas

Ce chapitre présente une étude d'un cas d'application (plaque) dans un moule de forme rectangulaire avec des dimensions et données d'injection préalablement définies, suivre par des interprétations des résultats graphiques obtenus.

Enfin nous finissons notre mémoire par la conclusion et les perspectives.

## Chapitre 1

### Généralités

#### 1.1.Généralités sur les polymères

Les polymères, appelés communément 'matières plastiques', sont indissociables de notre environnement et de notre vie pratique. Ils se sont imposés dans tous les domaines de activités: des objets les plus banals jusqu'à des applications techniques sophistiquées, en passant par leur utilisation dans les produits d'hygiène ou alimentaires.

Le plus souvent synthétiques, quelquefois naturels, ils doivent cet essor à leurs larges gammes de caractéristiques, durs, mous ou élastiques, transparents ou opaques, isolants et quelquefois conducteurs, plus ou moins résistants aux conditions agressives de leur usage, toujours légers.

C'est la nature particulière de leurs molécules en forme de chaîne, ainsi que la variété des modes d'assemblage qu'elles adoptent, qui est à l'origine de cette diversité.

#### 1.1.1.Définition d'un polymère

Un polymère est une macromolécule, organique ou inorganique, constituée de l'enchaînement répété d'un même motif, le monomère (du grec monos: un seul ou une seule, et meros : partie), reliés les uns aux autres par des liaisons covalentes. Dans la macromolécule suivante .....A-A-A-A-A-A-A-A-A-I a [-A-]n l'unité constitutive est A ; elle est formée d'un groupe d'atomes qui se répète. A l'échelle moléculaire, quelques centaines de nm, la plupart des macromolécules se présentent sous forme de « fils long et souples ». Les réactions chimiques permettant de passer d'un monomère A à la macromolécule [ A-]n s'appellent polymérisation. Ainsi, l'éthylène CH2=CH2 (monomère) conduit par polymérisation par ouverture de la double liaison au polyéthylène (polymère) [-CH2-CH2-]n.

La macromolécule peut comporter jusqu'à 50 000 atomes de carbone, et pour de nombreux polymères commerciaux la masse molaire peut atteindre 1 000000 g.mol-1. Certaines macromolécules deviennent ainsi visibles à l'œil nu (matériaux réticulés par exemple). La synthèse d'un polymère peut être assimilée à un jeu de construction dans lequel on dispose de pièces élémentaires mono, dit fonctionnelles ou de fonctionnalité strictement supérieure à 2.

On appelle fonctionnalité le nombre de liaisons que la pièce est capable d'établir avec une autre pièce. Quand les motifs associés sont identiques, on parle d'homopolymère. Sinon, ce sont des copolymères : bi-polymères, ter-polymères sont les plus communs



Figure 1-1: La constitution d'un polymère [1]

#### 1.2. Mise en forme des matières plastiques

Depuis bien longtemps au niveau de l'industrie, on utilisait les matériaux organiques basés essentiellement sur la chimie du carbone, pour la construction des pièces dans plusieurs domaines. Depuis les années vingt, on a découvert un nouveau matériau macromolécules (polymère), qu'on utilise dans tout les domaines (mécanique, électronique, optique....). Mais la mise en forme des polymères n'est pas comme les autres anciens matériaux (fer, cuivre, acier,.....), cette mise en forme du polymère à plusieurs méthodes et techniques.

- Extrusion des thermoplastiques
- Extrusion soufflage
- Calandrage
- Thermoformage
- Compression-Transfert
- Injection des thermoplastiques
- Injection multipage des thermoplastiques
- Injection des thermoplastiques allégés
- Injection-soufflage
- Injection des thermodurcissables
- Moulage par rotation (roto moulage)

#### 1.2.1. Moulage par injection

Le moulage par injection est une technique de fabrication de pièces en grande ou très grande série. Il concerne avant tout les matières plastiques et les élastomères (caoutchoucs) mais aussi divers métaux et alliages à point de fusion relativement bas : alliages d'aluminium, de zinc (Zamak) ou encore laitons.

#### 1.2.2. Description d'une presse à injecter

Une presse à injecter, ou machine d'injection moulage, est constituée de deux unités principales : l'unité d'injection, ou de plastification, et l'unité de moulage (moule et système de fermeture) (Figure 1-2). Le plus souvent, les différences notables entre les types de machines concernent l'unité de plastification (Figure 1-3). Notons qu'il existe des presses verticales bien que les presses horizontales soient les plus fréquentes. Parmi ce type de machines, deux grands groupes se distinguent : les presses hydrauliques et les presses électriques. Elles présentent chacune des particularités plus ou moins intéressantes et adaptées certaines fabrications



#### Figure 1-2: Cylindre de plastification et moule

Les considérations essentielles à retenir dans le cas des thermoplastiques techniques sont les suivantes:

- Dessin approprié assurant la résistance nécessaire pour supporter les hautes pressions.

- Qualité correcte des matériaux de construction du moule, particulièrement dans le cas des résines renforcées.

- Dessin convenable des cheminements d'écoulement de la résine, pour son transfert vers la bonne localisation dans la pièce.

- Disposition suffisante d'évents, pour permettre l'évacuation de l'air en avant du front de matière pénétrant dans le moule.

- Transfert thermique soigneusement calculé pour contrôler le refroidissement et la solidification des pièces moulées.



Figure 1-3: Schéma d'une presse à injecter électrique à vis de plastification [4]

- Ejection facile et uniforme des pièces moulées.

Une machine d'injection moulage se caractérise généralement par sa capacité maximum d'injection et sa force de fermeture. La première caractéristique peut être donnée en masse de polystyrène standard ou en volume (cm3). La capacité d'injection réelle est comprise entre 30 et 70% de cette capacité maximale, ceci en fonction du comportement en phase fondue de la matière à transformer et des limites de sécurité machine (étape de compactage). La force de fermeture est généralement exprimée en tonne, et correspond à la force de fermeture maximum du moule que peut maintenir la presse avant, pendant et après le remplissage du moule par la matière fondue. Toutefois, de nombreux autres critères peuvent être précisés pour définir au mieux une presse à injecter. Ils sont d'autant plus importants qu'ils seront nécessaires au choix d'une machine parfaitement adaptée à une gamme d'objets à fabriquer : par exemple les distances entre plateaux et entre colonnes doivent être de dimensions compatibles avec celles du moule. (La Figure 1.3) montre les éléments essentiels d'une machine d'injection moulage. Parmi ces éléments, l'unité de plastification nous intéresse tout particulièrement dans le cas des bio-polymères. En effet, le rapport longueur / diamètre de la vis de plastification, la régulation thermique du fourreau et de la base de la trémie, la longueur et la géométrie de la buse d'injection sont autant de caractéristiques à prendre en compte pour la fusion de la matière sans dégradation de celle-ci.

La durée totale du cycle de moulage peut varier de deux secondes à plusieurs minutes, et concerner un nombre de pièces allant de l'unité à plusieurs dizaines, éjectées à chaque ouverture du moule. La rapidité du cycle de moulage peut se trouver restreinte par la capacité de transfert thermique du moule, sauf lorsque le temps d'ouverture – fermeture éjection ou la capacité de plastification de la machine sont limités.

Au départ le moule est fermé, la vis est reculée. Une certaine quantité de polymère fondu est accumulé en bout de vis (Figure 1-4) Le vérin fait avancer la vis qui pousse le polymère dans le moule et remplit la cavité moulante.





#### 1.2.3.Le cycle de moulage par injection

• Etape 1 (Figure 1-5-a): la phase de dosage. Les granulés de polymère tombent depuis ne trémie dans un ensemble vis-fourreau. Ils sont ensuite fondus progressivement par action conjuguée des colliers chauffant le fourreau, et du cisaillement de la matière provoqué par la rotation de la vis et la friction des granulés (entre eux et contre les outillages). La matière fondue est alors convoyée en avant de la vis (via un clapet antiretour), dans l'espace créé par le recul progressif de cette dernière lors de sa rotation.

#### • Etape 2 (Figure 1-5-b) :la phase d'injection.

Grâce à un mouvement de translation de la vis, actionnée par un vérin, et au clapet anti-retour qui dans cette phase empêche la matière de rebrousser chemin, le polymère fondu est transféré du réservoir à un moule via des canaux.

• Etape 3 (Figure 1-5-c): la phase de compactage. Le moule, composé de deux parties, une fixe et une mobile, est à ce moment tenu sous pression pour rester fermé, pendant que de son côté la matière est compactée par la vis, jusqu'à atteindre une pression uniforme dans la cavité du moule (également appelée empreinte), dans laquelle du polymère fondu continue à être injecté pour compenser le rétrécissement, ou retrait, de la matière qui refroidit.

• Etape 4 (Figure 1-5-d): la phase de refroidissement. Lorsque le polymère est entièrement figé au niveau du ou des seuils d'injection, il n'est plus nécessaire d'appliquer une pression de maintien, et la pièce continue de se refroidir jusqu'à ce qu'elle soit complètement solidifiée. La vis peut alors reprendre son cycle de rotation à l'étape 1.

• Etape 5 (Figure 1-5-e): la phase d'éjection. Le moule s'ouvre, et la pièce formée est éjectée du moule.

En ce qui concerne les thermoplastiques, la plupart d'entre eux, amorphes ou semi cristallins, peuvent être injectés, moyennant bien sûr des différences dans le procédé, en fonction du type de polymère, des dimensions et de la qualité recherchée des pièces.





#### 1.2.4. Mise en œuvre de la phase d'injection (remplissage)

Les considérations précédentes, même sommaires, nous montrent qu'au cours du remplissage du moule il se passe des phénomènes importants pour la qualité de la pièce et trop complexes pour vouloir les résoudre avec des moyens simples. Si nous regardons maintenant la part qu'occupent les équipements de réglage des paramètres sur une presse en termes de coût, nous voyons qu'il faut les rentabiliser au mieux.

Avant d'aborder la description proprement dite de la phase d'injection, il nous semble indispensable de rappeler sa définition de base pour qu'elle nous serve de guide dans le procédé de transformation des matières plastiques par injection, la **phase d'injection** consiste à établir les paramètres physiques suivants :

- Température du moule.

- température de la matière.

- vitesse de propagation de la matière en fonction de la course de la vis-piston.

- pression sur la matière en fonction du temps.

Les valeurs de ces paramètres doivent être établies pour que la matière, lors du remplissage du moule, ait un comportement optimal en fonction de la forme de l'empreinte, garantissant ainsi la qualité de la pièce.

La première opération consiste à mettre le moule à la bonne température. Pour des moules qui fabriquent des pièces techniques, cette température varie entre 70 et 120°C (exemple : polyamide, polycarbonate, ABS, polyoxyméthylène).

Pour des articles destinés à l'emballage ou à des tâches ménagères, ni la stabilité

dimensionnelle, ni le comportement à la fatigue ne présentent des exigences très strictes. On cherche un prix de fabrication faible, donc des cadences élevées; la température de ces moules peut varier entre 7 et 40 °C. [1]

La température de la matière varie selon sa nature. En règle générale, on retient que les matières amorphes ont une fourchette de réglage plus large que celle des polymères cristallins; les fabricants donnent toujours sur ce plan tous les renseignements.

La phase de remplissage elle-même comporte trois étapes :

- $\checkmark$  remplissage.
- $\checkmark$  pressurisation.
- $\checkmark$  compensation.

Ainsi le cycle de moulage par injection est souvent décomposé on trois phases dans le temps (Figure 1-6).

- Phase du remplissage

- Phase de compactage

- Phase de refroidissement



Figure 1-6: Pression dans l'empreinte mesurée pendant l'injection et le temps de maintien en pression (un seul capteur) [9]



Figure 1-7: Pression dans l'empreinte pendant le temps de remplissage et le temps de maintien en pression (Deux capteurs) [9]

#### 1.2.5.Etat du polymère dans le moule

#### 1.2.5.1. Thermique

La famille des polymères comporte un grand nombre de matériaux aux propriétés très différentes. Néanmoins, une propriété commune est leur très faible conductivité thermique, environ 1000 fois plus faible que celle du cuivre. A titre d'exemple, il faut 10s pour qu'un refroidissement superficiel atteigne la profondeur de 1 mm. Cette propriété explique la faible épaisseur des pièces plastiques injectées.

De plus, le polymère est injecté à l'état fondu, c'est-à-dire à une température supérieure à sa température de transition vitreuse Tc pour les amorphes et à sa température de

fusion pour les semi-cristallins. Au cours du refroidissement, il va changer de phase et la faible conductivité thermique entraîne de forts gradients de températures. Il va donc se former une "peau" en surface. Cette couche solide a des propriétés mécaniques différentes du polymère fondu, notamment pour le frottement à la paroi [2].

Ce gradient de température provoque un gradient dans les propriétés rhéologiques et thermiques du polymère. Le système ici est donc particulièrement complexe à résoudre, surtout si on s'intéresse à l'interface avec le moule : la nature du polymère en contact avec la surface est difficile à déterminer.

#### 1.2.5.2.Écoulement du polymère dans le moule

L'étude de l'écoulement du polymère dans l'empreinte du moule regroupe énormément de phénomènes. Pendant l'injection, le phénomène est non isotherme. La vitesse du fluide le long des parois est souvent considérée nulle [10]. Il se forme une gaine froide de matière solide qui amène la partie centrale de la veine à s'expansée pour remplir la section et continuer à s'écouler. Le débit de polymère fondu se fait principalement entre ces gaines.

La (Figure 1-8) montre l'évolution de la vitesse et de la température du polymère lors de l'écoulement dans l'empreinte. La forte variation de température s'explique par la mauvaise conductivité thermique des polymères et la durée très courte de cette phase du cycle. Les variations de vitesse sont importantes. De plus, le cisaillement près de la paroi provoque un échauffement local du fluide.

Au cours de la phase suivante de compactage, le débit dans la cavité est relativement faible. La vitesse d'écoulement varie peu entre le centre et les parois. La pièce se solidifie au cours de la phase de refroidissement. Dès que ses propriétés mécaniques permettent de procéder à l'éjection sans altérer la pièce, celle-ci est éjectée et refroidit à l'air libre.



Fige 1-8: Vitesse et température du polymère lors de l'écoulement pendant la phase d'injection [15]

Cette présentation rapide montre que la physique et par conséquent la modélisation de l'écoulement du polymère au cours du cycle dans la cavité est très complexe et nécessite de prendre en compte les changements d'état, les phénomènes de cisaillement, de rhéologie non-newtonienne, ... Cette complexité rend impossible l'intégration de ces phénomènes dans le modèle pour calculer le chargement sur la surface du moule. Le polymère restant une condition aux limites sur la surface. Il est représenté par des champs de contraintes normales et tangentielles et un flux thermique à la surface.

## Chapitre 2

## Comportement rhéologique du polymère

#### 2.1.Introduction

La rhéologie est la science qui étudie la déformation des corps sous l'effet des contraintes appliquées en tenant compte du temps (ou vitesse d'application des contraintes). Plus généralement, elle étudie la relation entre la contrainte et la déformation en fonction du temps dans le matériau. [2]

#### 2.2.Notions générales sur la viscosité

Les polymères fondus sont constitués de l'entrelacs de plusieurs chaînes polymères de longueurs et de masses statistiques. Plus ces dernières caractéristiques sont grandes et plus la structure du fluide polymère est complexe. L'interprétation de ce phénomène est explicitée par [Graessley 1967] et [Bueche, 1968] qui s'appuient sur le concept d'enchevêtrement des macromolécules. En pratique, pour qu'un enchevêtrement se forme ou se déforme, il faut que le mouvement de la molécule dure au moins un certain temps  $\lambda$ . Or les mouvements des macromolécules sont la résultante des contraintes de cisaillement imposées au polymère. Donc le temps de contact entre deux macromolécules est une fonction du taux de cisaillement. Dès lors que le taux de cisaillement devient supérieur à  $1/\lambda$ , la densité d'enchevêtrement reste constante et la viscosité aussi. On parle dès lors de plateau newtonien pour cette zone de viscosité « constante », nettement visible sur les courbes de viscosité en fonction du taux de cisaillement. Ces courbes d'écoulement sont généralement représentées sur une échelle logarithmique et la pente de la décroissance de viscosité définit l'indice de pseudo-plasticité du polymère. Un schéma d'une telle courbe est donné en (Figure 2-1)



Figure 2-1: Allure générale d'une courbe d'écoulement du polymère fondu [7]

#### 2.3.Viscosité : un phénomène physique

#### 2.3.1.Définition

La viscosité se manifeste chaque fois que les couches voisines d'un même fluide sont en mouvement relatif, c'est à dire lorsqu'il s'établit un gradient de vitesse. On peut donc dire de la viscosité qu'elle est la mesure du frottement fluide. La force de frottement peut être figurée par l'énergie nécessaire pour déplacer un objet qui frotte sur un autre. La viscosité peut donc être considérée comme le frottement interne qui résulte du glissement d'une couche de fluide sur une autre. Un liquide très visqueux est un liquide qui présente un frottement interne élevé.

Si on considère l'expérience suivante dans laquelle le liquide adhère à la plaque supérieure et est entraîné par elle (Figure 2-2), on constate que, dans ce cas particulier, la vitesse varie proportionnellement à la cote y. L'expérience montre aussi qu'un mouvement stationnaire s'établit où la vitesse u0 de la plaque supérieure est constante. C'est donc que le liquide exerce des forces tangentielles  $\tau$  sur la plaque supérieure dont la résultante vaut précisément -*F*.

La tension  $\tau$  est proportionnelle au gradient de vitesse d'où la formule de Newton:

$$\tau = \frac{dF_y}{ds} = \eta \frac{\partial u}{\partial y}$$

Par définition, la viscosité, notée  $\eta$ , est ce coefficient de proportionnalité.



Figure 2-2 : Schématisation du cisaillement entre deux plaques[15]

#### - Interprétation " mécanique " :

Le rapport  $\tau = \frac{F}{s}$  qui a la dimension d'une pression sera appelé pression d'entraînement ou mieux force de cisaillement. Ce terme indique la force surfacique nécessaire pour produire le cisaillement. Quant au gradient de vitesse  $D = \partial u / \partial y$ , il est une mesure de la vitesse à laquelle les différentes couches se déplacent les unes par rapport aux

autres ; ce rapport représente le cisaillement auquel le liquide est soumis. On le désigne sous le nom de taux de cisaillement.

Ainsi, la viscosité du liquide est :

$$\frac{\frac{DF}{ds}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{\text{pression d'entrainement}}{\text{gradient de vitessa}} = \frac{\text{effort de cisaillement}}{\text{tauxde cisaillement}}$$

Le terme de cisaillement traduit bien l'analogie formelle qui existe entre frottement liquide et frottement mécanique.

#### 2.3.2.Unités et ordres de grandeur

#### - Unités

L'équation aux dimensions de la viscosité dynamique s'écrit :

$$[\eta] = \frac{N.m}{m^2.(m.s^{-1})} = pa.s$$

Le pascal-seconde est donc l'unité de la viscosité dynamique. On parle plus généralement de poiseuille, noté Pl (1 Pl = 1 Pa.s).

#### 2.3.3.Importance de la nature du fluide et de l'écoulement

#### - Nature du fluide

Il est commode pour étudier la rhéologie des liquides (en général) de porter sur un graphique les valeurs de  $\tau$  en fonction de *D*. Sur un tel graphique la viscosité apparente est égale à la pente de la tangente à la courbe obtenue, encore appelée courbe rhéologique ou rhégramme.

Un fluide newtonien ne possède qu'une seule caractéristique rhéologique, la viscosité. Dans les mêmes conditions de température et de pression, ce rapport est constant quel que soit le gradient de vitesse, tant que l'écoulement reste laminaire. La courbe caractéristique est une droite passant par l'origine.

$$\eta = \frac{\tau}{D} tana$$

#### 2.3.4.Nature de l'écoulement

La véritable définition de la viscosité implique l'existence de ce qu'on appelle l'écoulement laminaire (ou mieux écoulement lamellaire) dans lequel le mouvement ou mieux le glissement d'une couche du liquide sur l'autre s'effectue sans transfert de matière d'une couche à l'autre, la viscosité étant définie comme le frottement entre ces couches. Il y a une certaine vitesse maximum, dite vitesse critique, dont la valeur dépend d'un certains nombres de facteurs (vitesse, viscosité, densité, forme du récipient), au delà de laquelle le mouvement relatif d'une couche de liquide ne peut pas se faire sans qu'il y ait transfert de matière de l'une à l'autre : au delà de cette vitesse se trouve l'écoulement turbulent. Les molécules ou les particules plus grandes passent alors d'une couche à l'autre et le phénomène absorbe une quantité d'énergie considérable. Il en résulte en définitive qu'une quantité d'énergie beaucoup plus grande que dans le cas d'un écoulement laminaire est nécessaire pour maintenir cet écoulement turbulent. L'augmentation de l'énergie nécessaire se reflète par l'existence d'un effort de cisaillement apparent beaucoup plus grand, c'est à dire que la valeur calculée de la viscosité  $\eta$  sera beaucoup plus élevée en écoulement turbulent qu'en écoulement lamellaire.

#### 2.3.5.Influence de la température et de la pression

#### a) Température

La viscosité dépend fortement de la température. Aussi doit-on toujours, pour conserver un sens à la mesure, préciser la température à laquelle elle a été faite. Dans un liquide, la viscosité décroît rapidement en fonction de la température suivant la loi suivante : [13]

$$\eta = \eta_0 \times \frac{1}{1 + aT + \beta \cdot T^2} \text{ où } \eta_0 \text{: viscosité à 0 c}^0$$

#### **b**) Pression

L'action de la pression est inverse. La viscosité dynamique  $\eta$  croît à peu près proportionnellement à la pression, du moins jusque vers 2000 à 3000 atmosphères ; ensuite, elle augmente plus vite. Pour les liquides, la masse volumique  $\rho$  étant pratiquement indépendante de la pression, les résultats précédents s'appliquent également à la viscosité cinématique v. En pratique, on ne tient pas compte de ces variations qui sont petites par rapport à celles dues à la température.

La viscosité est un paramètre très important dans l'étude de l'écoulement du polymère, cette dernière qui est d'environ  $10^6$  à  $10^8$  fois celle de l'eau, est fonction de certain paramètre qui sont:

- Le poids moléculaire du polymère;
- La température;
- La pression;
- Le taux de cisaillement ; La viscosité est une mesure de la friction interne d'un liquide.

Pour la déterminer, on applique une force mesurable sur le liquide et l'on mesure en même temps la vitesse de déformation, ou vice versa.

Etudions le comportement d'un polymère fluide simple (un fluide newtonien dont la viscosité ne dépend pas de la vitesse de cisaillement) soumis à une contrainte.

Prenons le cas d'un tel liquide contenu entre deux plateaux selon la figure ci dessous.

Le plateau inférieur est fixe. Le déplacement du plateau supérieur entraîne une partie du fluide dans son mouvement.

Le fluide est contenu entre les deux plateaux. La translation du plateau supérieur à la vitesse  $u_1$ nécessite l'application d'une force .  $F_i$ (Figure 2-2)

Si on augmente (en multipliant par 2) la vitesse du plateau supérieur ( $u=u_2$ ), il est nécessaire d'appliquer une force F2 qui vaudra le double de la force F1

#### 2.4.les différents modèles de viscosité

Considérons un liquide visqueux cisaillé entre deux plaques parallèles de surface S, distantes d'une épaisseur h ; l'une des plaques est animée par rapport à l'autre de la vitesse u. Cet écoulement est comparable à l'écoulement d'un fluide entre deux parois fixes[11].

On distingue Trois types de modèle de viscosité :

- Modèle Newtonien.

- Modèle Pseudo-plastique.

- Modèle Pseudo-plastique thermo-dépendant.

S'il existe de nombreux modèles rhéologiques, quelques lois « classiques » reviennent principalement dans la littérature consacrée aux écoulements des polymères, et donc aux aspects plutôt pseudo-plastiques. Beaucoup de ces lois découplent les dépendances de la viscosité avec le cisaillement et la température, se focalisant sur un seul aspect. Le lien peut toutefois être rétabli par l'utilisation du principe d'équivalence temps-température. Nous allons commencer par rappeler quelques unes de ces lois les plus classiques :

#### 2.4.1.modèle newtonien

La viscosité a été définie par Newton comme le coefficient de proportionnalité entre la contrainte de cisaillement et la vitesse de cisaillement.

le plateau inférieur est fixe. La force F nécessaire pour animer le plateau supérieur d'une vitesse u est proportionnelle à cette vitesse.  $F=K_U$ 

Les composantes du vecteur vitesse sont les suivantes

$$\begin{cases} u = \gamma, y \\ v = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

Cette force rapportée à la surface sur laquelle elle s'exerce est la contrainte de cisaillement

$$\tau = \frac{r}{s}$$

proportionnelle à la vitesse de cisaillement :  $\dot{\gamma} = \frac{u}{h}$ .

 $\tau = \eta. \gamma$ 

Le coefficient de proportionnalité entre  $\tau$  et  $\gamma$  s'appelle la viscosité dynamique  $\eta$ .

 $\eta = \tau / \dot{\gamma}$  (Loi de Newton).

Si, pour une substance newtonienne quelconque, on trace le graphe représentant la contrainte de cisaillement en fonction du gradient de vitesse, on obtient une droite qui passe par l'origine. Ce graphique est un rhéo-gramme (Figure 2-3- a).

La viscosité représentée en fonction du gradient de vitesse donne une droite parallèle à l'axe des abscisses (Figure 2-3 -b).



Figure 2-3 : Viscosité d'un liquide newtonien [15]

On constate que la force F nécessaire pour animer le plateau supérieur d'un mouvement de translation n'est pas proportionnelle au déplacement U mais à la vitesse u du plateau supérieur.

Pour le fluide, ce qui distingue les deux cas précédents c'est la vitesse de déformation. Contrairement au cas des solides, la force n'est pas liée à la déformation mais à la vitesse de déformation du matériau. Pour décrire le comportement mécanique du polymère à l'état liquide il est nécessaire d'introduire la notion de vitesse de déformation.

#### 2.4.2. Modèle Pseudo-plastique

La plupart des polymères n'ont pas un comportement newtonien. Cela signifie que leur viscosité n'est pas indépendante de la vitesse de cisaillement mais décroit en fonction de la vitesse de cisaillement.

La pseudo-plastique est la propriété d'un matériau qui exprime le fait que la viscosité soit une fonction décroissante du taux de cisaillement.

Les modèle rhéologiques proposes sont :[12]

#### 2.4.2.1.Loi Ostwald – de Waele

Cette loi [Ostwald, 1923], [De Waele, 1923] est également appelée loi puissance et s'écrit traditionnellement sous la forme [13]

 $\eta = K. |\dot{\gamma}|^{m-1}$ 

Où K est la consistance du matériau (en  $Pa.s^m$ ) et m est l'indice de pseudo-plasticité(m = 1 pour un fluide newtonien ; m = 0 pour un corps rigide plastique). Cette loi a le défaut de ne pas présenter de plateau newtonien à faible taux de cisaillement. Elle est donc souvent complétée par une valeur de viscosité seuil, pour les faibles taux de cisaillement. En revanche, cette loi est normalement bien adaptée pour les forts taux de cisaillement.

#### 2.4.2.2.Loi de Cross

La loi de Cross [Cross, 1965] a l'avantage de présenter le plateau newtonien à faible taux de cisaillement

$$\eta - \eta_{\infty} = \frac{\eta_0 - \eta_{\infty}}{1 + (\lambda \cdot \dot{\gamma})^m}$$

Où  $\lambda$  est le temps caractéristique de l'enchevêtrement,  $\eta 0$  la viscosité du palier newtonien à faible taux de cisaillement et  $\eta \infty$  un deuxième plateau newtonien à taux de cisaillement élevé, m indice de loi de puissance. Ce dernier n'ayant jamais été observé pour un polymère fondu [Agassant, 1996], on prendra  $\eta \infty = 0$ . Ce qui donne :

$$\eta = \frac{\eta_0}{1 + (\lambda.\dot{\gamma})^m}$$

#### 2.4.2.3.Loi de Carreau-Yasuda

Le modèle de la loi de puissance s'applique sur une plage limitée de la courbe de viscosité. En réalité à des faibles taux de cisaillement les polymères ont un comportement newtonien, c.-àd. que la viscosité est indépendante du taux de cisaillement. Carreau à développé un modèle qui représente complètement la courbe de viscosité et qui prend en charge ce plateau, son modèle s'écrit :  $\eta = \eta_0 . \left(1 + (\lambda, \dot{\gamma})^a\right)^{\frac{m-1}{a}}$ 

Où  $\lambda$  a le même sens que pour la loi de Cross. Le paramètre a sert à ajuster la transition plus ou moins rapide entre le plateau newtonien et la partie loi puissance. La loi de Carreau correspond à la valeur a=1 [Carreau, 1972], [Yasuda et al. 1981].

Les modèles d'Ostwald-de Waele, de Carreau-Yasuda et de Cross représentent des comportements sans contrainte seuil. Dans le cas des "fluides à seuil" on ajoute la contrainte seuil ( $\tau_0$ ). Si la contrainte appliquée reste inférieure à cette valeur critique ( $\tau_0$ ), le matériau se comporte comme un solide. Dans le cas contraire, le matériau retrouve le comportement d'un fluide. Les deux modèles les plus utilisés pour caractériser les fluides à seuils sont, respectivement, le modèle de Bingham (1922) et le modèle de Herschel-Bulkley(1926) (Figure 2-4 )



Figure 2-4 : Lois de comportement élémentaire [4]

$$\tau = \tau 0 + . \dot{\gamma}$$
$$\tau = \tau 0 + k. \dot{\gamma}^{n}$$

Où  $\eta pl$  est la viscosité plastique, k la consistance du fluide et n l'indice d'écoulement. Ces deux modèles permettent de représenter le comportement rhéologique de beaucoup de fluides au delà de la contrainte seuil.

#### 2.4.2.4.Modèle d'Ellis

Le modèle d'Ellis exprime la viscosité en fonction du taux de cisaillement. Son équation de comportement est plus difficile à utiliser que celle de la loi de puissance, mais elle y est supérieure, car elle prédit un plateau Newtonien à faible cisaillement.

$$\frac{\eta_0}{\eta(\tau)} = 1 + \left[\frac{\tau}{\tau_1 / 2}\right]^{(a-1)}$$

 $\eta_0$ : viscosité à cisaillement nul.

 $\tau_1$  / 2: taux de cisaillement à  $\eta$ 

 $\alpha$ -1 : pente de log  $[\eta_0/2 - 1]$  versus log  $(\tau/\tau_{1/2})$ 



Figure 2-5 :Modèle d'Ellis[9]

#### 2.4.3. Modèle Pseudo-plastique thermo-dépendant

Le modèle pseudo-plastique thermo-dépendant tient compte de la variation de la viscosité en fonction du taux de cisaillement et de la température. Une augmentation de température résulte en une diminution de la viscosité du à l'augmentation de mobilité des chaînes de polymères. En règle générale la viscosité des polymères amorphes est plus sensible aux variations de la température que la viscosité des polymères semi-cristallins.

#### 2.4.3.1.Loi de Williams, Landel et Ferry (WLF)

[WLF, 1955]

$$\eta = \eta_0 (T_{ref}) exp \left( \frac{-C(T - T_{ref})}{D + T + T_{ref}} \right) . \dot{\gamma}^{m-1}$$

C et D sont deux paramètres caractéristiques du matériau étudié. En pratique cette loi est applicable entre la température de transition vitreuse Tg et Tg+100, la loi d'Arrhenius est préférable. Dans la mise en forme des matières plastiques, d'Agassant et al., il est précisé quelques valeurs de C et D :

Polymères	Tg (K)	С	D(K)
Polystyrène	373.15	14	50
Polyacétate de vinyle	405.15	16	47
Polyméthacrylate de méthyle	388.15	32	80
Caoutchouc naturel	200.15	17	54
SBR	213.15	20	26

#### Tableau 2-1 : Exemple de paramètres pour la loi WLF [13]

En cas de méconnaissance de ces paramètres C et D, [Bird et al. 1977] suggèrent l'utilisation des valeurs suivantes : C = 17.44 et D = 51.6 K (si la température de référence est prise à Tg)

#### 2.4.3.2.Loi d'Arrhenius

$$\eta = \eta_0 e^{\frac{A}{T}}$$

On trouve aussi la formulation équivalente suivante:

$$\eta = \eta_0. (T_{ref}). e^{A_{ref}\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_{ref}}\right)}$$

A représente le rapport de l'énergie d'activation et de R la constante des gaz parfaits. Les températures sont exprimées en K. [Agassant et al., 1996].  $A_{ref}$  correspond la valeur de A pour une température Tref de référence.

A titre d'information, nous reprenons quelques lignes du tableau récapitulatif d'Agassant, qui donne des ordres de grandeur des énergies d'activation pour des polymères fondus :

Polymère	ére Energie d'activation en kJ/mol à 100 K au dessus de température de transition vitreuse.		
PEHD	24-28		
PEBD	61-67		
PEBD linéaire	29-32		
Polypropylène	36-50		
Polystyrène	96		



#### 2.4.3.3.Variation de la viscosité en fonction du cisaillement et de la température couplés

[Bowers, 1986] propose un développement en série entière comme l'équation du Viriel en thermodynamique

$$ln(\eta(\dot{\gamma},T)) = \sum_{i;j} \alpha_{i,j} T^{i} . (ln\dot{\gamma})^{i}$$

#### - Principe d'équivalence temps-température

L'observation physique montre que les comportements en fonction de la température et de la fréquence de sollicitation sont liés. On observe ainsi que de hautes fréquences de sollicitation amènent à un comportement équivalent à celui observé à basses températures. De même les basses fréquences sont équivalentes à des températures élevées. On résume cette observation par le principe d'équivalence temps-température.

Ce principe peut être utilisé pour la construction d'une courbe « maîtresse » à partir des translations de courbes expérimentales obtenues à différentes températures. Cette courbe maîtresse permet par la suite de déduire la propriété étudiée du polymère pour toute température et toute fréquence de sollicitation, dans les limites de validité du modèle. [Blair et al. 2002] s'appuyant sur les ouvrages de [Bird et al., 1987] traduit ce principe d'équivalence temps-température par le tracé des courbes d'écoulement (viscosité  $\mu$  en fonction du taux de cisaillement  $\gamma$ ) sous la forme réduite  $\frac{\eta}{a_{\eta}}$  en fonction de  $\dot{\gamma} a_T$  en définissant  $a_{\eta}$  et  $a_T$  de la sorte :cette observation par le principe d'équivalence temps température

$$\begin{cases} a_{\eta} = \frac{\eta_0(T,\rho)}{\eta_0(T_{ref},\rho_{ref})} \\ a_T = \frac{\eta_0(T,\rho)}{\eta_0(T_{ref},\rho_{ref})} \frac{T_{ref},\rho_{ref}}{T_{\rho}} = a_{\eta} \cdot \frac{T_{ref},\rho_{ref}}{T_{\rho}} \end{cases}$$

Où l'indice 0 se reporte à un régime newtonien et l'indice ref correspond à une valeur de référence, choisie dans le but de réduire les données.

#### 2.4.3.4. Variation de la viscosité en fonction de la pression

Sans reprendre tout le raisonnement présenté par [Agassant et al, 1996], nous nous contentons ici de rappeler une loi de piézodépendance.

$$\eta = \eta_0 e^{\chi P}$$

Où  $\chi$  est le coefficient de piézodépendance.

On rappelle également quelques ordres de grandeur de  $\chi$  :

Polymère	T (K)	χ en 10*Pa <sup>4</sup>	référence littérature
PVC	453.15	6	Wales
	463.15	4	(1975)
	473.15	3	
PEHD	463.15	2.31	Nakajima et Collins (1974)



# **Chapitre 3**

# Modélisation du remplissage

#### **3.1.Introduction**

La phase du remplissage du moule est la phase dynamique de transfert de matière dans le moule. Il y a progression du front de matière, dont il faut déterminer à chaque instant la position.

Le temps de remplissage est court, de l'ordre de quelques secondes, et donc les débits d'injection sont élevés, de l'ordre de 100 à 1 000 cm3/s. En combinaison avec la forte viscosité des polymères, la dissipation d'énergie est donc importante, et la température de la matière peut augmenter localement malgré le refroidissement du moule. De plus les pressions sont importantes, de l'ordre de plusieurs dizaines de méga Pascals.

Les polymères étant peu conducteurs de la chaleur, la température à cœur est proche de la température d'injection, tandis qu'à la paroi elle est proche de la température du moule. La viscosité des polymères dépendant fortement de la température, il faut évaluer avec précision les gradients thermiques, et coupler étroitement les calculs mécaniques et thermiques

#### **3.2.Principales hypothèses**

Le polymère est supposé avoir un comportement purement visqueux. En effet, on peut négliger la composante élastique du comportement si les déformations de cisaillement sont prépondérantes. C'est le cas de nombreuses pièces dont l'épaisseur est assez régulière.

Cependant, il existe toujours des régions, souvent localisées, comme les seuils, où les déformations élongation elles sont non négligeables, et où l'approximation purement visqueuse n'est plus licite.

Les données de viscosité sont disponibles pour différents taux de cisaillement et différentes températures, mais il faut les interpoler, et surtout les extrapoler en dehors du domaine de mesure (forts taux de cisaillement). Le plus simple est d'utiliser un lissage en «loi puissance», mais il est préférable d'employer une loi permettant de rendre compte d'un plateau newtonien à bas taux de cisaillement, comme la loi de Carreau ou de Carreau-Yasuda.

La viscosité est supposée indépendante de la pression, mais ceci peut être contestable pour les grandes pièces ou pour des polymères très visqueux.

Les forces de masse et d'inertie sont le plus souvent négligées. Il est à noter que ces dernières pourront jouer un rôle dans certaines situations où l'accélération est importante, par exemple dans un seuil de petite section.

On peut supposer le polymère incompressible. Cela est réaliste dans de nombreuses circonstances, car les niveaux de pression atteints pendant le remplissage ne sont pas trop élevés. Cela devient moins vrai vers la fin de cette phase et à la transition avec la phase de compactage. De plus, on néglige également la variation de masse volumique avec la température.

La conduction de chaleur dans le sens de l'écoulement est négligée devant la convection, ce qui est justifié par la faible conductivité thermique des polymères.

En première approximation, nous considérerons que la conductivité thermique du polymère est indépendante de la pression et de la température

#### 3.3. Modélisation de la phase du remplissage

#### Paramètres d'entrée de la modélisation

- La géométrie

- Conditions d'injection (température d'injection, le temps de remplissage ou le débit).
- Caractéristiques de la matière.
- Conditions de refroidissement.

#### Paramètres de sortie de la modélisation

- Pression.
- Vitesse.
- Taux de cisaillement.
- Position du front à un instant donné.
- Température.

#### 3.3.1. Formulations Mathématiques

Le modèle simulant le remplissage s'appuie sur trois principes de la physique des milieux continus :

• La conservation de la masse qui se traduit par l'équation de continuité:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \left[ \rho. u \right] = 0 \tag{3.1}$$

• La conservation de la quantité de mouvement qui se traduit par l'équation de l'équilibre dynamique:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{ugrad}(u) = -\text{grad}(P) + \text{grad}(\eta \text{div}(u))$$
(3.2)

• La conservation de l'énergie qui se traduit par l'équation de la chaleur:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + ugrad(T) = k.grad(div(T)) + \Phi$$
(3.3)

La modélisation du remplissage dés géométrie simple consiste à résoudre numériquement les

trois équation précédentes en tenant compte des hypothèse suivantes:

- Pendant tout l'écoulement le débit est constant
- Les force de masse d'inertie sont négligeable devant Les force de viscosité
- ✤ La conductivité thermique et la chaleur massique sont constantes
- ✤ Le régime est laminaire

#### 3.3.2. Modélisation de l'écoulement dans un moule plaque

Cette situation d'écoulement est fréquemment rencontrée lorsque l'on injecte en moule. Nous allons d'abord considérer un écoulement en condition isotherme et non isotherme. Et pour cela, on va étudier les trois modèles de viscosité.



Figure 3-1 : Remplissage d'un moule plaque[15]



Figure 3-2 : Schéma du moule sous forme de plaque[15]

En dehors du voisinage du point d'injection, on pourra supposer que l'écoulement est unidirectionnel (Figure 3-2).

L'équation de continuité : v=w=0 l'écoulement unidirectionnel suivant x

$$div(u) = 0 = > \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \implies u = f(y)$$

$$\begin{cases} u = f(y) \\ v = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

(3.4)

#### 3.3.2.1.le champ de vitesse

- Tenseur de vitesse de déformation :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{2} \times (grad \, \vec{u} + grad^t \vec{u})$$

Puisque v=0, w=0. D' après l' équation de continuité on a  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ; c' est que fait la vitesse en fonction de l' hauteur du moule

$$[\dot{\varepsilon}] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- déviateur de contrainte :

$$[s] = 2\eta[\varepsilon]$$
$$[s] = \begin{pmatrix} 0 & \eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0\\ \eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

#### 3.3.2.2.tenseur de contrainte

$$[\sigma] = -P[I] + [s]$$

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} -P & \eta\left(\frac{\partial u(y)}{\partial y}\right) & 0\\ \eta\left(\frac{\partial u(y)}{\partial y}\right) & -P & 0\\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix}$$
(3.5)

Les équations de l'équilibre dynamique nous conduisent à :

$$\vec{f} + div [\sigma] = 0$$

f: forces volumiques. (Négligeables devant les forces de viscosité) D'après l'équation de l'équilibre dynamique, on trouve l'ensemble des équations comme démontre à l'équation (3.5):

(3.6)

(3.7)

$$\begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta \frac{\partial u(y)}{\partial y} \right) = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta \frac{\partial u(y)}{\partial y} \right) = F$$
  
En prenant le deuxième membre

de l'équation (3.7):

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \eta \frac{\partial u(y)}{\partial y} \right) = F$$

D'après l'intégrale de l'équation

précédente on trouvera :

$$\left(\eta \frac{\partial u(y)}{\partial y}\right) = F \times y + c_1$$

Pour les valeurs à la symétrie de

moule :

$$y = 0 \implies \frac{\partial u(0)}{\partial y} = 0 \implies c_1 = 0$$
$$\left(\frac{\partial u(y)}{\partial y}\right) = F \times \frac{y}{\eta}$$



Figure 3-3 : Schématisation des conditions

aux limites[15]

On intègre l'équation précédente par rapport à y, on obtient l'équation suivante :

$$u(y) = \int_0^y \left( F \times \frac{y}{\eta} \right) dy$$
(3.8)

La constante F non connait pas il faut faire recherche comment calcule cette constante il doit calculer le débit volumique de système par que le débit est connu :

$$Q = 2 \int_0^{h/2} u(y) \times ds$$

En remplaçant l'équation (3.8) dans

$$S = w \times h \Longrightarrow dS = w \times dy$$
$$Q = 2 \int_{0}^{h/2} \left( \int_{0}^{y} \left( F \times \frac{y}{\eta} \right) dy \right) \times w \times dy$$



Figure 3-4 : Schématisation du débit volumique au

(3.9)

L'équation deviendra comme de suite :

$$Q = 2 \times F \times \int_0^{h/2} \left( \int_0^y \left( \frac{y}{\eta} \right) dy \right) \times w \times dy$$
(3.10)

$$F = \frac{Q}{2 \times \int_0^{h/2} \left( \int_0^y \left( \frac{y}{\eta} \right) \mathrm{d}y \right) \times \mathrm{w} \times \mathrm{d}y}$$
(3.11)

En remplaçant F dans l'équation (3.8) on trouve:

$$u(y) = \int_0^y \left( \left( \frac{Q}{2 \times \int_0^{h/2} \left( \int_0^y \left( \frac{y}{\eta} \right) dy \right) \times w \times dy} \right) \times \frac{y}{\eta} \right) dy$$
(3.12)

#### 3.3.2.3.Calcul de l'évolution de la pression dans le moule

$$\frac{\partial P}{\partial x} = F$$
  
 
$$P(x) = F \times x + C_2$$

Les conditions aux limites

$$x = L \qquad P = 0$$
  

$$0 = F \times L + C_2$$
  

$$C_2 = -F \times L$$
  

$$P(x) = F \times (x - L)$$



# Figure 3-5 : Schématisation les conditions au limite de pression autour

$$P(x) = \left(\frac{Q}{2 \times \int_0^{h/2} \left(\int_0^y \left(\frac{y}{\eta}\right) dy\right) \times w \times dy}\right) \times (x - L)$$
(3.13)

Pression d'injection :

$$P_{\rm inj} = \left(\frac{Q}{2 \times \int_0^{h/2} \left(\int_0^y \left(\frac{y}{\eta}\right) dy\right) \times w \times dy}\right) \times L$$
(3.14)

#### 3.4. Echange de chaleur entre matière plastique et le moule

L'équation de la chaleur dans le moule s'écrit , en supposant que la conductivité thermique et la capacité calorifique sont Indépendantes de la température :

$$\rho.c\left[\frac{\partial T}{\partial t} + U.GRAD.T\right] = K.\Delta T + W$$
(3.15)

 $\rho$ : masse volumique de la matière

c : chaleur massique

*T* : température

#### U : vitesse de la matière

K<sub>p</sub> : conductivité thermique de la matière plastique

 $\Delta$  : laplacien

W :dissipation visqueuse

$$U. GRAD. T = u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z}$$
$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

#### 3.4.1.hypothèses de calcul

L'écoulement est unidirectionnel suivant x ; cela élimine les termes :

$$v \frac{\partial T}{\partial y}$$
 et  $w \frac{\partial T}{\partial z}$ 

L'échange de chaleur de la matière plastique avec la moule suivant le sens de l'écoulement est négligeable par rapport à l'échange dans le sens transversal.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \operatorname{et} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$\rho. c \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right] = K_p \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + W$$
(3.16)

#### 3.4.2.résolution de l'équation de chaleur

Pour résoudre ce genre d'équation il existe plusieurs méthode parmi ces méthode pour notre étude on a choisi la méthode des différences finies.

Dans cette méthode on transforme l'équation de la chaleur en un système d'équation aux différence finies.la discrétisation des variable est obtenue en découpant le domaine étudié par un maillage .

Pour des raisons de symétrie suivant l'épaisseur, on a modélisé que la moitié supérieure de la plaque (Figure 3-6)



Figure 3-6::représentation du maillage de la moitié supérieur du moule

D'après la méthode des différence finies on calcule la température d'un nœud a un instant  $t+\Delta T$  en fonction des température des nœuds qui l'entoure au temps t comme le montre la Figure 3-7 ci-dessous:



Figure 3-7 : nœud interne

#### 3.4.2.1. pour les nœuds internes

C'est les nœuds situés à l'intérieur du domaine

$$\frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial y^2} = \frac{T_{i,j+1}^t - 2T_{ij}^t + T_{i,j-1}^t}{\Delta y^2}$$
(3.17)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{ij}^{t+\Delta t} - T_{ij}^{t}}{\Delta t}$$
(3.18)

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}} = \frac{T_{i+1,j}^t - T_{i-1,j}^t}{2.\Delta \mathrm{x}}$$
(3.19)

En substituant (3.17)

, (3.18)et (3.19) dans l'équation (3.16) en trouve l'équation de la chaleur pour un point de coordonnées (i,j) à l'instant t+ $\Delta T$ :

$$T_{ij}^{t+\Delta t} = \frac{\Delta t}{2.\Delta x \, \Delta y^2} \Big[ 2. \, a \Big( T_{i,j+1}^t + T_{i,j-1}^t \Big) \Delta x - U_{ij}^t \Big( T_{i+1,j}^t + T_{i-1,j}^t \Big) \Delta y^2 \Big] + \Delta t \cdot \frac{W}{Cc} + T_{ij}^t \Big( 1 - \frac{2a\Delta t}{\Delta y^2} \Big)$$
(3.20)  
Avec:

a: la diffusivité thermique  $a = \frac{k_p}{\rho.c}$ 

*Cc* :capacité calorifique  $Cc = \rho.c$ 

#### 3.4.2.2.pour les nœuds situés au milieu de la plaque

Dans ce cas et pour des raison de symétrie on suppose que la température du nœud (j) sera égale à celle (-j) Figure 3-7 ,soit:  $T_{I,j} = T_{i,-1}$ 



Figure 3-8 : numérotation du maillage

 $T_{i,-1}$ : la température du nœud symétrique aux nœuds (i,1) par rapport au milieu de la plaque

<u>Remarque</u>: Pour des raisons de symétrie, on utilise seulement le maillage de la plaque l'équation de la chaleur s'écrit alors comme suit:

$$T_{ij}^{t+\Delta t} = \frac{\Delta t}{2.\Delta x \cdot \Delta y^2} \Big[ 4. a. T_{i,j+1}^t \cdot \Delta x - U_{ij}^t \left( T_{i+1,j}^t - T_{i-1,j}^t \right) \Delta y^2 \Big] + \Delta t. \frac{W}{Cc} + T_{ij}^t \left( 1 - \frac{2a\Delta t}{\Delta y^2} \right)$$
(3.21)

#### 3.4.2.3.pour les nœuds situés à l'interface de la plaque et le moule

Pour ce genre de nœud on va suppose que le flux absorbé par le fluide de refroidissement est égale au flux dégagé par la matière comme il est montrer sur la (figure 3-9) L'équation du flux:

$$\Phi = k\Delta T \tag{3.22}$$

$$\varphi = \frac{\phi}{s} = \frac{k\Delta T}{s} \tag{3.23}$$

Avec:

```
\Phi :le flux thermique
```

 $\varphi$ : densité du flux thermique

s: la surface

 $\Delta t$ :différence de température

 $k_{ac}$ :conductivité thermique de l'acier

 $\varphi$ 1: le flux rentrent

 $\varphi$ 2: le flux sortant

0:nœud

E:distance entre le canal de refroidissement et la plaque

 $\Delta y$ : distance entre deux nœud suivant y

 $\Delta x$ : distance entre deux nœud suivant



Figure 3-9 : Echange thermique

#### entre la plaque et le moule

 $k_p$ : conductivité thermique du plastique

on à :  $\varphi_1 = \varphi_2$ 

on appliquent l'équation (3.22) pour notre problème on trouve :

$$\frac{k_p(T_{i,j-1}-T_{ij})}{\Delta x \Delta y} = \frac{k_{ac}(T_{i,j}-T_r)}{e\Delta x}$$
(3.24)

 $T_r$ : température de liquide de refroidissement de l'équation (3.23) on trouve:

$$T_{i,j} = \frac{k_{p}.e.T_{i,j-1} + k_{ac}\,\Delta y.T_{r}}{k_{p}.e + k_{ac}\,\Delta y}$$
(3.25)

#### 3.4.2.4. pour les nœuds situés au seuil d'injection

Pour ce type de points on suppose que leur température est égale à la température d'injection c'est-à-dire :  $T_{0,j} = T_{inj}$ 

#### 3.4.2.5. Température mélange

C'est la température moyenne des derniers points d'un domaine, cette température va nous permettre d'initialiser la température des points du domaine suivant, elle s'écrit comme suit:

$$T_{m\acute{e}lange} = \frac{\int_{0}^{h} U[j] \times [i][j] \times dy}{\int_{0}^{h} U[j] \times dy}$$
(3.26)

#### - Les conditions aux limites :

La résolution de l'équation de la chaleur nécessite la prise en compte des conditions aux limites montrées à la (figure 3-8).



Figure 3-10 : Schématisation des conditions aux limites[15]

#### - Près de la paroi du moule:

Pour ce genre de nœuds, on va supposer que le flux absorbé par le fluide du refroidissement est égal au flux dégagé par la matière plastique (figure 3-11).

L'équation du flux :

Les flux de chaleur à travers l'acier sont représentés par les relations suivantes :

#### $Q = h.A. \Delta T = -Kac. (dT / dy) = -Kpoly.(dT / dy).$

#### - A l'entrée de moule :

Au seuil de l'injection où la température est fixée à la valeur T=Tinj, considérée comme la condition aux limites du système étudié.



Figure 3-11 : Injection du polymère au seuil d'injection du moule à Température

constante[15]

# **Chapitre 4**

# **Programmation**

#### 4.1.Introduction

Le but essentiel de notre travail est la simulation des phénomènes thermomécaniques au cours de la phase de remplissage. Cette simulation permet de donner l'état de la matière pendant et à la fin de cette phase. Le programme est effectué dans l'environnement MATLAB R2010a. Ce chois a été favorisé parce qu'il possède les meilleures fonctionnalités adaptées à notre modélisation.







4.3.1.Données du programme

- Pour l'organigramme on doit saisir les données suivantes :

#### .Géométrie

- L : longueur de la plaque [m]
- w : largeur de la plaque [m]
- h : hauteur de la plaque [m]

#### .Maillage

-m : nombre de nœuds suivant x par domaine

#### .Caractéristiques de la matière plastique

- La conductivité thermique : Kp [W/m°c]
- Capacité calorifique :  $Cc = \rho.c [J/m^{\circ}c]$ .
- -La viscosité : Les paramètres relatifs à chaque modèle utilisé :

#### Le moule (acier)

- e : Distance entre le canal de refroidissement et la paroi de contact[m].
- Kac : conductivité thermique de l'acier [W/m°c].

#### **Conditions d'injection**

- *T<sub>inj</sub>* : Température d'injection [°c].
- -*T<sub>ref</sub>* : Température de refroidissement [°c].
- t : Temps de remplissage [s].

#### 4.3.2. Résultats du programme

L'exécution de l'organigramme va nous donner les résultats suivants :

- Les valeurs de la température dans les différents nœuds du maillage.
- Les valeurs de la pression d'injection
- Les valeurs du taux de cisaillement les différents nœuds du maillage
- Les valeurs de champ de vitesse les différents nœuds du maillage
- Les valeurs de la pression dans différents nœuds du maillage.

# Chapitre 5

# Etude d'un cas

#### 5.1. Etude d'un cas d'application

Dans ce chapitre, on va étudier le cas de la plaque

#### 5.2.les données et les résultats

#### 5.2.1.les données

#### - géométrique

On a pris une plaque qui à les dimensions suivantes :

L : longueur de plaque. L =0.2 [m]

w : Largeur de plaque. w=0.08 [m]

h : hauteur . h=0.005 [m]



Figure 5-1 : Représentation de forme du moule Plaque.[15]

#### - Maillage

On a divisé la longueur en quatre domaines dans le sens de l'écoulement soit :

L=L/4 ; pour la plaque.

Le maillage est composé de Nx nœuds suivant le sens d'écoulement et Ny nœuds dans le sens transversal

 $\Delta x = L1/(Nx - 1)$  et  $\Delta y1 = y1/(Ny1 - 1)$  et  $\Delta y2 = y2/(Ny2 - 1)$ 

#### - Matériau

les caractéristiques de se matériau sont:

•La viscosité : Les paramètres relatifs à chaque modèle utilisé :

Pour le model de newtonien : k=4741.04 pa.s

Pour le model pseudo-plastique (Loi Ostwald - de Waele )

m=0.38029, k=4741.04 pa.s

Pour le model pseudo-plastique (Loi de Cross)

 $\eta_0 = 4741.04$  pa.s

#### $\lambda=0.008$

m=0.38029

Pour le modèle pseudo-plastique thermo-dépendant (Loi de Williams, Landel et Ferry (WLF))

 $\eta_0 = 4741.04$  pa.s

C = 17.44

D = 51.6 K

Pour le modèle pseudo-plastique thermo-dépendant (Loi d'Arrhenius)

$$\eta_0 = 4741.04$$
 pa.s

 $A_{ref} = 15$ 

- Conductivité thermique du plastique : Kp=0.175 [W/m.°C]
- Capacité calorifique :  $Cc = 2.02.10^6 [j/°C.m^3]$
- Moule (acier) :
  - Distance entre le canal de refroidissement et la paroi de contact :  $e = 4.10^{-3} m$
- Conductivité de l'acier : Kac=14.6 [W/m.°c].

#### - Condition d'injection :

- Temps de remplissage : tr=4 [s].
- Température d'injection :  $T_{inj} = 250$  [°c].
- Température de refroidissement :  $T_{ref} = 20 [^{\circ}c]$ .

#### 5.2.2.résultats numériques

#### 5.2.2.1.modèle newtonien



Figure 5-2 : le champ de vitesse



Figure 5-4 : la température



Figure 5-3 : La pression à l'intérieure du moule



Figure 5-5 : carte de température

### 5.2.2.2.Modèle Pseudo-plastique



#### a) Loi Ostwald – de Waele





Figure 5-8 : la température



Figure 5-7 : La pression à l'intérieure du moule



Figure 5-9 : carte de température

#### b) Loi de Cross



Figure 5-10 : le champ de vitesse Figure 5-11 : La pression à l'intérieure du moule



Figure 5-12 : la température



Figure 5-13 : carte de température

#### 5.2.2.3.Modèle Pseudo-plastique thermo-dépendant



### a) Loi de Williams, Landel et Ferry (WLF)













Figure 5-17 : carte de température

#### b) Loi d'Arrhenius





Figure 5-18 : le champ de vitesse









Figure 5-21 : carte de température

#### 5.2.3. Interprétation des graphes

#### 5.2.3.1. La pression à l'intérieure de la plaque (Fig. : 5-3, 5-7,5-11,5-15,4-19)

Ces graphes représente la variation de la pression entre le seuil d'injection et le front de la matière à différent instant pendant le remplissage on remarque que la pression diminue de la pression d'injection jusqu'à zéro (0) (hypothèse) .cette pression et très faible et assurée par la présence des évents qui évacué l'air présent dans le moule.

#### 5.2.3.2.Le champ de vitesse (Fig. : 5-2, 5-6,5-10,5-14,5-18)

Ces graphes représente le champ de vitesse dans le sens transversal de la plaque .

La variation du champ de vitesse n'est pas linéaire, elle est maximal au cœur et nul au paroi

#### 5.2.3.3.La température (Fig. : 5-4, 5-8,5-12,5-16,5-20)

Ces graphes représentent la variation de la température dans l'épaisseur de la plaque.

La température reste constante au cœur , mais elle aura tendance à chuté prés des parois , on put dire que ce comportement est du à la faible conductivité thermique de matériau.

#### **5.2.4.**Comparaison entre les trois modèles





Figure 5-22 : le champ de vitesse

Figure 5-23 : La pression à l'intérieure du moule



Figure 5-24 : la température

Conclusion générale

Ce travail a permet de mettre au point un programme sur Matlab qui permet de simuler les phénomènes thermomécaniques au court de la phase de remplissage du cycle de moulage par injection.

Ce programme permet de simuler le transfert de chaleur et écoulement pour divers modèles de viscosité de type :

Newtonien,

Pseudoplastique,

Pseudoplastique thermodépendant

Les résultats obtenus confirment la variation qualitative de la température et la vitesse dans l'épaisseur de la plaque, obtenus dans les travaux antérieurs.

Le début de l'étude de l'influence des modèles de viscosité sur les résultats de la simulation, a montré une différence très faible entre les résultats obtenus.

Le programme qui permet d'étudier cette différence en détail et plus précise est mis au point. Le travail futur doit exploiter ce programme pour obtenir des résultats plus fiable qui doit être validés par des études expérimentales.

#### **Références Bibliographiques**

- [1] Benoît WATREMETZ, « modèle thermomécanique 3D d'un matériau a gradient de propriétés a l'aide de techniques multi grilles. Application aux moules d'injection de polymères ». Thèse doctorat institut national des sciences appliquées de Lyon, 2006.
- [2] MIDOUX.N. « Mécanique et rhéologie des fluides ». Technique et Documentation, Lavoisir (1993).
- [3] TROTIGNON.P.J et DOBRACZYNSKI.A PIPERAUD.M. « Matières Plastiques : Structures-Propriétés, Mise en oeuvre, Normalisation ».Editions Nathan, Paris (1996).
- [4] Céline GENEAU, Procède D'élaboration D'agro-Matériau Composite Naturel Par Extrusion Bivis Et Injection Moulage De Tourteau De Tournesol, thèse doctorat Polytechnique de Toulouse, 2006.
- [5] Site web.univ-ubs.fr/, Université de Bretagne-Sud, 2005.
- [6] Rosato, D. V., Rosato, D. V., and Rosato, M. G., Injection Molding Handbook, 3rd Edition, Kluwer Academic Publishers (2000).
- [7] MICHEL.F et YVES.G, « Chimie et Physico-Chimie des Polymères ». 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup>
   Cycles Ecole d'ingénieurs, Paris (2002).
- [8] Jacques Besson, Matériaux pour l'ingénieur, Ecole nationale supérieure des mines de Paris Publié par Les Presses - Mines Paris, 2006 ISBN 2911762681, 9782911762680
- [9] HANS-HENNING.K; NICOLE.H et CHRISTOPHER.J.P, « Matériaux Polymères
   : Propriétés Mécaniques et Physiques ». Presses Polytechniques et Universitaires
   Romandes, Lyon (2001).
- [10] DJOUDI.T, DJEMIA.H « Etude de la phase de remplissage du moulage par injection dans le cas d'un moule secteur ». Projet de fin d'étude, Université Mohamed Khider Biskra Juin (2001).
- [11] Maël Moguedet. « Développement d'un outil d'aide à la conception et au fonctionnement d'un ensemble vis/fourreau industriel - Application à l'injection des thermoplastiques chargés fibres de verre longues » Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (2005).
- [12] Cyril PUJOS, « Estimation de la rhéologie d'un polymère dans une filière d'extrusion Simulation d'écoulement avec transferts thermiques et Inversion de mesures »,

L'université Bordeaux école doctorale de sciences physiques et de l'ingénieur, Thèse de Doctorat, (2006).

- [13] DJELEB.M, HELEL.Y. « Modélisation de la Phase de Remplissage du Moulage par Injection des Matières Plastiques par la Méthode de Mise à Plat », Projet de Fin d'étude, Université Med Khider de Biskra (Juin 2002).
- [14] CHABANANE Fouad « Etude de transfert thermique lors du moulage par injection de la matière plastique » projet de fins d'étude Université Mohamed Khider BISKRA 2004.
- [15] CHABANANE Fouad «contribution a la modélisation de transfert de chaleur lors du remplissage d'un moule Thèse de Magistère Université Batna 2009.