



Université Mohamed Khider Biskra  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie Electrique  
Filière : Automatique

Option : Génie des Systèmes Industriels

Réf:.....

Mémoire de Fin d'Etudes  
En vue de l'obtention du diplôme:

**MASTER**

**Thème**

***Réduction de Modèle d'un Procédé  
Thermique***

Présenté par :  
**SAFIDDINE SAID**  
Soutenu le : 02 Juin 2014

Devant le jury composé de :

M<sup>me</sup> RECHID Naima  
M<sup>lle</sup> MIHI Assia  
M<sup>md</sup> TERKI Nadjiba

MAA  
MAA  
MCA

Président  
Encadreur  
Examineur

**Année universitaire : 2013 / 2014**

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la recherche scientifique



Université Mohamed Khider Biskra  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie Electrique  
Filière : Automatique  
Option : Génie des Systèmes Industriels

Mémoire de Fin d'Etudes  
En vue de l'obtention du diplôme:

**MASTER**

*Thème*

# Réduction de Modèle d'un Procédé Thermique

Présenté par :  
SAFIDDINE SAID

Avis favorable de l'encadreur :  
M. MIHI Assia      signature

Avis favorable du Président du Jury

M. RECHID Naima

Cachet et signature

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche scientifique



Université Mohamed Khider Biskra  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie Electrique  
Filière : Automatique  
Option : Génie des Systèmes Industriels

# *Thème :*

## Réduction de Modèle d'un Procédé Thermique

Proposé par : M. MIHI ASSIA

Dirigé par : M. MIHI ASSIA

### Résumé

Lorsque le modèle du procédé contient un retard pur important, une méthode de réduction du modèle est nécessaire. Où le modèle à un retard pur est approché par un modèle réduit en assurant que les marges de robustesse, obtenues avec le correcteur conçu basé sur le modèle réduit, seront au moins les mêmes avec le modèle à un retard pur.

L'objectif de ce travail est de présenter les fondements de la méthodologie de réduction du modèle pour obtenir le modèle réduit du système réel. Une application d'un procédé thermique qui est un système contient un retard pur est discuté. Les résultats obtenues sont comparés à une synthèse par placement des pôles de la boucle fermée sous forme RST.

### ملخص.

في حالة وجود نموذج تركيبية تحتوي على تأخير معتبر.. عملية التخفيض ضرورية للنموذج الذي يحتوي على تأخير مع المحافظة على خصائص النظام الاصيلي.

الهدف من هذا العمل طرح منهجيه اساسيه للتخفيض من اجل الحصول على نموذج حقيقي. نقوم بالتطبيق على تركيبية حرارية وهي نموذج تحتوي على تأخير. النتائج المتحصل عليها يتم تحليلها عن طريق اعاده تمركز الاقطاب لحلقة مغلقة من نوع (RST)



# Remerciement

*Avant tout, Je remercie, notre créateur ALLAH le tout puissants que nous a donné la force et la volonté pour terminer ce travail...*

*Je remercie mon encadreur M. Mihi Assia, qui m'a proposé ce sujet et dirigé mon travail*

*Je tiens à remercier très vivement Madame RECHID Naima, enseignant à l'université de Mohamed Khider-Biskra pour nous avoir fait l'honneur de présider notre jury.*

*Je remercier très sincèrement Madame TERKI Nadjiba, enseignant Maître de conférences a l'université de Mohamed Khider-Biskra avoir voulu membre de notre jury.*

*Je veux remercier tous les enseignants de département d'automatique de l'université Mohamed Khider-Biskra et le département d'électrotechnique de l'université Ferhat Abbas Sétif qui ont contribué à notre formation.*

*Je veux remercier spécialement les enseignants qui m'ont beaucoup aidé durant mes années d'étude, Mébarkia Aicha, Nouar Mbarka, Magherbi Hassina, Mokadem Diab.*

*Je remercie tous les personnes qu'ils ont facilité la réalisation de ce travail.*

## Liste des tableaux

<b>Tableau II.1</b>	<b>Degrés des polynômes du régulateur sans intégration supplémentaire</b>	<b>29</b>
<b>Tableau II.2</b>	<b>degrés des polynômes du régulateur avec intégration supplémentaire</b>	<b>29</b>

---

# Liste des figures

<b>Figure. II.1 :</b>	<b>structure de commande RST.</b>	<b>22</b>
<b>Figure. II.2 :</b>	<b>emplacement polaire.</b>	<b>30</b>
<b>Figure. III.1 :</b>	<b>Maquette d'un procédé thermique</b>	<b>38</b>
<b>Figure. III.2 :</b>	<b>Comparaison le diagramme de bode du modèle complet et le modèle réduit ncfmr.</b>	<b>39</b>
<b>Figure. III.3 :</b>	<b>Réponse indicielle du modèle complet.</b>	<b>40</b>
<b>Figure. III.4 :</b>	<b>Diagramme de nyquist du modèle complet.</b>	<b>40</b>
<b>Figure. III.5 :</b>	<b>Comparaison la réponse indicielle du modèle complet et le modèle réduit ncfmr.</b>	<b>41</b>
<b>Figure III.6:</b>	<b>Comparaison entre le diagramme de nyquist du modèle complet et réduit ncfmr.</b>	<b>41</b>
<b>Figure III.7:</b>	<b>Comparaison le diagramme de bode du modèle complet et le modèle réduit schurmr.</b>	<b>43</b>
<b>Figure. III.8 :</b>	<b>Comparaison la réponse indicielle du modèle complet et le modèle réduit schurmr.</b>	<b>44</b>
<b>Figure. III.9 :</b>	<b>comparaison entre le diagramme de nyquist du modèle complet et réduit schurmr.</b>	<b>44</b>
<b>Figure. III.10 :</b>	<b>Comparaison le diagramme de bode du modèle complet et le modèle réduit modreal.</b>	<b>45</b>
<b>Figure. III.11 :</b>	<b>Comparaison la réponse indicielle du modèle complet et modèle réduit modreal.</b>	<b>46</b>
<b>Figure. III.12 :</b>	<b>Comparaison entre le diagramme de nyquist du modèle complet et réduit modreal.</b>	<b>46</b>
<b>Figure. III.13 :</b>	<b>Comparaison le diagramme de bode du modèle complet et le modèle réduit stabproj.</b>	<b>48</b>
<b>Figure. III.14 :</b>	<b>Comparaison la réponse indicielle du modèle complet et modèle réduit stabproj.</b>	<b>48</b>
<b>Figure. III.15 :</b>	<b>Comparaison entre le diagramme de nyquist du modèle complet et réduit stabproj.</b>	<b>49</b>
<b>Figure. III.16 :</b>	<b>Comparaison le diagramme de bode du modèle complet et le modèle réduit slowfast.</b>	<b>50</b>
<b>Figure. III.17 :</b>	<b>Comparaison la réponse indicielle du modèle complet et modèle réduit slowfast.</b>	<b>51</b>

<b>Figure. III.18:</b>	<b>Comparaison entre le diagramme de nyquist du modèle complet et réduit slowfast.</b>	<b>51</b>
<b>Figure. III.19:</b>	<b>Sortie du système complet après régulation.</b>	<b>52</b>
<b>Figure. III.20 :</b>	<b>les pôles et les zéros du système complet avant régulation.</b>	<b>53</b>
<b>Figure. III.21 :</b>	<b>les pôles et les zéros du système complet après régulation.</b>	<b>53</b>
<b>Figure. III.22 :</b>	<b>Sortie du système ncfmr après régulation.</b>	<b>54</b>
<b>Figure. III.23 :</b>	<b>les pôles et les zéros du système ncfmr avant régulation.</b>	<b>54</b>
<b>Figure. III.24:</b>	<b>les pôles et les zéros du système ncfmr après régulation.</b>	<b>55</b>
<b>Figure III. 25</b>	<b>Sortie du système schurmr après régulation.</b>	<b>55</b>
<b>Figure. III. 26 :</b>	<b>les pôles et les zéros du système schurmr avant régulation.</b>	<b>56</b>
<b>Figure III.27 :</b>	<b>les pôles et les zéros du système schurmr après régulation.</b>	<b>56</b>
<b>Figure III.28 :</b>	<b>Sortie du système modreal après régulation.</b>	<b>57</b>
<b>Figure III.29 :</b>	<b>les pôles et les zéros du système modreal avant régulation.</b>	<b>57</b>
<b>Figure III.30 :</b>	<b>les pôles et les zéros du système modreal après régulation.</b>	<b>58</b>
<b>Figure III.31 :</b>	<b>Sortie du système stabproj après régulation.</b>	<b>58</b>
<b>Figure. III.32 :</b>	<b>les pôles et les zéros du système stabproj avant régulation.</b>	<b>59</b>
<b>Figure III.33 :</b>	<b>les pôles et les zéros du système stabproj après régulation.</b>	<b>59</b>
<b>Figure III.34 :</b>	<b>Sortie du système slowfast après régulation.</b>	<b>60</b>
<b>Figure III.35 :</b>	<b>les pôles et les zéros du système slowfast avant régulation.</b>	<b>60</b>
<b>Figure III.36 :</b>	<b>les pôles et les zéros du système slowfast après régulation</b>	<b>61</b>
<b>Figure III. 37 :</b>	<b>Réponse temporelles des modèles réduits vis-à-vis d'un échelon de référence.</b>	<b>61</b>

**LTI** : Linéaire en temps invariante

**LQG** : Synthèse optimale

**H $\infty$**  : Commande robuste

**IRG** : Grammien de la réponse impulsionnel

**SISO** : Une seul entrée et une seul sortie

**$Y_c(s)$**  : La consigne

**$Y(s)$**  : La sortie

**$D(s)$**  : Perturbation de charge

**$W(s)$**  : Bruit de mesure

**Ncfmr** : Méthode de Troncation modèle équilibrée pour des facteurs copremiers normaux

**Schurmr** : Méthode de Troncation modèle équilibrée par l'intermédiaire de Schur

**Modreal** : Méthode de Réalisation et projection de forme modale

**Stabproj** : Méthode de Projection stable et instable

**Slowfast** : Méthode de décomposition du système en mode lente et rapide

**P** : Grammien de commandabilité

**Q** : Grammien de contrôlabilité

**Gred** : Modèle d'ordre réduit

**Redinfo** : Une rangée structurale

## Sommaire

INTRODUCTION GENERALE.....	1
<b>CHAPITRE I REDUCTION DE MODELES</b>	
I.1 Introduction.....	3
I.2 Réduction par diagonalisation.....	3
I.2.1 Négliger la partie rapide .....	4
I.2.2 Négliger la dynamique des modes rapides.....	4
I.3 Agrégation.....	5
I.4 Perturbations singulières.....	7
I.5 Réduction de modèles par décomposition de Schur.....	8
I.6 Réalisation équilibré.....	10
I.6.1 Cas continu.....	12
I.6.2 Cas discret.....	14
I.6.3 Réalisation approchée.....	15
I.7 Approximation de Padé.....	17
I.8 Réduction optimale.....	18
I.9 Méthode de troncature modale.....	20
I.10 Méthode de troncature équilibrée.....	21
I.11 réduction de modèles à l'aide de grammiens de réponse impulsionnelle.....	21
I.12 Conclusion.....	22
<b>Chapitre II REGULATEUR RST</b>	
II.1 Introduction.....	23
II.2 Architecture et cadre d'application.....	23
II.3 Principe de synthèse du régulateur.....	24
II.3.1 Comportement en régime transitoire du système bouclé.....	24
II.3.2 Résolution de l'équation de Diophante.....	26
II.3.3 Choix de la fonction de transfert modèle.....	29
II.3.3.1 Choix du polynôme caractéristique en boucle fermée $A_m$ .....	29
II.3.3.2 Choix du numérateur, poursuite d'une consigne $B_m$ .....	31
II.3.3.3 Séparation des dynamiques vis-à-vis de consigne et des perturbations..	34
II.4 Cas des zéros.....	34
II.5 Conclusion.....	35

### CHAPITRE III SIMULATION ET RESULTATS

III.1 Introduction.....	37
III.2 Description du système.....	37
III.3 Résultats de simulation.....	38
III.3.1 Méthode de Troncation modèle équilibrée pour des facteurs copremiers normaux.....	38
III.3.2 Méthode de Troncation modèle équilibrée par l'intermédiaire de méthode de Schur.....	41
III.3.3 Méthode de Réalisation et projection de forme modale.....	45
III.3.4 Méthode de Projection stable et instable.....	47
III.3.5 Méthode de décomposition du système en mode lente et rapide.....	49
III.4 Conclusion.....	51
<b>CONCLUSION GENERALE.....</b>	<b>63</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE.....</b>	<b>64</b>

### Introduction générale

De nombreux procédés industriels peuvent être modélisés par des systèmes linéaires invariants dans le temps (LTI). En conséquence, au cours des dernières décennies, de nombreuses méthodes avancées de synthèse de commandes ont été développées pour de tels systèmes. On peut citer la synthèse optimale LQG, la commande robuste  $H_\infty$ .

Pourtant, ces méthodes sont encore insuffisamment ou pas utilisées dans l'industrie plusieurs raisons peuvent expliquer ce constat :

- Tout d'abord, les méthodes avancées de l'automatique reposent sur un modèle mathématique du système physique contrôlé qui n'est souvent obtenu qu'aux prix d'efforts considérables. En pratique, le modèle des systèmes physiques, utilisé pour la synthèse de la commande, doit être précisément construit dans cette optique là. En effet d'un côté s'il est «trop» complexe, il est inexploitable pour la synthèse, d'un autre côté, s'il est «trop» simple, il ne rend pas suffisamment bien compte du comportement du système.

- puis, ces approches produisent le plus souvent des correcteurs d'ordres élevés qui ne sont pas souhaités en pratique. En effet, dans un contexte industriel, due aux contraintes du cout de fabrication et d'implémentation, les régulateurs d'ordres réduits sont le plus souvent désirés.

En raison des exigences de précision de l'ingénierie des systèmes complexes, des modèles d'ordres élevés sont souvent nécessaires pour représenter les systèmes réels par contre, la mise en œuvre régulateurs basés sur les modèles d'ordres élevés pourra s'avérer être une tâche très couteuse en capacité de calcul.

Dans le cas des systèmes d'ordres élevés, une méthode de réduction de modèle est nécessaire. Un système d'ordre élevé peut être suffisamment bien approché par un modèle d'ordre réduit, sur une bande de fréquence limitée.

Toutefois, en pratique, des régulateurs d'ordres réduits sont souvent exigés pour la mise en œuvre en temps réel. Par conséquent, la réduction de modèle joue un rôle fondamental dans la conception de commandes pour les systèmes dynamiques. Dans la littérature, de nombreuses méthodes ont été développées pour réduire l'ordre d'un système donné.

Les méthodes de réduction ont été initialement introduites par les automaticiens dans le but de contrôler différents processus. Il s'agit de remplacer un modèle détaillé d'origine par un modèle d'ordre faible plus adapté et pour réaliser ce projet la présence du régulateur est essentiel.

L'objectif de ce travail est de présenter les fondements de la méthodologie de réduction de modèle pour obtenir le modèle réduit du système réel. Une application d'un procédé qui est un système contient un retard pur important.

Les résultats obtenus sont comparés à une synthèse par placement des pôles de la boucle fermée sous forme RST. Etant donné que l'objectif de la réduction du modèle est de synthétiser un régulateur pour le système réel (le modèle réduit n'est utilisé que comme un moyen pour concevoir le correcteur), ce qui est important n'est pas l'erreur entre le système réel et le modèle réduit, mais le comportement en boucle fermée obtenu pour le système réel.

Le mémoire est organisé de la manière suivante :

Le chapitre est consacré à la réduction ou simplification des systèmes complexes avec un retard. Où quelques méthodes de réduction existantes dans les littératures sont présentées.

Le chapitre 2 est dédié à l'analyse et la synthèse de régulateur RST basé sur le concept de placement des pôles.

Dans le chapitre 3, les résultats obtenus en simulation sont présentés.

Enfin, une conclusion générale.

## I.1 Introduction

En raison du progrès rapide réalisé dans les moyens et outils de calcul, l'automaticien est de plus en plus amené à traiter des systèmes avec un grand retard. Ces derniers sont difficiles à manipuler et posent de nombreux problèmes numériques, technologiques, etc.

Ainsi, la simplification des systèmes physiques présente un intérêt indéniable pour l'ingénieur et a été largement étudiée dans la littérature. En particulier, pour les systèmes linéaires, il existe une bibliographie abondante où l'on peut trouver de nombreuses méthodes de réduction de modèles. On peut exhiber deux classes de méthodes : fréquentielles et temporelles.

Dans ce chapitre, l'accent est mis sur les méthodes temporelles qui sont largement détaillées et discutées. Dans la suite nous considérons un système continu, supposé commandable et observable, décrit par la représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

Avec  $\dim(x) = n \times 1$ ,  $\dim(u) = p \times 1$  et  $\dim(y) = m \times 1$ .

On se propose de chercher un modèle réduit de dimension  $r$  conservant certaines propriétés intéressantes du système initial (I.1) (stabilité, comportements statique et dynamique, observabilité, commandabilité). Ce modèle réduit est supposé régi par les équations d'état.

$$\begin{cases} \dot{z} = Fz + Gu \\ \hat{y} = Hz \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

Où  $\dim(z) = r \times 1$ . Les matrices  $F, G$  et  $H$  sont de dimensions appropriées qu'il s'agira de déterminer.

## I.2 réduction par diagonalisation

Considérons une partition du système (I.1) en deux sous-systèmes :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ y = Cx = [C_1 \ C_2] x \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

Si  $A$  est diagonalisable alors  $\Lambda = V^{-1}AV$  est une matrice diagonale,  $V$  étant la matrice modale de  $A$ . sans perte de généralité, on suppose que  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$  avec  $\text{Re}(\lambda_i) \geq \text{Re}(\lambda_{i+1})$ .

Effectuons alors le changement de variables

$$x = Vz = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Où  $\dim V_1 = r \times r$ . le système (I.3) devient

$$\begin{cases} \dot{z} = \Lambda z + V^{-1}Bu = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} u \\ y = CVz = [M_1 \ M_2] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Plusieurs stratégies de simplification sont alors possibles :

### II.2.1 Négliger la partie rapide

Ceci revient à imposer  $z_2 = 0$ , d'où

$$\begin{cases} x_1 = V_1 z_1 \\ x_2 = V_2 z_1 \end{cases}$$

On en tire :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \Lambda_1 z_1 + E_1 u \\ \hat{y} = M_1 z_1 \end{cases}$$

Finalement, on obtient le modèle réduit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1 x_1 + G_1 u \\ \hat{y} = H x_1 \end{cases}$$

Avec

$$\begin{cases} F = V_1 \Lambda_1 V_1^{-1} \\ G = V_1 E_1 \\ H = M_1 V_1^{-1} \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

### II.2.2 Négliger la dynamique des modes rapides

En première approximation, on peut considérer que les modes rapides agissent instantanément sur le système. On ne retient donc que leur apport statique.

Ceci se traduit mathématiquement par  $\dot{z}_2 = 0$ . En utilisant l'équation modale du système, on obtient

$$z_2 = -\Lambda_2^{-1} E_2 u$$

Puis

$$x_1 = V_1 z_1 + V_2 z_2 = V_1 z_1 - V_2 \Lambda_2^{-1} E_2 u$$

Ou encore

$$z_1 = V_1^{-1} (x_1 + V_2 \Lambda_2^{-1} E_2 u)$$

Que l'on remplace dans l'expression de  $\dot{z}_1$  :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \Lambda_1 z_1 + E_1 u \\ &= \Lambda_1 V_1^{-1} x_1 + \Lambda_1 V_1^{-1} V_2 \Lambda_2^{-1} E_2 u + E_1 u \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = V_1 \Lambda_1 V_1^{-1} x_1 + (V_1 E_1 + V_1 \Lambda_1 V_1^{-1} V_2 \Lambda_2^{-1} E_2) u \\ \hat{y} = M_1 V_1^{-1} x_1 + (M_1 V_1^{-1} V_2 \Lambda_2^{-1} E_2 - M_2 \Lambda_2^{-1} E_2) u \end{cases}$$

Finalement, le modèle réduit s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = Fx_1 + Gu \\ \hat{y} = Hx_1 + Du \end{cases}$$

Avec

$$\begin{cases} F = V_1\Lambda_1V_1^{-1} \\ G = V_1E_1 + V_1\Lambda_1V_1^{-1}V_2\Lambda_2^{-1}E_2 \\ H = M_1V_1^{-1} \\ D = M_1V_1^{-1}V_2\Lambda_2^{-1}E_2 - M_2\Lambda_2^{-1}E_2 \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

### I.3 Agrégation

La méthode d'agrégation consiste à passer de (I.1) à (I.2) en utilisant une matrice d'agrégation  $K$  telle que  $z = Kx$ , ce qui donne les conditions :

$$FK = KA \quad (\text{I.6})$$

$$G = KB \quad (\text{I.7})$$

Si on connaît  $K$ , les solutions  $F$  et  $G$  sont données par :

$$\begin{cases} F = KAK^* \\ G = KB \end{cases} \quad (\text{I.8})$$

où  $K^*$  est une matrice qui vérifie  $KK^* = I$ . Cette matrice  $K^*$  n'est pas unique mais on prend souvent la pseudo-inverse  $K^+$  de  $K$  ce que l'on fera dans ce qui suit. En particulier, ici

$$K^* = K^T(KK^T)^{-1} \quad (\text{I.9})$$

Vérifie bien  $KK^* = I$ .

On voit que le calcul explicite de  $F$  et  $G$  par (I.8) nécessite la connaissance de la matrice d'agrégation  $K$ . Quand à la matrice de sortie  $H$  du modèle réduit, elle n'intervient pas directement dans les conditions d'agrégation. Toutefois, il existe de nombreuses méthodes permettant sa détermination :

Calcul de la matrice de sortie

En première approximation, on peut considérer que  $\hat{y} \cong Cx$  d'où déduit

$$C = HK$$

Donc une première solution peut être

$$H = CK^+ \quad (\text{I.10})$$

Cette expression est toutefois peu satisfaisante car elle induit souvent des résultats très grossiers.

Si le système initial ne possède pas de pôles à l'origine, alors la matrice d'état  $A$  est inversible. Dans ce cas, la matrice d'observation  $H$  peut être calculée de manière à rendre égaux les gains statiques du système et du modèle réduit, ce qui se traduit par :

$$HF^{-1}G = CA^{-1}B$$

d'Où

$$H = (CA^{-1}B)(F^{-1}G)^+ \quad (\text{I.11})$$

Lorsque la matrice d'état  $A$  est singulière, une autre expression peut être obtenue en utilisant la matrice adjointe découlent de la formule classique du calcul d'un inverse matriciel. En effet, il est assez facile de montrer que :

$$H = \frac{1}{\prod_{i=r+1}^n (-\lambda_i)} C \text{adj}(A)B[\text{adj}(F)G]^+ \quad (\text{I.12})$$

Où  $\text{adj}(A)$  désigne l'adjointe de  $A$  et peut être calculée en utilisant la relation

$$\text{adj}(A) = A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \dots + a_{n-1} I_n,$$

Les  $a_i$  sont les coefficients du polynôme caractéristique

$$\det(sI - A) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n.$$

La formule (I.12) s'applique à tout système continu mais uniquement pour la méthode d'agrégation. Quand à la relation (I.11) ; elle est valable pour toutes les méthodes de réduction mais s'applique uniquement aux systèmes continus sans intégrateur. Les équivalents des formules (I.11) et (I.12) dans le cas des systèmes discrets sont laissés aux bons soins du lecteur.

Voyons maintenant comment calculer  $K$  :

Première méthode : Utilisation de la matrice de commandabilité

Soit  $\Delta = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$  la matrice de commandabilité associée au système (I.1).

Alors on a successivement :

$$\begin{aligned} K\Delta &= [KB \ KAB \ \dots \ KA^{n-1}B] \\ &= [G \ FKB \ \dots \ KA^{n-1}KB] \text{ En utilisant (I.6) et (I.7)} \\ &= [G \ FG \ \dots \ F^{n-1}G] \text{ d'après (I.7)} \end{aligned}$$

$\Delta$  étant de rang plein  $n$ , on en déduit :

$$K = [G \ FG \ \dots \ F^{n-1}G] \Delta^+ \quad (\text{I.13})$$

Ici, on peut prendre

$$\Delta^+ = \Delta^T (\Delta \Delta^T)^{-1} \quad (\text{I.14})$$

Si  $A$  et  $B$  sont sous la forme compagne de commandabilité d'un système SISO, alors  $\Delta = I$  et l'on obtient dans ce cas :

$$K = [G \ FG \ \dots \ F^{n-1}G] \quad (\text{I.15})$$

Deuxième méthode : décomposition spectrale

On démontre que

$$K = T[\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_r]^T \quad (\text{I.16})$$

Où les  $w_i$  sont les vecteurs propres de  $A^T$  associés aux  $r$  valeurs propres dominantes et  $T$  est une matrice  $r \times r$  inversible quelconque. Dans le cas particulier où toutes les valeurs propres de  $A$  sont distinctes on a :

$$K = T[L_r; 0_{r,n-r}]V^{-1} \quad (I.17)$$

Où  $V$  est la matrice modale de  $A$ . En particulier, dans (I.16) et (I.17), on peut prendre  $L_r = I_r$ .

Propriétés du modèle agrégé

1) Les valeurs propres de  $F$  sont valeurs propres de  $A$

En effet, soit  $\lambda_i$  valeur propre de  $A$  et  $v_i$  un vecteur propre associé, alors :

$$KAv_i = FKv_i = \lambda_i K v_i.$$

Ainsi, si  $Kv_i \neq 0$ , alors c'est un vecteur propre de  $F$  avec la même valeur propre  $\lambda_i$ . Ceci justifie l'utilisation de la structure propre du système pour calculer la matrice d'agrégation  $K$ .

2) Commandabilité

Supposons  $\{A, B\}$  commandable, alors  $\Delta = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$  est de rang  $n$ , donc  $K\Delta$  est de rang  $r$  si  $\text{rang}(K) = r$ .

Où  $K\Delta = [F \ FG \ \dots \ F^{n-1}G]$ , donc la paire  $\{F, G\}$  est commandable.

3) Caractérisation de  $K$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un modèle agrégé de (1) par l'opération linéaire  $K$  est que le noyau  $\mathcal{N}(K)$  de  $K$  soit invariant par  $A$  ( $A\mathcal{N}(K) \subset \mathcal{N}(K)$ ).

#### I.4 perturbation singulières

On suppose ici que la dynamique du système peut être décrite par des équations de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \\ \varepsilon \dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u \\ y = C_1x_1 + C_2x_2 + Du \end{cases} \quad (I.18)$$

Où  $A_{11}$  contient la partie dominante du système (modes lents). Le coefficient  $\varepsilon$  est un paramètre de très faible valeur. Si on fait tendre  $\varepsilon$  vers 0, on obtient, (en supposant  $A_{22}$  inversible)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})x_1 + (B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2)u \\ y = (C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21})x_1 + D - C_2A_{22}^{-1}B_2)u \end{cases} \quad (I.19)$$

C'est le modèle réduit recherché.

On remarque l'existence dans le modèle réduit d'un terme en  $u$  (transmittance directe) dans l'équation de sortie du modèle réduit (I.19) même si  $D = 0$  dans le système de départ (I.18).

La méthode des perturbations singulières possède les propriétés suivantes :

- le modèle réduit a le même gain statique que le système initial ; pour le vérifier, il suffit de se rappeler que le gain statique s'obtient en faisant  $\dot{x}_1 = 0$  et  $\dot{x}_2 = 0$
- le modèle réduit est stable si le système initial est stable ;
- elle permet de conserver la structure physique du système si sa représentation d'état se présente sous la forme (I.18) de façon naturelle.

**Exemple I.1 :** considérons le système décrit par sa fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{24}{(1 + \varepsilon s)(1 + 0.5\varepsilon s)(1 + 2s)(1 + 5s)}$$

Ou de façon équivalente par ses équations d'état :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \varepsilon \dot{x}_3 \\ \varepsilon \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u \\ y = x_1 \end{cases}$$

Ce système est parfaitement à l'ordre 2 pour  $\varepsilon = 0$ . On peut vérifier que l'application des formules (I.19) donne le modèle d'état

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.4 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Ce modèle réduit par perturbations singulières peut être comparé au système réel  $G(s)$  dans lequel  $\varepsilon$  n'est pas parfaitement nul mais reste négligeable.

### I.5 réduction de modèles par décomposition de Schur

Dans les paragraphes précédents, nous avons vu la nécessité de partitionner le système à réduire en deux sous-systèmes dont on ne conserve que la partie dominante. Cette partition peut dans certains cas être réalisée physiquement ou plus systématiquement à l'aide d'une décomposition spectrale de la matrice d'état du système. Cette dernière méthode pose toutefois des problèmes numériques dans le cas d'un système possédant des pôles multiples. Il est possible de remédier à cet inconvénient grâce à la décomposition de Schur qui est une procédure numériquement robuste assurant une partition systématique de tout système linéaire. On verra de surcroît que l'utilisation de cette décomposition permet de combiner les approches agrégation et perturbations singulières et qu'elle permet également d'éviter le calcul de

l'inverse de la matrice de passage. La décomposition de Schur de la matrice d'état  $A$  du système décrit par les équations (I.1) est définie par :

$$\begin{cases} S = U^T A U \\ = \begin{bmatrix} S_1 & S_{12} \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{I.20})$$

Où  $S_1$  et  $S_2$  sont des matrices triangulaire supérieures et l'on suppose que  $S_1$  contient les valeurs propres dominantes  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ , la matrice  $U$  est matrice de transformation unitaire. En effectuant le changement de variable  $w = U^T x$ , le système (I.1) équivaut à :

$$\begin{cases} \dot{w} = S w + U^T B u \\ y = C U x \end{cases} \quad (\text{I.21})$$

Ou encore avec  $w = [z \ w_2]^T$ , où  $\dim(z) = r$  et  $U^T B = [B_1 \ B_2]^T$  :

$$\begin{cases} \dot{z} = S_1 z + S_{12} w_2 + B_1 u \\ \dot{w}_2 = S_2 w_2 + B_2 u \\ y = C_1 z + C_2 w_2 \end{cases}$$

Plusieurs approches sont alors envisageables :

- Agrégation

Dans ce cas,  $w_2 = 0$  et par suite

$F = S_1$  Et  $G = B_1$  la matrice d'agrégation est :

$$K = [I_r \ : \ 0] U^T$$

Et il est facile de montrer que

$$S_1 K = K A \text{ Et } G = K B.$$

- Perturbation singulières :

On considère que  $\dot{w}_2 = 0$ , d'où l'on déduit, en remarquant que  $S_2^{-1}$  existe toujours :

$w_2 = -S_2^{-1} B_2 u$ , puis

$$\dot{z} = S_1 z + (B_1 - S_{12} S_2^{-1} B_2) u$$

Soit

$$\begin{cases} F = S_1 \\ G = B_1 - S_{12} S_2^{-1} B_2 \end{cases}$$

Pour la matrice de sortie  $H$ , on peut prendre

$$H = C_1$$

Et dans ce cas, il apparaît une matrice constante de transmittance directe

$$D = -C_2 S_2^{-1} B_2$$

Le modèle réduit a pour équations d'état

$$\begin{cases} \dot{z} = F z + G u \\ y = H z + D u \end{cases} \quad (\text{I.22})$$

La présence du terme  $D$  est très gênante ; on préfère alors prendre  $y = Hz$  avec  $H$  calculé de façon à récupérer le gain statique du système initial et ce, en utilisant la formule (I.12).

### Exemple I.2

1) Soit le système à pôles multiples décrit par sa fonction de transfert

$$G(s) = \frac{16}{(s+1)(s+4)^2}$$

Il est clair que le modèle agrégé d'ordre 1 conservant le gain est donné par :

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}$$

Toutefois, pour illustrer la procédure de réduction par la décomposition de Schur, considérons une représentation d'état de  $G(s)$

$$A = \begin{bmatrix} -9 & -24 & -16 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } C = [0 \quad 0 \quad 16].$$

On a

$$U = \begin{bmatrix} 0.577 & -0.802 & 0.154 \\ -0.577 & -0.267 & 0.772 \\ 0.577 & 0.535 & 0.617 \end{bmatrix}$$

ET

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 3.240 & 16.838 \\ 0 & -4 & 24.249 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Il est alors clair que le modèle réduit ayant même gain que le système initial, ie.1, est bien  $G_1(s)$ . le lecteur pourra montrer que l'on obtient le même modèle réduit d'ordre 1 pour le système de fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{16}{(s+1)(s+4)^2}$$

Remarquons qu'il n'est pas possible ici de déterminer un modèle réduit d'ordre 2.

## I.6 Réalisation équilibrée

Dans cette section, l'ensemble des réalisations de dimension  $n$  sera noté  $C^n$  dans le cas continu et  $D^n$  dans le cas discret. Nous noterons  $C_e^n$  (resp  $D_e^n$ ) le sous-ensemble des réalisations équilibrées dans le cas continu (resp discret).

### I.6.1 Cas continu

Pour le système continu (I.1), on définit :

- Le gramien de commandabilité :

$$W_c = \int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t} dt, \text{ Solution de l'équation lyapunov}$$

$$AW_c + W_c A^T = -BB^T \quad (I.23)$$

- Le gramien d'observabilité :

$$W_0 = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \text{ Qui est solution de}$$

$$A^T W_0 + W_0 A = -C^T C \quad (I.24)$$

Les équivalents fréquentiels de  $W_c$  et de  $W_0$  sont obtenus par application du théorème de parseval :

$$W_c = \frac{1}{2\pi j} \int_0^\infty f(s) f^*(s) ds, \text{ avec } f(s) = (sI - A)^{-1} B$$

Et

$$W_0 = \frac{1}{2\pi j} \int_0^\infty g^*(s) g(s) ds, \text{ avec } g(s) = C(sI - A)^{-1}.$$

Remarque : Soit

$$H = \begin{bmatrix} j_0 & j_1 & \dots \\ j_1 & j_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (I.25)$$

La matrice de Hankel infinie où  $j_k = CA^k B$  sont les paramètres de Markov du système  $\{A, B, C\}$ . Alors on a

$$H = \Gamma \Delta$$

avec  $\Gamma$  (resp.  $\Delta$ ) Matrice infinie d'observabilité (resp. de commandabilité). De plus, les gramien

$$W_c = \Delta \Delta^T \text{ et } W_0 = \Gamma^T \Gamma$$

Sont des matrices finies de dimension  $n \times n$ .

**Théorème I.1 :** les valeurs propres de  $W_c W_0$  sont invariantes par changement de base dans l'espace d'état.

Démonstration : soit  $z = Tx$  alors

$$R = \{A, B, C\} \rightarrow R_T = \{TAT^{-1}, TB, CT^{-1}\}$$

Donc

$$\begin{cases} \Delta \rightarrow T\Delta \\ \Gamma \rightarrow \Gamma T^{-1} \end{cases}$$

Et par suite :

$$\begin{cases} W_c \rightarrow TW_c T^T \\ W_0 \rightarrow (T^{-1})^T W_0 T^{-1} \end{cases}$$

Finalement

$$W_c W_0 \rightarrow (TW_c T^T)(T^{-T} W_0 T^{-1}) = TW_c W_0 T^{-1}.$$

**Définition I.1 :** Soit  $R = \{A, B, C\}$  une réalisation minimale stable.

$R$  Est dite équilibrée si et seulement si les solutions de (I.23) et (I.24) vérifient

$$W_c = W_0 = \Sigma = \text{diag}(\sigma_i)$$

Où les  $\sigma_i$ , appelées valeurs singulières de , sont données par :

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(W_c W_0)} \quad (\text{I.26})$$

Le résultat suivant assure l'existence d'une telle réalisation et on donne une caractérisation.

**Théorème I.2 :** Soit  $R = \{A, B, C\} \in C^n$  .Il existe une transformation  $T$  telle que  $\{TAT^{-1}, TB, CT^{-1}\}$  soit équilibrée.

De plus,  $R$  est équilibrée si et seulement si, il existe une matrice diagonale  $\Sigma > 0$

Telle que :

$$A\Sigma + \Sigma A^T = -BB^T \quad (\text{I.27})$$

Et

$$A^T \Sigma + \Sigma A = -C^T C \quad (\text{I.28})$$

Dans ce cas, on a  $W_0 = W_c = \Sigma$  .

Une partition quelconque d'une réalisation équilibrée est toujours stable ; c'est ce résultat qui rend cette approche attractive pour la réduction de modèles :

**Théorème I.3 :** Soit  $R = \{A, B, C\} \in C_e^n$ . Considérons la partition

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, C = [C_1 \ C_2]$$

Et

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix}$$

Alors  $\{A_{ii}, B_i, C_i\} \in C_e^{n_i}$ ,  $i = 1, 2$  si  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  n'ont pas de valeurs propres communes.

Calcul pratique de la transformation équilibrante :

Effectuons une décomposition de Choleski de  $W_0$

$$W_0 = R^T R$$

Et considérons la matrice  $RW_c R^T$  qui est symétrique définie positive et donc unitairement diagonalisable, soit :

$$RW_c R^T = U \Sigma^2 U^T$$

avec

$$U^T U = I \text{ et } \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n), \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n.$$

Alors

$$T = \Sigma^{-1/2} U^T R$$

Est une transformation donnant un système avec une réalisation équilibrée. En effet :

$$\begin{aligned} T W_c T^T &= \Sigma^{-1/2} U^T R W_c R^T U \Sigma^{-1/2} \\ &= \Sigma^{-1/2} U^T U \Sigma^2 U^T U \Sigma^{-1/2} = \Sigma \end{aligned}$$

Et de même

$$(T^{-1})^T W_0 T^{-1} = \Sigma.$$

**Choix pratique de l'ordre  $r$  du modèle réduit :**

- On utilise le critère :

$$[\sum_{i=1}^r \sigma_i^2]^{1/2} \geq [\sum_{i=r+1}^n \sigma_i^2]^{1/2} \tag{I.29}$$

$r$  est donc cherché de façon récurrente.

- On dispose également d'une mesure de l'erreur de réduction, où  $G(s)$  et  $\bar{G}(s)$  sont les matrices de transfert du système initial et du modèle réduit :

$$\|G(j\omega) - \bar{G}(j\omega)\|_\infty \leq 2 \sum_{i=r+1}^n \sigma_i, \text{ Pour tout } \omega \tag{I.30}$$

Où

$$\|H\|_\infty = \sup_{\omega} \sqrt{\lambda(H(j\omega)H^*(j\omega))} = \sigma_{max}(H(j\omega)).$$

**Exemple I.3:** reprenons le système

$$G(s) = \frac{s + 24}{(s + 1)(s + 2)(s + 6)} = \frac{4.6}{s + 1} - \frac{5.5}{s + 2} + \frac{0.9}{s + 6}$$

Qui peut être décrit par la représentation d'état :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } C = [4.6 \quad -5.5 \quad 0.9].$$

La transformation  $T$  permettant de passer à une réalisation équilibrée est donnée par :

$$T = \begin{bmatrix} 2.811 & -2.007 & 0.117 \\ -1.861 & 3.258 & -0.399 \\ 0.405 & -1.043 & 1.023 \end{bmatrix}$$

La solution équilibrée  $\bar{R}$  correspondante est alors la suivante

$$\bar{R} = \left\{ \begin{bmatrix} -0.344 & 0.929 & -0.285 \\ -0.929 & -2.043 & 1.652 \\ -0.285 & -1.652 & -6.613 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.921 \\ 0.998 \\ 0.385 \end{bmatrix}, [0.921 \quad -0.998 \quad 0.385] \right\}$$

Le modèle réduit d'ordre 2 a donc pour fonction de transfert

$$G_2(s) = \frac{-0.148s + 3.098}{s^2 + 2.387s + 1.566}$$

Qui est un système à non minimum de phase.

### I.6.2 Cas discret

Des développements similaires au cas continu peuvent être faits pour les systèmes discrets. On commence par définir :

- Le gramien de commandabilité :

$$W_c = \sum_0^{\infty} A^k B B^T (A^k)^T$$

Qui est solution de l'équation de Lyapunov :

$$A W_c A^T - W_c = -B B^T$$

- Le gramien d'observabilité :

$$W_0 = \sum_0^{\infty} (A^k)^T C^T C A^k,$$

Solution de

$$A^T W_0 A - W_0 = -C^T C$$

Une réalisation  $\{A, B, C\}$  d'un système discret est dite équilibrée si est seulement si

$W_0 = W_c = \Sigma$ , Matrice diagonale.

**Théorème I.4 :** soit  $\mathcal{R} = \{A, B, C\} \in D^n$ .  $\mathcal{R}$  est une réalisation équilibrée si est seulement si, il existe une matrice diagonale  $\Sigma > 0$  telle que les solutions de (I.31) et (I.32) vérifient

$$W_0 = W_c = \Sigma.$$

Soit  $\mathcal{R} \in D_e^n$  ; considérons la partition en deux sous-systèmes de dimension  $n_1$  et  $n_2 = n - n_1$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$C = [C_1 \quad C_2], \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix}.$$

Si  $\lambda_{\min}(\Sigma_1) > \lambda_{\max}(\Sigma_2)$ , alors  $\{A_{11}, B_1, C_1\} \in D_e^{n_1}$ .

**Exemple I.4 :** soit à réduire à l'ordre 1 le système discret :

$$T(z) = \frac{z - 0.8}{(z - 0.1)(z + 0.7)}$$

Une représentation sous forme compagne de  $T(z)$  est :

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} -0.6 & 0.07 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [1 \quad -0.8] \right\}$$

Que l'on transforme en une réalisation équilibrée :

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} -0.7700 & 0.2467 \\ -0.2467 & 0.1700 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.1513 \\ -0.5705 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.1513 & 0.5705 \end{bmatrix} \right\}$$

Les valeurs singulières correspondantes sont :

$$\sigma_1 = 3.3370 \text{ et } \sigma_2 = 0.5443.$$

Le modèle réduit d'ordre 1 est :

$$T_1(z) = \frac{1.3255}{z + 0.77}$$

### I.6.3 Réalisation approchée

Considérons la décomposition en valeurs singulières de la matrice de Hankel infinie  $H$  définie en (I.25) :

$$\begin{aligned} H &= U\Sigma V \\ &= [U_1 \ U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Où

$$\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \text{ Et } \Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_n)$$

Avec  $\sigma_i > \sigma_{i+1}$ .

Alors on a le résultat fondamental d'approximation optimale :

**Théorème I. 5** : parmi les matrices  $\Omega$  de rang  $r$ , la matrice

$$\Omega_1 = U_1 \Sigma_1 V_1^T$$

Minimise

$$\|H - \Omega\|_s.$$

De plus, on a

$$\|H - \Omega_1\|_s = \sigma_{r+1}.$$

Où  $\|\cdot\|_s$  désigne la norme spectrale d'une matrice.

Toutefois, la matrice  $\Omega_1$  définie dans ce théorème n'est pas en général une matrice de Hankel.

Une bonne approximation est obtenue à partir de la réalisation proposée par Kung ou encore de celle de Zeiger.

Considérons  $\Gamma_1$  et  $\Delta_1$  respectivement matrice d'observabilité et de commandabilité associées à  $\{F, G, H\}$  ; ainsi

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \quad \text{Et} \quad \Delta_1 = [G \ FG \ \dots]$$

D'où

$$\Omega_1 = \Gamma_1 \Delta_1.$$

La translatée  $\tau\Gamma_1$  de  $\Gamma_1$  est la matrice obtenue en décalant la matrice  $\Gamma_1$  d'un bloc vers le haut i.e.

$$\tau\Gamma_1 = \begin{bmatrix} HF \\ HF^2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

On voit donc que

$$\tau\Gamma_1 = \Gamma_1 F$$

d'où

$$F = \Gamma_1^+ (\tau\Gamma_1).$$

Les matrices  $F$  et  $G$  sont directement obtenues à partir de la décomposition en valeurs singulières ci-dessus comme suit :

$$G = p \text{ premières colonnes de } \Delta_1 = \Sigma_1^{1/2} V_1^T$$

$$H = m \text{ premières lignes de } \Gamma_1 = U_1 \Sigma_1^{1/2}.$$

Une propriété intéressante du modèle réduit ainsi obtenu est que la réalisation  $R = \{F, G, H\}$  est équilibrée. Pour le prouver, il suffit de montrer que  $W_0 = W_c =$  matrice diagonale ; ce qui est réalisé puisque

$$W_0 = \Gamma_1^T \Gamma_1 = [\Sigma_1^{1/2} U_1^T][U_1 \Sigma_1^{1/2}] = \Sigma_1$$

Et

$$W_c = \Delta_1 \Delta_1^T = [\Sigma_1^{1/2} V_1^T][V_1 \Sigma_1^{1/2}] = \Sigma_1.$$

En conclusion, la réalisation approchée constitue un moyen rapide et simple d'obtenir un modèle réduit, qui de plus est donné par une réalisation équilibrée. Il faut bien noter que cette méthode admet les propriétés de la réalisation équilibrée seulement a posteriori et ne constitue pas son objet initial. En effet, le problème posé et résolu par la réalisation approchée est un problème d'optimisation comme décrit dans le théorème I. 5.

Ainsi, la réalisation approchée offre une alternative à la méthode de la réalisation équilibrée mais son intérêt se limite à l'aspect théorique. Dans la pratique. Elle est peu attrayante, au moins pour deux raisons d'ordre numérique :

- l'utilisation de la matrice de Hankel infinie (I.25) nécessite un nombre très élevé de paramètres de Markov  $J_k$ ,
- le calcul de la puissance matricielle  $A^k$ , intervenant dans  $J_k$ , introduit de nombreuses erreurs d'arrondi.

**Remarque :** la réalisation équilibrée permet d'obtenir un modèle réduit d'ordre  $\tau$  pour tout  $r$  compris entre 1 et l'ordre du système  $n$  ; ceci n'est pas le cas des méthodes modales à cause de la restriction de conservation sur les valeurs propres. Ce fait peut être illustré par l'exemple suivant :

**Exemple I.5 :** Le système admettant un pôle quadruple-1 définie par :

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^4}$$

Peut être réduit à l'ordre 2 à l'aide de la réalisation équilibrée ; on obtient en effet

$$G_2(s) = \frac{-0.0764 + 0.1819s}{s^2 + 0.572s + 0.196}$$

Il va de soi que la méthode d'agrégation ne peut s'appliquer à la réduction de ce système.

### I.7 approximation de Padé

Contrairement aux méthodes ci-dessus, cette approche se fait en utilisant le formalisme de Laplace et son exposé sera limité aux systèmes mono-entrée, mono sortie.

**Définition I.2 :** soit

$$c_0 + c_1s + \dots + c_i s^i + \dots$$

Le développement en série de Taylor au voisinage de  $s=0$  d'une fonction de transfert  $G(s)$ .

L'approximation de Padé de  $G(s)$ , noté  $AP_{p,q}$ , est une fonction de transfert

$$AP_{p,q}(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_p s^p}{a_0 + a_1s + \dots + a_q s^q}$$

Dont le développement en série autour de  $s = 0$  est le même que celui de  $G(s)$  jusqu'à l'ordre  $p + q$ .

Par définition même, on voit que l'approximation de Padé permet de préserver le gain statique du système.

**Exemple I.6 :** l'approximation de Padé  $AP_{0,1}$  du système

$$G(s) = \frac{6s + 8}{s^2 + 5s + 4}$$

Est donnée par :

$$AP_{0,1} = \frac{2}{1 + 3s}$$

Et celle de

$$G(s) = \frac{18s + 8}{s^2 + 5s + 4}$$

EST :

$$AP_{0,1} = -\frac{2}{1-s}$$

qui Est instable.

L'approximation de Padé est surtout utilisée pour approcher un retard  $e^{-\tau s}$  dans le cadre de la simulation des systèmes et l'on peut montrer que

$$e^s = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

Avec :

$$P(s) = 1 + \frac{p}{p+q} \frac{s}{1!} + \frac{p(p-1)}{(p+q)(p+q-1)} \frac{s^2}{2!} + \dots + \frac{p(p-1) \dots 2.1}{(p+q) \dots (q+1)} \frac{s^p}{p!}$$

$$Q(s) = 1 - \frac{q}{p+q} \frac{s}{1!} + \frac{q(q-1)}{(p+q)(p+q-1)} \frac{s^2}{2!} + \dots + (-1)^q \frac{q(q-1) \dots 2.1}{(p+q) \dots (p+1)} \frac{s^q}{q!}$$

Exemple : considérons le système retardé

$$G(s) = \frac{e^{-4s}}{(1+s)^2}$$

Pour lequel on peut déterminer, de façon simple, les expressions analytiques du module et de l'argument :

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{1+\omega^2}$$

$$\arg(G(j\omega)) = -4\omega - 2\arctg(\omega).$$

Si on remplace  $e^{-4s}$  par ses approximants de Padé,  $AP_{1,2}$  et  $AP_{2,3}$ , on obtient les approximants suivants pour  $G(s)$

$$G_{1,2}(s) = \frac{-8s + 6}{(s+1)^2(16s^2+16s+6)}$$

$$G_{2,3}(s) = \frac{48s^2 - 96s + 60}{(s+1)^2(64s^3+144s^2+144s+60)}$$

### I.8 Réduction optimale

Soit  $f(z)$  une fonction intégrable sur le cercle unité  $|z| = 1$  (i.e.  $f \in L_\infty$ ). les coefficients de Fourier de  $f$  sont définis par :

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z^k f(z) d\theta, \quad \text{où } z = e^{j\theta}.$$

Soit  $L_\infty^-$  le sous-espace des fonctions  $f \in L_\infty$  analytiques dans  $|z| < 1$  vérifiant  $c_k(f) = 0$  pour  $k > 0$

Soit  $F_H$  l'espace de toutes les fonctions  $f \in L_\infty$  telle que  $H(f) = H$ . On a alors le résultat suivant :

**Théorème I.6 :** une matrice de Hankel  $H$  est bornée si et seulement si, il existe  $f \in L_\infty$  telle que  $H = H(f)$  ; de plus, il existe  $f^* \in F_H$  :

$$\inf_{f \in F_H} \|f\|_\infty = \|f^*\|_s.$$

**Corollaire :** soit  $f \in L_\infty$ . Alors  $\exists g^* \in L_\infty^-$  :

$$\inf_{g \in L_\infty^-} \|f - g\|_\infty = \|f - g^*\|_\infty = \|H(f)\|_\infty.$$

Ce corollaire donne la meilleure approximation d'ordre 0 de  $H(f)$  puisque  $g \in L_\infty^-$  équivaut à  $H(g) = 0$ . On a également le théorème suivant du à Kronecker.

**Théorème I.7 :** soit

$$H = H \left[ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j z^{-j} \right].$$

Alors  $H$  est de rang  $r < \infty$  si et seulement si

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j z^{-j} = \frac{n(z)}{d(z)}$$

Où  $d(z)$  est analytique dans  $|z| \geq 1$  et a un degré  $r$  (i. e.  $d(z)$  possède  $r$  pôles stables).

Considérons maintenant la décomposition en valeurs singulières de  $H(f)$

$$H(f) = U \Sigma V^T$$

Alors

$$Hv^i = \sigma_i u_i \text{ et } Hu^i = \sigma_i v_i$$

Et l'on a le résultat suivant dont une version a déjà été énoncée dans le théorème 5 :

**Théorème 8 (Approximation optimale) :** Soit  $\sigma_r$  la  $r$ -ème valeur singulière d'une matrice de Hankel bornée  $H$  vérifiant  $\sigma_r > \sigma_{r+1}$ . Alors, il existe une matrice de Hankel unique  $\Omega$  de rang  $r$  qui minimise  $\|H - \Omega\|_s$  pour toutes les matrices de Hankel bornée  $\Omega$  de rang  $r$  et

$$\|H - \Omega_r\|_s = \sigma_{r+1}$$

$$\Omega_r = H - H(\Phi^r(z))$$

$$\text{où } \Phi^r(z) = \sigma_{r+1} \frac{\mu^{r+1}(z)}{\gamma^{r+1}(z)}$$

Une autre propriété intéressante est que  $\gamma^{r+1}(z)$  admet  $r$  zéros dans  $|z| < 1$  lorsque  $\sigma_{r+1}$  est une singulière simple de  $H$ .

**Théorème I.9 :** Soit  $f(z) = c(zI - A)^{-1}b = n(z)/d(z)$  la fonction de transfert d'un système SISO d'ordre  $n$  et soit  $\{\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}\}$  une réalisation équilibrée de  $\{A, b, c\}$  et  $T$  la transformation associée. Alors on a :

1)

$$\Phi^r(z) = \sigma_{r+1} \frac{\mu^{r+1}(z)}{\gamma^{r+1}(z)}$$

avec

$$\begin{aligned} \mu^{r+1}(z) &= \sigma_{r+1}^{-\frac{1}{2}} \bar{c}(zI - \bar{A})^{-1} e_{r+1} \triangleq \frac{m(z)}{d(z)} \\ \gamma^{r+1}(z) &= \sigma_{r+1}^{-\frac{1}{2}} e_{r+1}^T (I - z\bar{A})^{-1} \bar{b} = \pm \frac{z^{-1}m(z^{-1})}{d(z^{-1})} \\ e_{r+1} &\text{ étant la } (r+1)\text{ème colonne de } I_n. \end{aligned}$$

2)

$$g^r(z) = \frac{z^{-1}n(z)m(z^{-1}) - \sigma_{r+1}d(z^{-1})m(z)}{z^{-1}d(z)m(z^{-1})}$$

$g^r(z)$  Désignant la fonction de transfert de l'approximant optimal.

### I.9 Méthode de troncature modale

Reposant sur le fait que les modes lents, i.e. les valeurs propres dont les valeurs absolues des parties réelles sont les plus petites, caractérisent la dynamique à long terme de la sortie du système. La méthode par troncature modale consiste à capter seulement ces modes dominants dans le modèle d'ordre réduit. L'erreur d'approximation est évaluée par la borne supérieure de la norme  $\|H - H_r\|_\infty$ . La technique de troncature modale est souvent efficace lorsque le modèle d'ordre élevé est obtenu par la méthode des éléments finis pour les structures flexibles. Cette méthode est principalement utilisée dans la dynamique des structures, en particulier l'aéronautique.

L'avantage de la méthode par troncature modale est que les pôles du modèle d'ordre réduit sont exactement ceux du système réel. Cet aspect est important, par exemple dans les applications d'analyse des vibrations vu que les résonances les plus importantes sont retenues dans le modèle d'ordre réduit. Néanmoins, cette approche est assez réductrice, car elle ne prend en compte pas les oscillations provoquées par des modes ayant une grande partie imaginaire ; et le comportement transitoire n'est pas totalement pris en compte. En général, cette approche joue un rôle moins important dans l'analyse des systèmes dynamiques.

### I.10 Méthode de troncature équilibrée

Une réalisation sous forme équilibrée d'un système LTI est une représentation d'état dont ses gramiens de contrôlabilité  $W_c$  et d'observabilité  $W_0$ , sont diagonaux et égaux

$$W_c = W_0 = \text{diag}(\sigma_1 I_{m_1}, \dots, \sigma_q I_{m_q})$$

Où  $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_q$  sont appelées les valeurs singulières de Hankel du système, et  $m_i$  sont le degré de multiplicité de  $\sigma_i$ , avec  $\sum_{i=1}^q m_i = n$ . Notons que ces gramiens sont les solutions des équations de Lyapunov suivantes :

$$AW_c + W_c A_T + BB_T = 0$$

$$A_T W_0 + W_0 A + CC_T = 0$$

La méthode de troncature équilibrée, introduite par Moore, s'appuie sur la troncature des états ayant une valeur singulière de Hankel petite car ces états sont moins contrôlables et observables.

L'idée principale de la troncature équilibrée est donc que les états qui sont moins contrôlables et observables peuvent être éliminés sans impact significatif sur la réponse du système. De plus, le système d'ordre réduit obtenu par cette méthode est équilibré et stable. Ses gramiens sont  $\widehat{W}_c = \widehat{W}_0 = \text{diag}(\sigma_i, \dots, \sigma_r)$ . La norme  $H_\infty$  de l'erreur entre le système d'origine et celui d'ordre réduit est bornée par la somme des valeurs singulières tronquées.

$$\|H - H_r\|_\infty \leq \sum_{k=r+1}^q \sigma_k$$

Pour la plupart des systèmes dynamiques, les valeurs singulières de Hankel diminuent très rapidement. Par conséquent, la troncature des petites valeurs singulières de Hankel n'a pas un impact significatif sur la dynamique du système.

### I.11 Réduction de modèles à l'aide de Grammiens de réponse impulsionnelle

Des Grammiens de réponse impulsionnelle (Impulse Response Gramians-IRG) ont été introduits récemment par Sreeram et Agathoklis pour la réduction de modèles SISO linéaires, stables et invariants à temps continu ou discret. L'intérêt de ces Grammiens dans un contexte d'identification a aussi été souligné. L'IRG proposé est composé de produits scalaires de fonctions exprimées à partir de dérivées ou décalages successifs de la réponse impulsionnelle du système, dans le cas continu et discret respectivement.

Une approche possible proposée par Sreeram et al. Pour la réduction de modèles.

**I.12. Conclusion**

De nombreuses méthodes de réduction et de simplification de modèles ont été présentées, chacune avec ses avantages et ses inconvénients. L'utilisation d'une technique particulière sera tout d'abord dictée par l'objectif visé par le concepteur. La meilleure méthode peut en effet varier selon que l'on s'intéresse à la simulation ou à la commande, toutes deux pouvant être limitées à un spectre de fréquences donné (régimes permanent, lentement variable ou rapide).

Une fois ces objectifs fixés, la nature physique ainsi que la structure du système peuvent servir de guide au choix de la méthode de réduction appropriée.

D'autres critères, d'ordre purement numérique, sont également à prendre en considération car ils sont susceptibles de privilégier telle ou telle procédure suivant la complexité du problème et donc influencer sur l'option définitive pour une méthode donnée.

Dans le cas où le problème posé n'offre aucune piste intéressante, nous recommandons l'usage, dans un premier temps, de la méthode de réduction par la réalisation équilibrée qui donne souvent des résultats acceptables. Dans le cas général, plusieurs étapes d'analyse-synthèse seront nécessaires avant d'aboutir à un modèle réduit satisfaisant.

## II.1 Introduction :

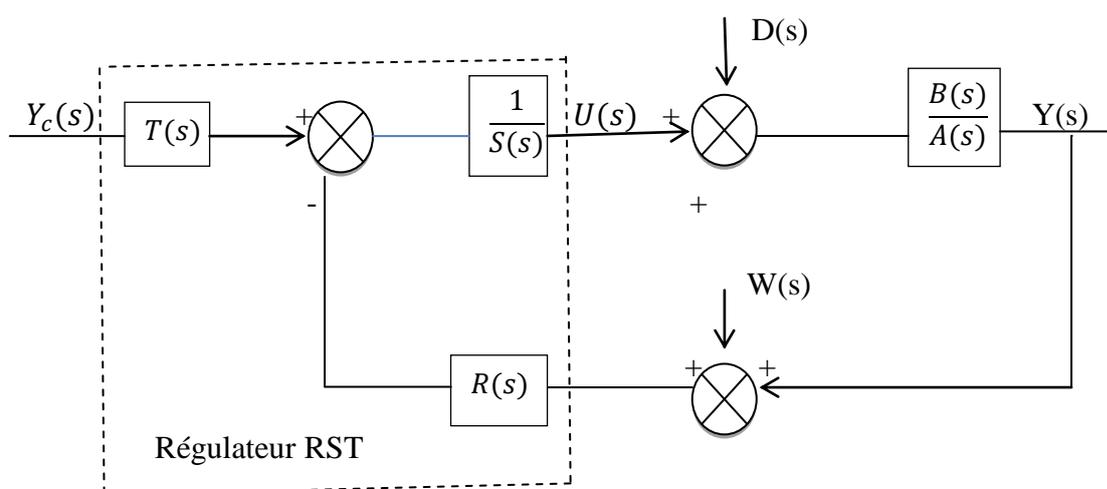
Ce chapitre est entièrement dévolu au régulateur RST, ce nom des trois polynômes qu'il fait intervenir. Le régulateur RST est défini dans le reste de chapitre, temps en temps. Il est obligatoire d'introduire un intégrateur pour assurer l'erreur statique nulle. La méthode de synthèse du régulateur RST il sera adopté une approche de type placement de pôles.

## II.2 Architecture et cadre d'application

Le régulateur RST est fondé sur une décomposition suivant trois polynômes conduisent à une structure de commande dont le schéma bloc est représenté sur la fig. II.1, dans le cadre d'une approche à temps continu :

- le procédé est caractérisé par la fonction de transfert  $B(s)/A(s)$
- $Y_c(s)$ ,  $Y(s)$ ,  $D(s)$ ,  $W(s)$  représentent respectivement la consigne, la sortie, une perturbation de charge et un bruit de mesure
- le régulateur est caractérisé par les trois polynômes  $R(s)$ ,  $S(s)$  et  $T(s)$

L'idée directrice guidant la synthèse du régulateur consiste à découpler les comportements dynamiques vis-à-vis de la consigne et des perturbations éventuelles. Cette approche peut être envisagée pour les deux types de modélisation, à temps continu (analogique) et numérique. Les développements théoriques permettant la mise en place de l'algorithme élaborant les valeurs numériques des différents paramètres du régulateur sont semblables. On peut noter cependant que l'approche à temps continu permet, en général, une interprétation physique plus facile des paramètres manipulés. Seule cette dernière est présentée dans ce qui suit.



**Fig. II.1 : structure de commande RST.**

La synthèse des trois polynômes du régulateur peut s'effectuer suivant différentes méthodes, dans ce chapitre il sera adopté une approche de type placement de pôles. Cependant d'autres méthodes comme la commande prédictive peuvent aussi conduire à une formulation de type RST.

Dans le cadre de la synthèse par placement des pôles, les critères utilisés ont comme objectifs d'obtenir des fonctions de transfert en boucle fermée, vis-à-vis de la consigne et des perturbations, permettant de satisfaire des contraintes exprimées en termes de bande passante et d'amortissement. Ces contraintes sont encore complétées par des exigences de précision qui peuvent porter d'une manière classique sur des entrées constantes ou en rampe mais aussi sur des entrées particulières comme des fonctions sinusoïdales par exemple.

On utilisera par la suite les notations suivantes :

$$B(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0 \quad (\text{II.1.1})$$

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (\text{II.1.2})$$

$$R(s) = r_{n_r} s^{n_r} + r_{n_r-1} s^{n_r-1} + \dots + r_1 s + r_0 \quad (\text{II.2.2})$$

$$S(s) = s_{n_s} s^{n_s} + s_{n_s-1} s^{n_s-1} + \dots + s_1 s + s_0 \quad (\text{II.2.3})$$

### II.3 Principe de synthèse du régulateur

La réduction du schéma bloc de la fig. II.1 conduit aux relations suivantes mettant en évidence les différentes fonctions de transfert reliant la consigne et les perturbations aux grandeurs de sortie et de commande :

$$Y = \frac{BT}{AS + BR} Y_c + \frac{BS}{AS + BR} D - \frac{BR}{AS + BR} W \quad (\text{II.3})$$

$$U = \frac{AT}{AS + BR} Y_c + \frac{BR}{AS + BR} D - \frac{AR}{AS + BR} W \quad (\text{II.4})$$

Pour des raisons de simplicité des écritures la variable de Laplace  $s$  a été omise dans ces expressions.

#### II.3.1 Comportement en régime transitoire du système bouclé

La première phase de la synthèse consiste à déterminer les polynômes  $R$  et  $S$  de sorte que la fonction de transfert du système bouclé  $Y(s)/Y_c(s)$  soit caractérisée par une fonction

modèle arbitraire  $F_m(s) = B_m(s) / A_m(s)$ , choisie a priori. Le choix de cette fonction de transfert sera abordé plus précisément au paragraphe II.3.3.

Cependant, au regard de la relation (II.3), on note la présence du polynôme  $B(s)$ , correspondant au numérateur du procédé, dans la fonction de transfert en boucle fermée. En conséquence et sauf compensation de ce polynôme, la fonction de transfert du système bouclé  $Y(s)/Y_c(s)$  comportera les zéros du procédé, soit  $B_m(s) = B(s)B'_m(s)$ . Eventuellement il serait possible de compenser les zéros « stables » et bien amortis (voir paragraphe II.4).

Ces considérations conduisent à la relation (II.5) :

$$\frac{BT}{AS + BR} = \frac{BB'_m}{A_m} \quad (\text{II.5})$$

Et au système d'équations (II.6) :

$$AS + BR = A_0A_m \quad (\text{II.6.1})$$

$$T = A_0B'_m \quad (\text{II.6.2})$$

La relation (II.6.1) est une équation polynomiale, appelée encore équation de Diophante, que nous appellerons primaire. Le polynôme  $AS + BR$  apparaissant dans cette équation est appelé polynôme caractéristique.

Le polynôme  $A_0$  correspond à un terme de filtrage éventuel permettant de dissocier les dynamiques vis-à-vis des perturbations.

Ainsi le terme  $A_0$  disparaît de la fonction de transfert de la consigne vers la sortie mais apparaît dans les fonctions de transfert vis-à-vis des perturbations. En particulier, il permet de limiter l'impact des perturbations sur la grandeur de commande et en conséquence de minimiser la sollicitation de la grandeur de commande en cas de bruit hors bande passante par exemple. Un calcul simple montre en effet que :

$$\frac{U(s)}{D(s)} = -\frac{BR}{AS+BR} = -\frac{BR}{A_0A_m} \quad \text{Et} \quad \frac{U(s)}{W(s)} = -\frac{AR}{AS+BR} = -\frac{AR}{A_0A_m}$$

D'un point de vue pratique, et afin de diminuer la complexité du régulateur, il est intéressant de résoudre l'équation (II.6.1) en faisant intervenir des polynômes de degrés les plus faibles possibles. Cependant cette propriété pourra être en pratique limitée si on impose

un régulateur propre ou strictement propre, c'est-à-dire avec un degré de  $S(s)$  supérieur ou égal au degré de  $R(s)$ .

Afin d'annuler l'erreur statique vis-à-vis de perturbations constantes ou diminuer la sensibilité en basse fréquence vis-à-vis des erreurs de modèle, il peut s'avérer nécessaire d'introduire une intégration dans la chaîne. Ce choix se traduit alors en une contrainte sur le polynôme  $S$  qui devient ainsi  $S(s) = sS_1(s)$ . l'équation (II.6.1) se trouve alors modifiée et devient :

$$sAS_1 + BR = A_0A_m \quad (\text{II.7})$$

### II.3.2 Résolution de l'équation de Diophante

Un des intérêts de la synthèse par placement des pôles d'un régulateur *RST* est de permettre une formalisation relativement simple de la méthodologie de synthèse. Cette formalisation aboutit à une mise en place facile des procédures de calcul du régulateur. La méthodologie de synthèse se fait alors en trois temps :

- choix des degrés des polynômes inconnus  $R(s)$  et  $S(s)$  (ou  $S_1(s)$  s'il s'avère nécessaire d'introduire une action intégrale dans le régulateur),
- mise en forme matricielle de l'équation de Diophante,
- calcul des coefficients de  $R(s)$  et  $S(s)$  par inversion matricielle.

Soit l'équation polynomiale :

$$AX + BY = C \quad (\text{II.8})$$

Où  $A, B, C$  sont des polynômes connus et  $X, Y$  sont des polynômes inconnus :

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (\text{II.9.1})$$

$$B(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0 \quad (\text{II.9.2})$$

$$C(s) = c_l s^l + c_{l-1} s^{l-1} + \dots + c_1 s + c_0 \quad (\text{II.9.3})$$

$$X(s) = x_p s^p + x_{p-1} s^{p-1} + x_1 s + x_0 \quad (\text{II.10.1})$$

$$Y(s) = y_q s^q + y_{q-1} s^{q-1} + \dots + y_1 s + y_0 \quad (\text{II.10.2})$$

L'équation polynomiale (II.8) admet un nombre de solutions infini, cependant on comprend aisément que la diminution de la complexité du régulateur conduit à prendre des solutions de degré le plus faible possible. Dans cet objectif, le choix des degrés minimaux est donné par les théorèmes suivants.

### Théorème II.1

L'équation (II.8) possède une solution si et seulement si les degrés des polynômes inconnus  $X(s)$  et  $Y(s)$  vérifient les relations (II.11) :

$$\deg[X] \geq \deg[B] - 1 \quad (\text{II.11.1})$$

$$\deg[Y] \geq \deg[A] - 1 \quad (\text{II.11.2})$$

### Théorème II.2

Si l'équation (II.8) est régulière, c'est-à-dire si  $\deg[A] + \deg[B] > \deg[C]$ , alors il est possible de choisir simultanément les deux degrés minimaux. Les solutions de degré minimal sont alors telles que :

$$\deg[X] = \deg[B] - 1 \quad (\text{II.12.1})$$

$$\deg[Y] = \deg[A] - 1 \quad (\text{II.12.2})$$

L'intérêt du théorème II.2 est de montrer que, dans le cas d'une équation régulière, la solution de degré minimal est unique. Dans le cas contraire, comme il est montré [Godoy et Osterrag, 2003], plusieurs solutions sont possibles.

Le choix des degrés étant fait, l'équation (II.8) peut facilement être transformée suivant une formulation matricielle. On obtient alors en utilisant les notations de (II.9) et (II.10) la forme matricielle (II.13) :

$$\begin{bmatrix} a_n & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_n & \ddots & \ddots & \vdots & b_m & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots & b_{m-1} & b_m & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & a_{n-2} & \ddots & \ddots & 0 & b_{m-2} & b_{m-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_n & \vdots & b_{m-2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_0 & \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} & b_0 & \vdots & \ddots & \ddots & b_m \\ 0 & a_0 & \ddots & \ddots & a_{n-2} & 0 & b_0 & \ddots & \ddots & b_{m-1} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_0 & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ \vdots \\ \vdots \\ x_0 \\ y_q \\ \vdots \\ \vdots \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{r-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.13})$$

En notant  $X$  le vecteur regroupant les coefficients des polynômes inconnus

$$X = [x_p \dots x_0 | y_q \dots y_0]^T, \quad (\text{II.14})$$

L'équation polynomiale se ramène à la forme matricielle  $MX = C$ , expression dans laquelle  $M$  est appelée matrice de Sylvester. On peut remarquer que cette matrice est formée par deux sous matrices, gauche et droite, dont les colonnes sont composées respectivement des coefficients des polynômes  $A(s)$  et  $B(s)$ . Le passage de la colonne  $k$  à la colonne  $k + 1$  est obtenu par décalage d'un indice des coefficients du polynôme considéré.

Les valeurs numériques des coefficients des polynômes  $X(s)$  et  $Y(s)$ , correspondant respectivement aux polynômes  $S(s)$  et  $R(s)$  du régulateur, sont alors obtenues directement par inversion matricielle  $X = M^{-1}C$ .

Cette méthodologie appliquée directement à l'équation polynomiale (II.6.1), ou (II.7.1) si l'on complète le régulateur par une action intégrale, conduit généralement à un régulateur  $R(s)/S(s)$  de type passe haut. En effet, sous réserve de régularité de l'équation polynomiale, le choix des solutions de degré minimal conduit à :

$$\deg[S] = \deg[B] - 1 = m - 1 \quad (\text{II.15})$$

$$\deg[R] \geq \deg[A] - 1 = n - 1$$

Généralement  $\deg[A] > \deg[B]$ , il s'ensuit en conséquence que le choix des deux degrés minimaux conduit à  $\deg[R] > \deg[S]$ .

En supposant que le degré du dénominateur du modèle du procédé soit strictement supérieur au degré du numérateur de ce modèle, l'analyse des degrés des différents polynômes intervenant dans l'équation  $AS + BR = A_0A_m$  amène à choisir (solution de degré minimal pour le polynôme  $R$ ) :

$$\deg[R] = \deg[A] - 1 = n - 1 \quad (\text{II.16})$$

Un régulateur propre sera donc obtenu si l'on choisit :

$$\deg[S] = \deg[R] = n - 1 \quad (\text{II.17})$$

Ou strictement propre si l'on choisit :

$$\deg[S] = \deg[R] + 1 = n \quad (\text{II.18})$$

Ces contraintes imposent aussi le degré du polynôme caractéristique. Ainsi les considérations précédentes peuvent être résumées par les relations du tableau II.1.

Cas d'un régulateur propre	Cas d'un régulateur strictement propre
$\deg[R] = \deg[sA] - 1 = n - 1$	$\deg[R] = \deg[A] - 1 = n - 1$
$\deg[S] = \deg[R] = n - 1$ (II.19.1)	$\deg[S] = \deg[R] + 1 = n$ (II.19.2)
$\deg[C] = 2n$	$\deg[C] = 2n$

**Tableau II.1 – Degrés des polynômes du régulateur sans intégration supplémentaire**

Dans le cas où le régulateur est complété par un terme intégrateur, l'équation caractéristique est donnée par la relation (II.7). Les degrés des polynômes du régulateur et du polynôme caractéristique sont alors donnés par les relations (II.20.1) et (II.20.2) du tableau II.2.

Cas d'un régulateur propre	Cas d'un régulateur strictement propre
$\deg[R] = \deg[sA] - 1 = n$	$\deg[R] = \deg[sA] - 1 = n$
$\deg[S_1] = \deg[R] - 1 = n - 1$ (II.20.1)	$\deg[S_1] = \deg[R] = n$ (II.20.2)
$\deg[C] = 2n$	$\deg[C] = 2n + 1$

**Tableau II.2 : degrés des polynômes du régulateur avec intégration supplémentaire**

Ces considérations sur les choix des degrés du régulateur ne modifient pas la formulation matricielle (II.13) de l'équation de Diophante. Les dimensions de la matrice à inverser se trouvent uniquement augmentées dans le cas où la contrainte régulateur propre ou strictement propre est introduite.

### II.3.3 Choix de la fonction de transfert modèle

La méthode de synthèse exposée, fondée sur un placement de pôles, suppose que la fonction de transfert en boucle fermée  $F_m(s) = B(s)B'_m(s)/A_m(s)$  soit connue. L'une des principales difficultés dans ce type d'approche est ainsi le choix du polynôme caractéristique en boucle fermée  $A_m(s)$  qui permet de vérifier le cahier des charges (temps de réponse, dépassement...) mais aussi d'assurer des marges de robustesse suffisantes.

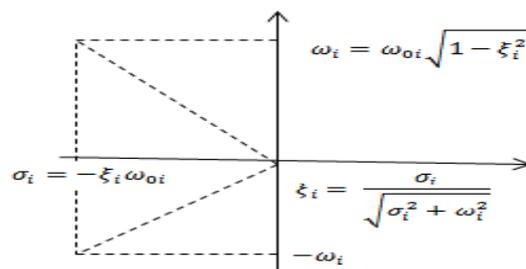
#### II.3.3.1 Choix du polynôme caractéristique en boucle fermée $A_m$

- Règles de choix des pôles en boucle fermée

D'une manière générale ce choix n'est pas trivial, cependant il est possible d'établir quelques règles à prendre en compte lors du choix de l'emplacement des pôles.

Ces règles peuvent être rapprochées de l'emplacement des pôles dans le plan complexe. Pour l'analyse des propriétés d'un système il est courant de décomposer son comportement en fonctions élémentaires du 1<sup>er</sup> ou du 2<sup>ème</sup> ordre. La fig. II.2, montre l'emplacement polaire pour une fonction du 2<sup>ème</sup> ordre :

$$\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$



**Fig.II.2 : Emplacement polaire**

Remarque :

- la stabilité en boucle fermée exige que tous les pôles soient à partie réelle négative ;
- un pôle à partie réelle négative  $\lambda_i = -\sigma_i$  ( $\sigma_i > 0$ ) introduit dans toute réponse du système bouclé un transitoire, qui converge vers 0 d'autant plus vite que  $\sigma_i$  est grand
- deux pôles complexes conjugués  $\lambda_i = -\sigma_i \pm j\omega_i$  introduisent un régime transitoire  $e^{-\sigma_i t} \sin(\omega_i t)$ , qui converge vers 0 d'autant plus vite que  $\sigma_i$  est grand, et qui présente d'autant plus d'oscillations que  $\omega_i$  est grand, l'amortissement est lié à la valeur relative de  $\sigma_i$  et  $\omega_i$
- plus la dynamique en boucle fermée est éloignée de celle de la boucle ouverte, plus la commande est sollicitée et prend des valeurs élevées, au risque de dépasser les seuils physiquement admissibles (saturation des actionneurs par exemple).

Un choix judicieux consiste à raisonner à partir des pôles du modèle du procédé :

- déplacer vers la gauche, d'un facteur raisonnable (2 à 3), la partie réelle  $-\sigma_i$  des pôles réels et complexes :

- augmenter légèrement le coefficient d'amortissement  $\xi_i$  des pôles complexes ;
- dans le cas de pôles à partie réelle positive, on applique les règles précédentes à leur symétrique par rapport à l'axe imaginaire.

➤ Choix type pôles dominants

Enfin, on raisonne quelquefois en termes de pôles dominants, on choisit alors un polynôme caractéristique de la forme :

$$A_m(s) = A_{m1}(s)A_{m2}(s) \quad (\text{II.21})$$

Où  $A_{m1}(s)$  est un polynôme contenant les pôles dominants et  $A_{m2}(s)$  un polynôme supplémentaire permettant de filtrer les hautes fréquences.

Si le comportement souhaité est du type  $2^{\text{ème}}$  ordre  $A_{m1}(s)$  est alors choisi suivant la forme :

$$A_{m1}(s) = s^2 + 2\xi\omega_0s + \omega_0^2 \quad (\text{II.22})$$

Où  $\omega_0$  est la pulsation propre et  $\xi$  le coefficient d'amortissement souhaité, usuellement  $\xi = 0.5$  à  $0.7$ . Enfin la pulsation propre peut être rattachée au temps du  $1^{\text{er}}$  maximum  $t_m$  en utilisant la relation approximative :

$$\omega_0 t_m \approx 3 \quad (\text{II.23})$$

Le polynôme  $A_{m2}(s)$  contient des pôles supplémentaires permettant, par exemple, de diminuer le gain aux hautes fréquences. On peut choisir ainsi :

$$A_{m2}(s) = \prod_i (s + \omega_i)$$

Avec  $\omega_i \gg \omega_0$ , en pratique on peut prendre par exemple  $\omega_i > 10\omega_0$ .

Dans tous les cas de figure et suivant les choix adoptés, il sera nécessaire de considérer un polynôme caractéristique comportant  $2n - 1$ ,  $2n$  ou encore  $2n + 1$  racines conformément aux relations (II.19) ou (II.20).

### II.3.3.2. Choix du numérateur, poursuite d'une consigne $B_m$

Pour compléter la fonction de transfert modèle il reste encore à choisir le polynôme  $B'_m$ . Ce choix est effectué en considérant la régulation sur une consigne constante ou encore la poursuite de consigne.

➤ Régulation sur consigne constante

L'asservissement sur consigne constante  $y_c(t) = Y_0 Y(t)$  amène à choisir un polynôme  $B'_m$  permettant d'obtenir un gain statique unité, soit :

$$F_m(0) = \frac{B(0)B'_m(0)}{A_m(0)} = 1$$

Un calcul simple montre que ce choix permet ainsi d'obtenir une erreur statique nulle. Il suffit d'adopter pour  $B'_m(s)$  une simple constante  $B'_m = b'_{m0}$  vérifiant :

$$b'_{m0} = \frac{A_m(0)}{B(0)}$$

Dans le cas où la boucle de régulation comporte une intégration, cette condition peut être encore explicitée plus simplement à partir des polynômes  $R(s)$  et  $A_0(s)$ . En effet, en reprenant la fonction de transfert en boucle fermée :

$$F_m(s) = \frac{BT}{AS + BR} = \frac{BB'_m A_0}{AS + BR} \quad (\text{II. 24})$$

Le gain statique s'écrit :

$$F_m(0) = \frac{B(0)B'_m(0)A_0(0)}{A(0)S(0)+B(0)R(0)} = 1$$

Si la boucle comporte une intégration  $A(0) = 0$  ou  $S(0) = 0$ , la relation précédente devient  $F_m(0) = B'_m(0) A_0(0)/R(0) = 1$ . D'une manière analogue il suffit de choisir pour le polynôme  $B'_m(s)$  une simple constante  $B'_m = b'_{m0}$  vérifiant :

$$b'_{m0} = \frac{R(0)}{A_0(0)} = \frac{r_0}{a_{0_0}} \quad (\text{II. 25})$$

➤ Asservissement sur consigne polynomiale

La condition (II.25) n'est pas suffisante pour annuler l'erreur en régime permanent vis-à-vis de consignes polynomiales d'ordre supérieur à zéro (rampe, parabole). La prise en compte particulière de ce type de consigne peut être effectuée au travers de l'analyse de l'erreur :

$$\varepsilon(s) = (Y_c(s) - Y(s)) = (1 - F_m(s))Y_c(s)$$

En utilisant l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée la relation précédente peut être explicitée suivant la relation (II.26) :

$$\varepsilon(s) = \left(1 - \frac{BB'_m}{A_m}\right)Y_c(s) = \frac{A_m - BB'_m}{A_m}Y_c(s) \quad (\text{II.26})$$

La transformée de Laplace d'une fonction polynomiale  $y_c(t) = Y_n t^n Y(t)$  étant  $Y_c(s) = Y_n/s^{n+1}$ , on peut donc écrire :

$$\varepsilon(s) = \frac{A_m - BB'_m}{A_m} \frac{Y_n}{s^{n+1}}$$

L'erreur en régime permanent peut être exprimée en utilisant le théorème de la valeur finale. On obtient ainsi :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\varepsilon(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A_m - BB'_m}{A_m} \frac{Y_n}{s^n}$$

Cette erreur sera nulle si  $A_m - BB'_m = s^{n+1}p(s)$ . Ainsi l'erreur en régime permanent, vis-à-vis d'une consigne polynomiale  $y_c(t) = Y_n t^n Y(t)$ , sera nulle si le polynôme  $B'_m(s)$  vérifie l'équation de Diophante auxiliaire :

$$s^{n+1}P(s) + B(s)B'_m(s) = A_m(s) \quad (\text{II.27})$$

➤ Extension au cas des consignes sinusoïdales

Certains types de procédés (onduleurs ou filtres actifs d'harmoniques du réseau par exemple) sont caractérisés par des consignes sinusoïdales. Il est possible pour ces types de consignes d'étendre le cas précédent afin d'assurer une erreur nulle en régime permanent. En effet, d'après la relation (II.26), la fonction de transfert de la consigne vers l'erreur est :

$$\frac{\varepsilon(s)}{Y_c(s)} = \frac{A_m - BB'_m}{A_m}$$

L'erreur en régime permanent sera nulle si cette fonction de transfert comporte un zéro de transmission à la pulsation  $\omega_0$  caractérisant la consigne sinusoïdale, c'est-à-dire si le polynôme  $B'_m(s)$  vérifie l'équation de Diophante auxiliaire :

$$(s^2 + \omega_0^2)P(s) + B(s)B'_m(s) = A_m(s) \quad (\text{II.28})$$

La loi de commande obtenue peut être interprétée comme une forme d'anticipation avec le polynôme  $T(s) = A_0(s)B'_m(s)$  issu de la solution de l'équation diophantienne auxiliaire (II.28). En conséquence la qualité du modèle, surtout autour de la pulsation du signal de consigne, est importante en vue d'obtenir les résultats escomptés. En pratique ce type de solution peut aussi s'utiliser en complément d'une prise en compte de la spécificité de la consigne lors du calcul des polynômes  $R(s)$  et  $S(s)$  : nécessité de gain important à la pulsation considérée, intégration en boucle ouverte...

### II.3.3.3 Séparation des dynamiques vis-à-vis de la consigne et des perturbations

L'introduction du polynôme  $A_0(s)$  dans le polynôme caractéristique en boucle fermée (voir relation (II.6) permet de séparer le comportement vis-à-vis de la consigne de celui vis-à-vis des perturbations. Il peut aussi être introduit en vue de limiter l'impact d'éventuels bruits de mesure sur la grandeur de commande.

Le choix de cette fonction est lié au cahier des charges et à la présence d'éventuelles perturbations, on peut choisir par exemple une fonction du 1<sup>er</sup> ordre  $A_0(s) = (s + \omega_f)$  mais si la séparation des dynamiques n'est pas souhaitée il suffit d'adopter  $A_0(s) = 1$ .

## II.4 cas des zéros

L'utilisation directe de l'approche proposée pour le calcul du régulateur conduit à la conservation des zéros de la fonction de transfert du procédé dans la fonction de transfert en boucle fermée  $Y(s)/Y_c(s)$ . La présence de zéros proches de l'axe imaginaire, en pratique dans la bande passante ou à proximité, peut conduire en boucle fermée à des dépassements importants même dans le cas de pôles bien amortis.

Ainsi, lorsque la fonction de transfert du procédé présente des zéros dans la bande passante souhaitée, il est préférable de les compenser. On peut alors procéder comme dans en introduisant des pôles de la fonction de transfert du procédé dans  $T(s)$  ou encore directement lors de la synthèse du régulateur. La deuxième approche proposée est fondée sur la factorisation du numérateur du procédé et sa formulation suivant la relation :

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B^-(s) B^+(s)}{A(s)}$$

Où :

- $B^-(s)$  est la partie du numérateur que l'on ne souhaite pas compenser ;

-  $B^+(s)$  est la partie du numérateur que l'on veut compenser ; cette partie ne contient obligatoirement que des zéros que l'on veut simplifier sera obtenue en adoptant les relations (II.29.1) ou (II.29.2) s'il est nécessaire d'introduire une action intégrale dans le régulateur :

$$S(s) = B^+(s) S'(s) \quad (\text{II.29.1})$$

$$S(s) = B^+(s) s S_1(s) \quad (\text{II.29.2})$$

Le polynôme  $S'(s)$  (ou éventuellement  $S_1(s)$ ) sera alors obtenu en résolvant l'une des équations polynomiales (II.30) :

$$A(s)S'(s) + B^-(s) R(s) = A_m(s) A_0(s) \quad (\text{II.30.1})$$

$$A(s)s S_1(s) + B^-(s) R(s) = A_m(s) A_0(s) \quad (\text{II.30.2})$$

La démarche de calcul du polynôme  $T(s) = A_0(s) B'_m(s)$  reste en tout point identique à celle exposé au paragraphe II.2.3.

## II.5 Conclusion

La synthèse RST offre une solution attractive pour la synthèse d'une loi de commande. L'intérêt de cette approche est de proposer une algorithmique au problème de synthèse, permettant ainsi une mise en place aisée de procédures de calcul automatisé des paramètres du régulateur :

- les paramètres de réglage s'appuient sur les critères classiques de l'automatique : choix de bande passante, amortissement des pôles... permettant ainsi une interprétation physique de ces paramètres ;

- le calcul des polynômes du régulateur s'effectue en deux temps : résolution de l'équation diophantienne principale conduisant aux polynômes  $R(s)$  et  $S(s)$  ; calcul du polynôme  $T(s)$  déterminé soit de manière à assurer un gain unitaire en boucle fermée si la consigne de référence est constante, soit en résolvant l'équation diophantienne auxiliaire si la consigne est un polynôme temporel d'ordre supérieur à 1 ou encore comportant des composantes harmoniques ;

- la résolution de l'équation de Diophante permettant d'obtenir les polynômes du régulateur peut être réalisée en utilisant la formulation matricielle ; les valeurs numériques des coefficients des différents polynômes sont alors obtenues en pratique par une inversion matricielle :

-la mise en place d'un outil de synthèse par CAO est relativement simple et peut éventuellement être associés à des outils d'identification permettant d'élaborer un outil complet d'identification et de commande.

Dans le cas d'une implémentation numérique de régulateur, la synthèse peut être effectuée directement en numérique. La démarche de synthèse est alors identique, le modèle de commande utilisé étant la fonction de transfert en  $z$  du procédé. Le formalisme de calcul des différents polynômes ainsi que la résolution de l'équation polynomiale : choix des degrés, mise en forme matricielle, peuvent être calqués sur la méthodologie exposée.

Le choix des emplacements polaires du polynôme caractéristique est cependant légèrement plus délicat directement en numérique, en particulier pour les pôles complexes. Du point de vue de l'interprétation physique, il est alors plus facile de raisonner dans le cas d'un emplacement polaire dans le domaine à temps contenu (plans) puis de déterminer les pôles en discret en utilisant la relation  $Z_i = e^{s_i T_e}$  ou les pôles  $s_i$  sont les pôles équivalents dans le domaine à temps contenue et  $T_e$  la période d'échantillonnage.

### III.1 Introduction

Les outils de plus en plus performants mis à la disposition de l'ingénieur désirant modéliser un processus physique complexe conduisent bien souvent à un modèle de grand retard. L'usage direct de celui-ci peut nécessiter un volume de calcul important ou engendrer des difficultés numériques. Pour ces raisons, il est auparavant souhaitable d'essayer de réduire l'ordre du modèle, tout en reproduisant très précisément son comportement original.

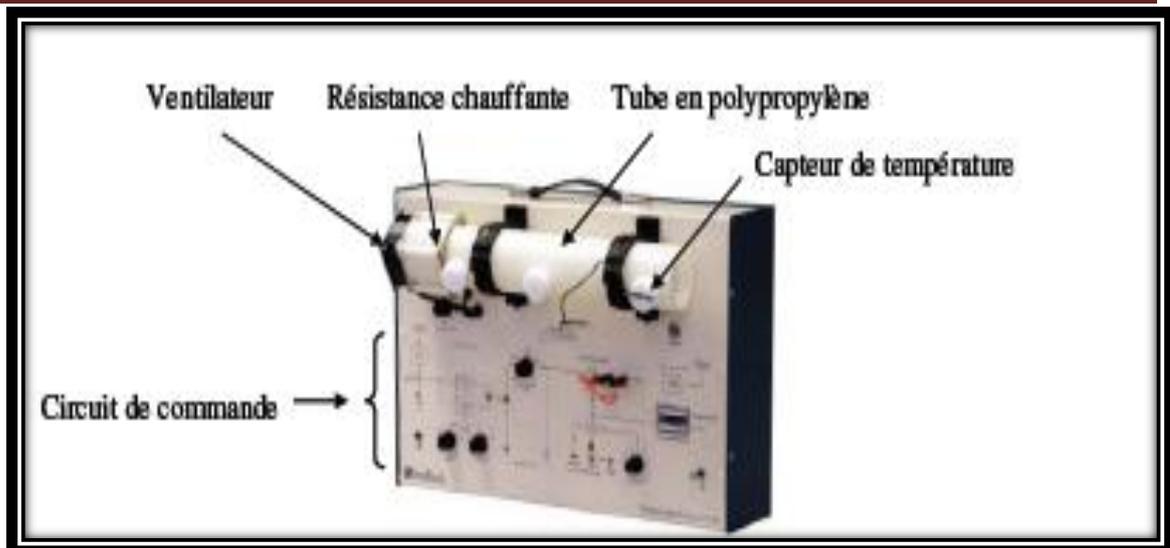
Depuis plus d'une vingtaine d'années, de nombreuses méthodes sont apparues pour accomplir cette tâche. Le choix de l'une d'entre elles se fait en fonction de la description du modèle original (représentation dans l'espace d'états, fonction de transfert, ...), de sa nature (linéaire ou non-linéaire, stable ou instable, temps continu ou temps discret, ...) et de la précision souhaitée (solution optimale ou non).

Dans ce chapitre un exemple d'application est présenté ainsi que les résultats de simulation obtenus.

### III.2 Description du système

#### ➤ Procédé thermique

La maquette d'un procédé thermique est présentée dans la figure III.1. Le principe de fonctionnement est le suivant : une résistance chauffante, contrôlée par une tension (0 – 10V), génère de la chaleur qui est transférée dans le tube grâce à un ventilateur. Un capteur de température, de type sonde à thermistance, délivre un signal (0 – 10V) qui indique la température en un certain point du tube. La mesure présente un bruit  $P_{n2,\infty} \geq \infty_n = 0.2V$ . L'utilisation de l'information fournie par le capteur permet de mettre en œuvre une commande de la résistance chauffante de manière à ce que la température dans le tube atteigne la valeur désirée. En outre, le contrôleur doit aussi être capable de rejeter les perturbations, telles que la variation de vitesse du ventilateur ou l'obstruction partielle à la sortie du tube. Considérons le cahier de charges : – marge de module désirée  $M_{md} \geq 0.5$  et marge de phase désirée  $\varphi_d \geq 45$ .



**Fig. III.1 : maquette d'un procédé thermique.**

Par la modélisation et l'identification des éléments du système (résistance chauffante, tube et sonde à thermistance), le modèle complet du système est donné, autour d'un point de fonctionnement, par

$$H(s) = \frac{0.9e^{-0.2s}}{(0.5s + 1)^2}$$

Ce modèle est utilisé par la suite pour évaluer l'efficacité des méthodes de réduction proposées.

### III.3 Résultats de simulation

#### III.3.1 Méthode de Troncation modèle équilibrée pour des facteurs copremiers normaux :

Le `ncfmr` renvoie un modèle d'ordre réduit GRED constitué par un ensemble des facteurs copremiers normaux d'équilibré de rangée structural. Le `redinfo` contenant les facteurs copremiers gauches et droits de  $G$  et de leurs valeurs singulières copremiers de Hankel.

Les valeurs singulières de Hankel des facteurs copremiers d'un système si stable indiquent la « l'énergie d'état » respective du système. Par conséquent, l'ordre réduit peut être directement déterminé en examinant le système Hankel.

#### Algorithme :

Donné un espace d'état  $(A, B, C, D)$  d'un système d'ordre réduit désiré  $k$ , les étapes suivantes produira une transformation de similitude pour tronquer le système d'espace d'état original au modèle réduit par l'ordre de  $k$

1. Trouver les facteurs copremiers normaux de G en résolvant hamiltonien décrit dedans.

$$G_L = [N_L M_L]$$

$$G_r = \begin{bmatrix} N_r \\ M_r \end{bmatrix}$$

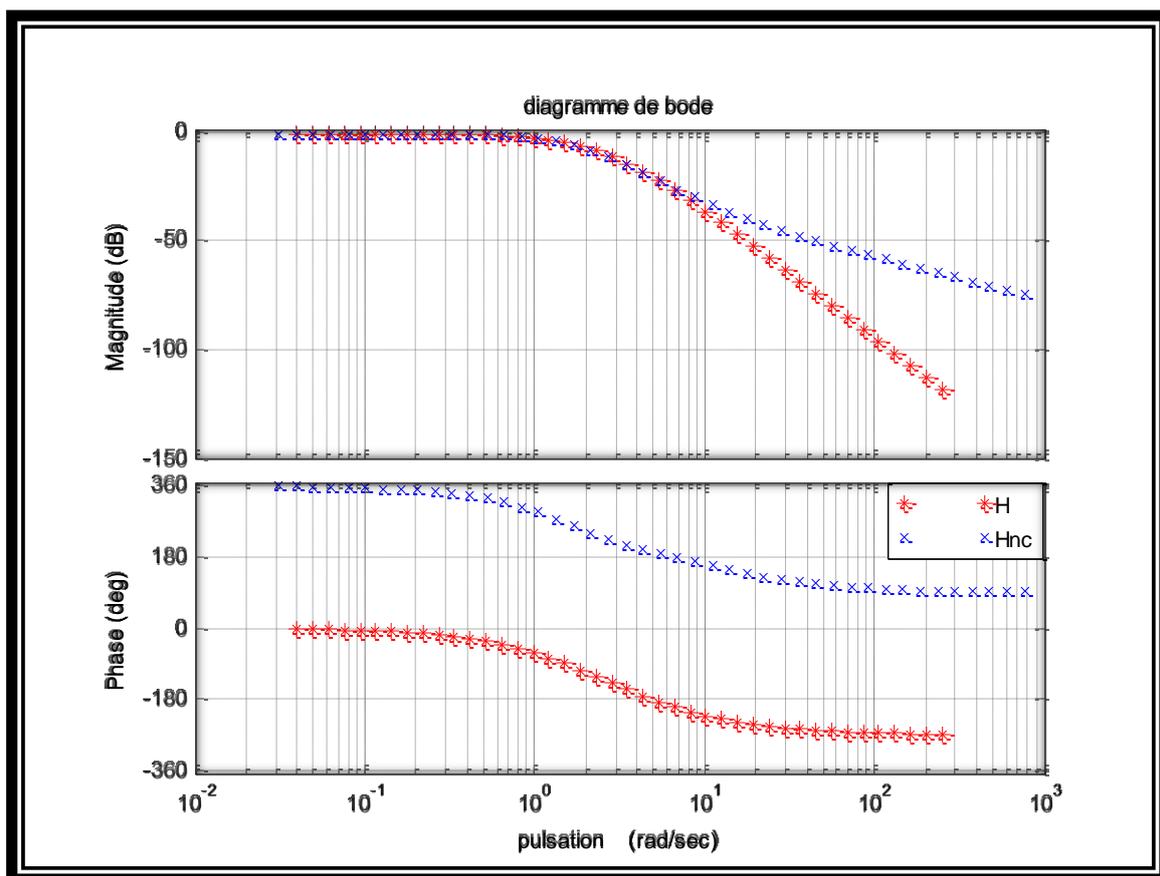
2. Exécuter la troncation modèle équilibrée de racine carrée de l'ordre k sur G<sub>L</sub> ou G<sub>R</sub>

3. Le modèle réduit est:

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c - B_m C_L & B_n - B_m D_L \\ C_L & D_L \end{bmatrix}$$

Le modèle réduit ncfmr est comme suit

$$H_{nc} = \frac{-0.1373s + 2.103}{s^2 + 2.476s + 2.438}$$

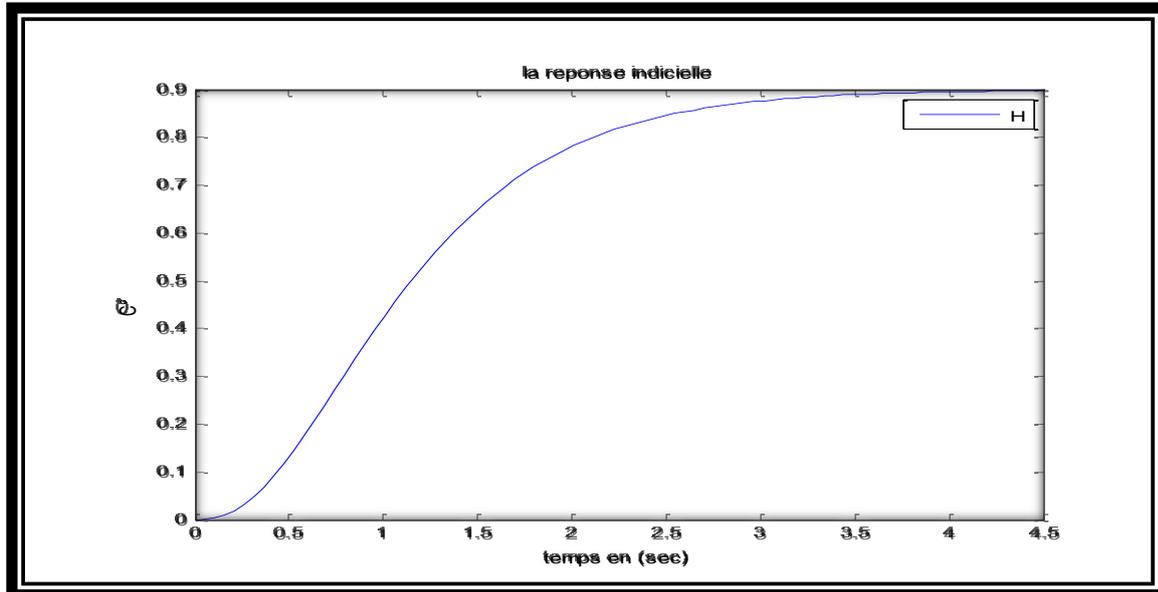


**Fig. III.2 : Comparaison le diagramme de bode du modèle complet et le modèle réduit ncfmr.**

Comme le montre le diagramme de bode de la fig.III.2, le modèle réduit capte les caractéristiques du système dans l'intervalle de fréquence moins de 8.8 rad/sec très bien, mais la correspondance dans la région de fréquences supérieures à 8.8 rad/sec est pauvre. En outre,

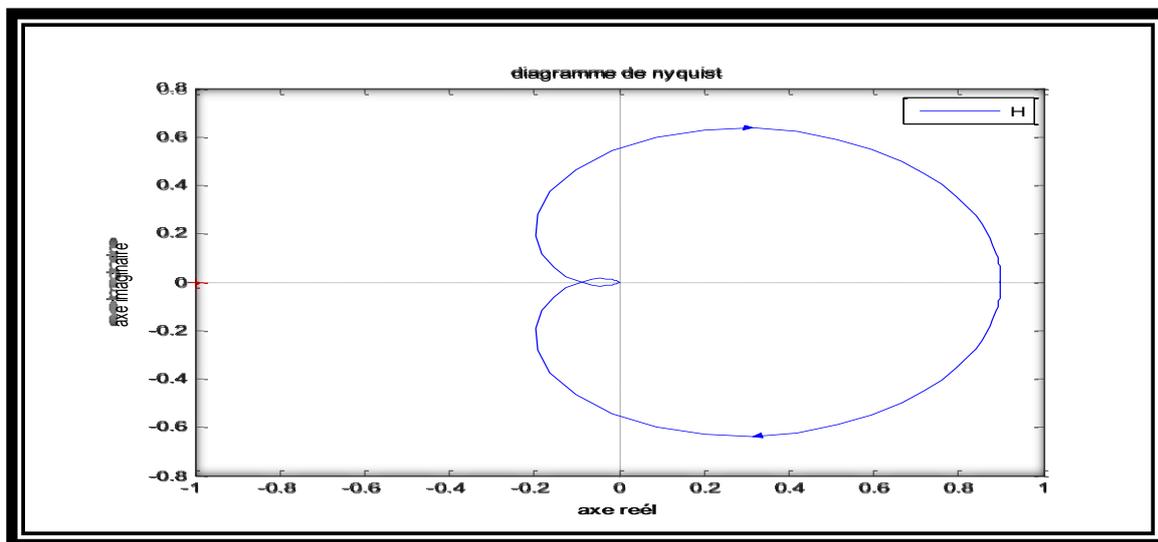
le modèle réduit ne tient pas pleinement compte de la dynamique dans la gamme fréquences de  $8.8 - 10^4$  rad/sec.

De plus, le diagramme de bode en phase du modèle réduit Hnc qui a été déterminé selon est au dessus de celui du système et présente un grand écart sur tout l'intervalle de pulsations.



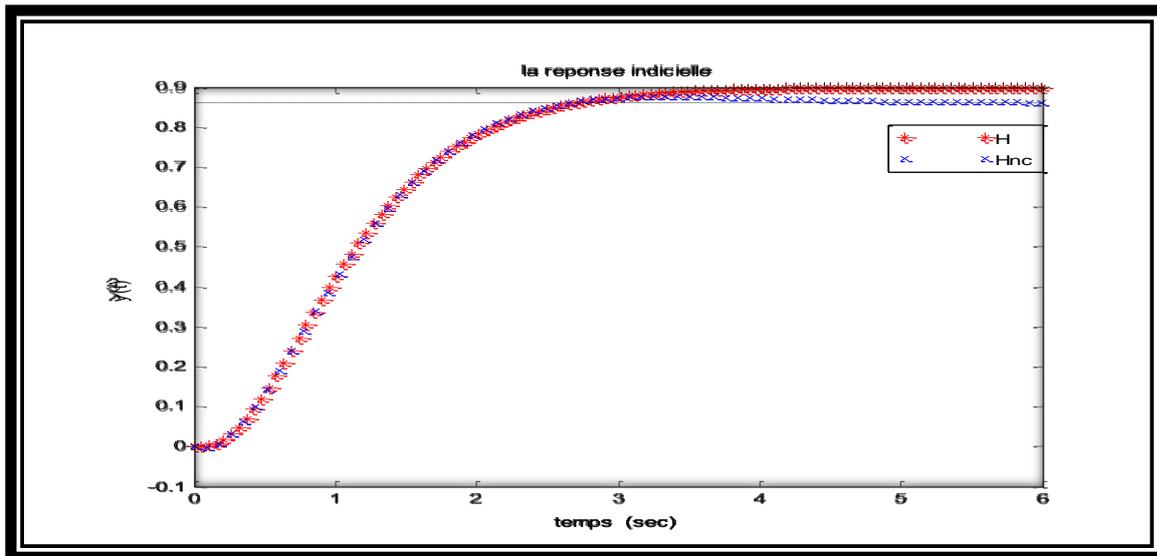
**Fig. III.3 : Réponse indicielle du modèle complet.**

A partir de la fig. III.3, On observe après un certain retard du temps la réponse indicielle du modèle complet accroitre jusqu'à atteigne la consigne désirée.

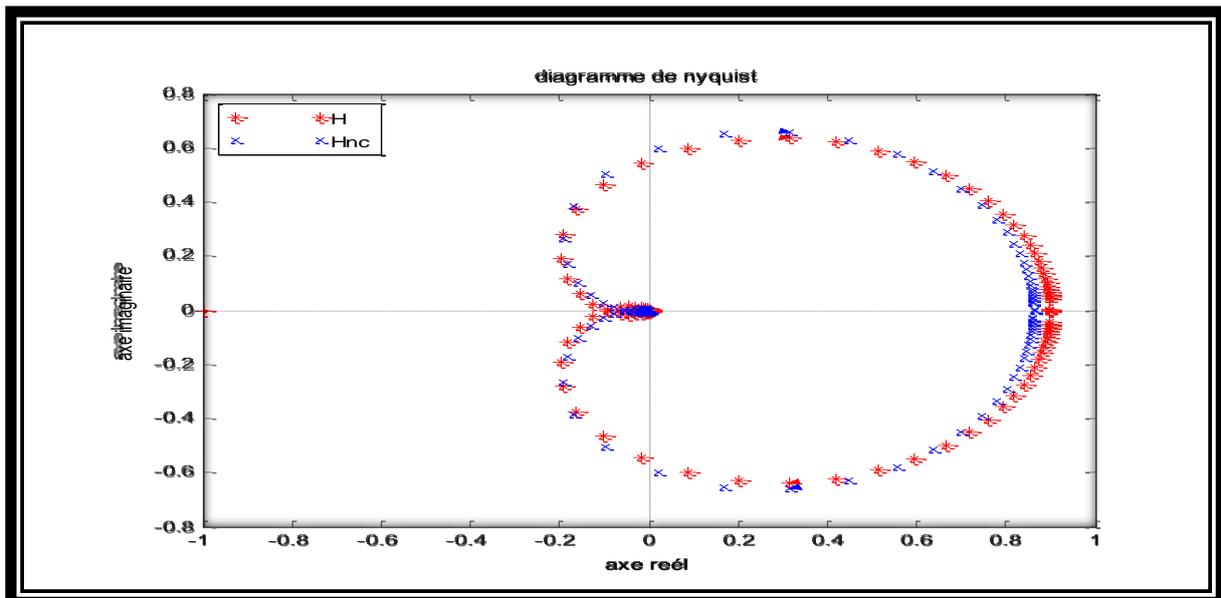


**Fig. III.4 : Diagramme de nyquist du modèle complet.**

A partir de fig. III.4, on note que la courbe tracé laissé le point critique  $(-1,0)$  à la gauche pour une pulsation variante de 0 à l'infini. Donc en déduire que le système est stable.



**Fig. III.5** Comparaison la réponse indicielle du modèle complet et le modèle réduit ncfmr.



**Fig. III.6** : Comparaison entre le diagramme de nyquist du modèle complet et réduit ncfmr.

### III.3.2 Méthode de Troncation modèle équilibrée par l'intermédiaire de la méthode de Schur :

Le schurmr renvoie un modèle d'ordre réduit GRED de G à rangée structural le redinfo contenant la limite d'erreur du modèle réduit et les valeurs singulières de Hankel du système original.

La limite d'erreur calculée est basée sur les valeurs singulières de Hankel de G. Pour le système stable, les valeurs singulières de Hankel indiquent l'énergie respective d'état du

système. Par conséquent, l'ordre réduit peut être directement déterminé en examinant le système Hankel.

**Algorithme :**

Donné un espace d'état (A, B, C, D) d'un système et l'ordre réduit désiré k, les étapes suivantes produira une transformation de similitude pour tronquer le système d'espace d'état original au modèle réduit par ordre de k

1. Trouver les grammians P et Q. de contrôlabilité et d'observabilité.
2. Trouver la décomposition de Schur pour PQ dans l'ordre décroissant et croissant, respectivement,

$$V_A^T P Q V_A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$V_D^T P Q V_D = \begin{bmatrix} \lambda_n & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

3. Trouver eigen-bases orthonormales gauches/droite de PQ lié aux grandes valeurs singulières de Hankel de k

$$V_A = [V_{R.SMALL}, \overbrace{V_{L,BIG}}]$$

4. Trouver la décomposition en valeur singulière de  $V_A = (V_{L.BIG}^T V_{R.BIG}) = U \Sigma V^T$   
 $V_D = [V_{R.BIG}, V_{L.SMALL}]$

5. Former transformation gauche/droite pour le modèle réduit par ordre final de k

$$S_{L.BIG} = V_{L.BIG} U \Sigma(1:k, 1:k)^{-1/2}$$

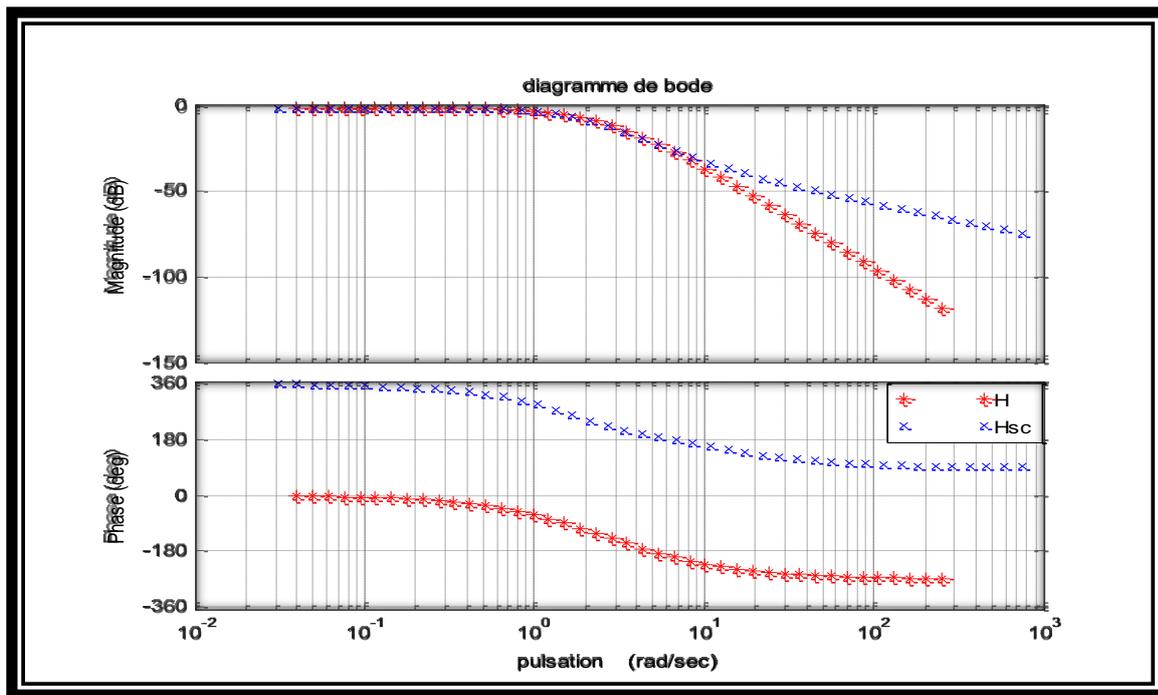
$$S_{R.BIG} = V_{R.BIG} U \Sigma(1:k, 1:k)^{-1/2}$$

6. Finale

$$\begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{L,BIG}^T A S_{R,BIG} & S_{L,BIG}^T B \\ C S_{R,BIG} & D \end{bmatrix}$$

Le modèle réduit schurmr est comme suit

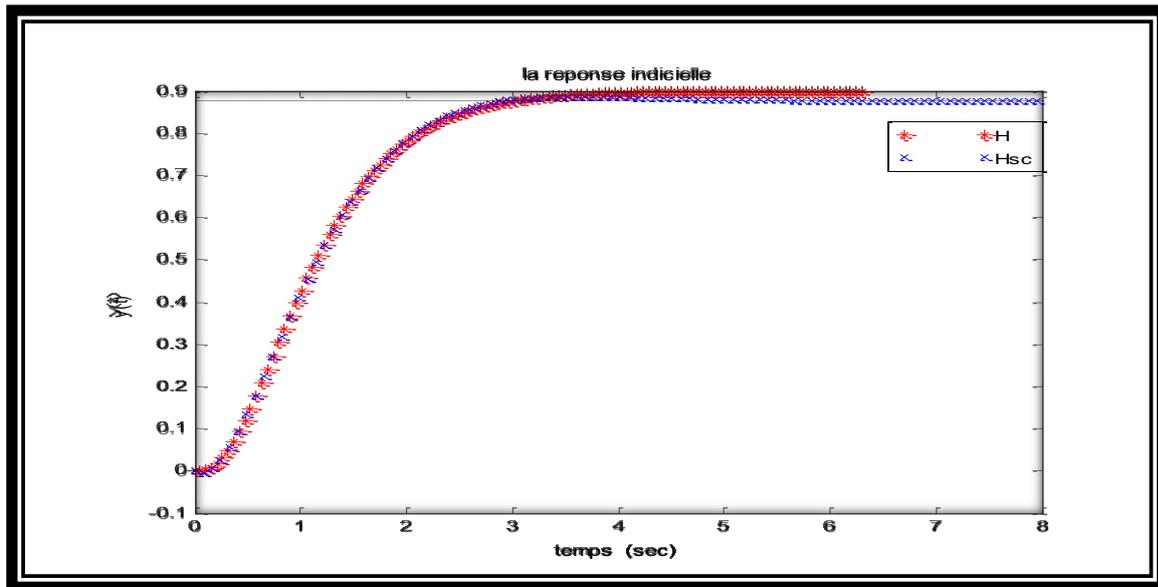
$$H_{sc} = \frac{-0.145s + 2.158}{s^2 + 2.585s + 2.46}$$



**Fig.III.7 : Comparaison le diagramme de bode du modèle complet et le modèle réduit schurmr.**

Comme le montre le diagramme de bode de la fig. III.7, le modèle réduit capte les caractéristiques du système dans l'intervalle de fréquence moins de 5.32 rad/sec très bien, mais la correspondance dans la région de fréquences supérieures à 5.32 rad/sec est pauvre. En outre, le modèle réduit ne tient pas pleinement compte de la dynamique dans la gamme de fréquences de 5.32 -  $10^4$  rad/sec.

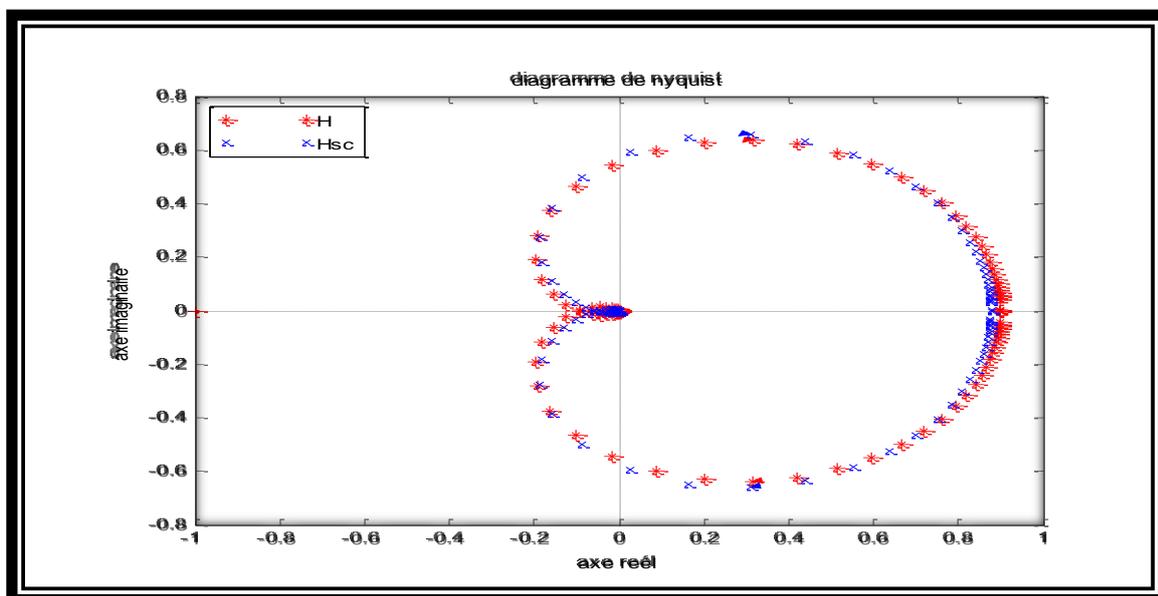
De plus, le diagramme de bode en phase du modèle réduit Hnc capte les caractéristiques du système dans l'intervalle de pulsation moins de 0.752, mais après cet intervalle le diagramme de bode en phase du modèle réduit est au dessus de celui du système complet.



**Fig. III.8 Comparaison la réponse indicielle du modèle complet et le modèle réduit schurmr.**

A partir de la fig. III.5, et fig. III.8, on observe bien la ressemblance et l'approche de la réponse indicielle du modèle complet et la réponse indicielle du modèle réduit.

On observe aussi Lorsqu'atteigne à la consigne on observe un petit écart entre les deux réponses indiciaires du modèle complet et réduit.



**Fig. III.9 comparaison entre le diagramme de nyquist du modèle complet et réduit schurmr.**

A partir de fig. III.6, et fig. III.9, on note que les deux courbes tracés laissé le point critique (-1,0) a la gauche pour une pulsation variante de 0 a l'infini. Donc en déduire que les deux systèmes est stable. Donc n'en déduire que la réduction donnée le meilleur résultat.

### III.3.3 Méthode de Réalisation et projection de forme modale :

La réalisation modale de forme à sa matrice A sous la forme diagonale de bloc avec les blocs 1x1 ou 2x2. Les vraies valeurs propres seront mises dans les blocs 1x1 et des valeurs propres complexes seront mises dans les blocs 2x2. Ces blocs diagonaux sont commandés dans l'ordre croissant basé sur des grandeurs de la valeur propre

#### Algorithme :

Utiliser un vrai reig de décomposition de structure d'Eigen et commander les vecteurs propres dans l'ordre croissant selon leurs grandeurs de valeur propre, nous pouvons former une transformation de similitude hors de ces vrais vecteurs propres commandés tels qu'il les systèmes en résultant G1 et/ou G2 sont sous la forme modale diagonale de bloc.

Le modèle réduit modreal

$$H_{mo} = \frac{0.4s^2 - 0.4s + 3.6}{s^2 + 4s + 4}$$

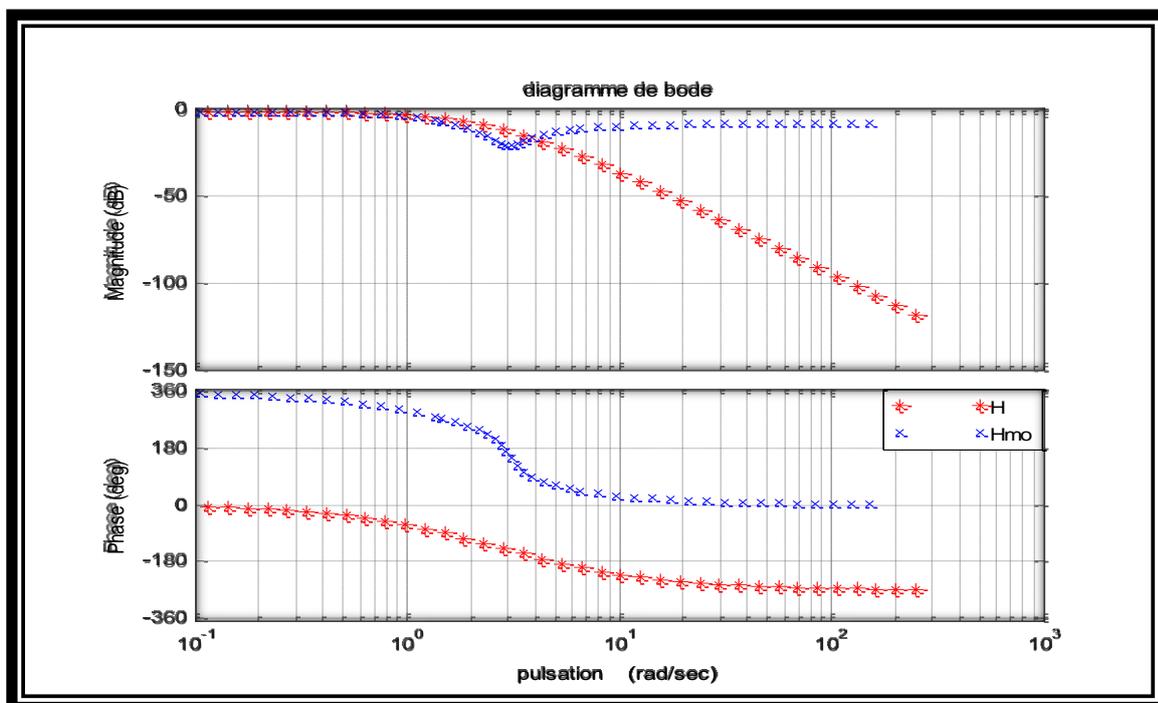
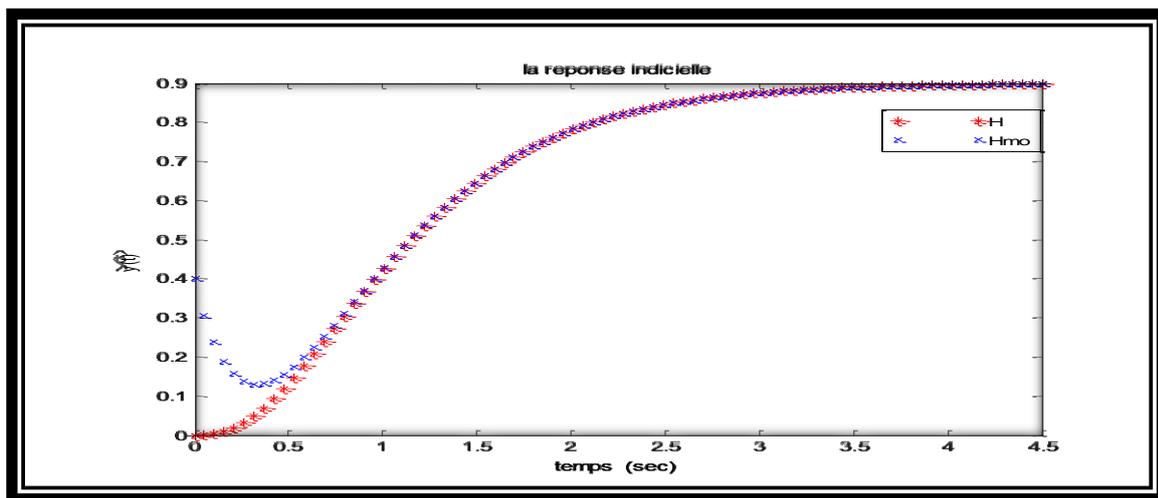


Fig. III.10 : Comparaison le diagramme de bode du modèle complet et le modèle réduit modreal.

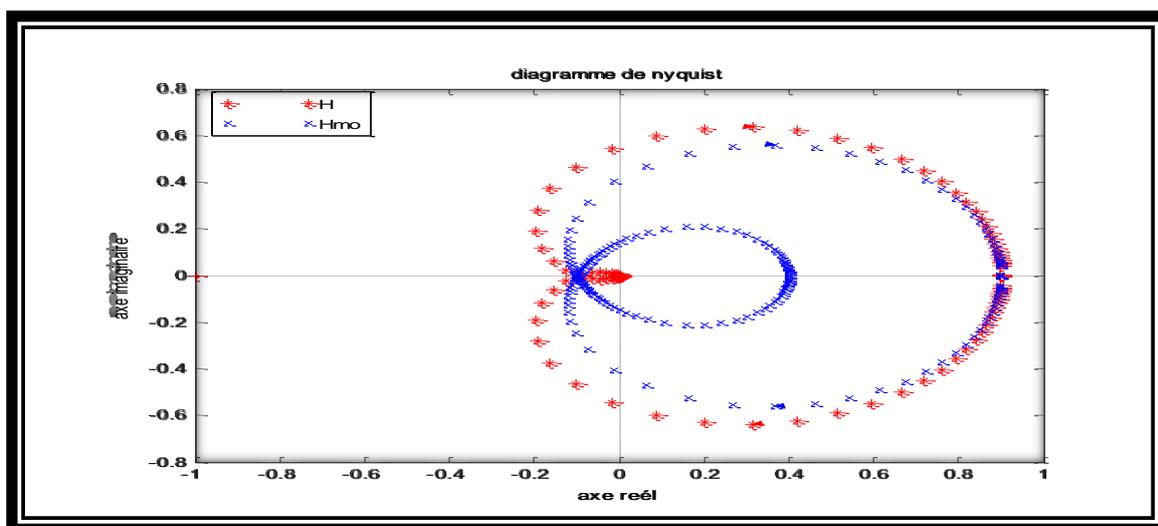
La fig. III.10, montre le diagramme de bode du modèle réduit Hmo et le modèle complet on observe que le modèle réduit capte les caractéristique dans un certaine durée puis il située au dessous du système complet puis on positionne au dessus du système.

De plus, le diagramme de bode en phase du modèle réduit qui a été déterminé selon est au dessus de celui du système et présente un grand écart sur tout l'intervalle de pulsations.



**Fig. III.11 : Comparaison la réponse indicielle du modèle complet et modèle réduit modreal.**

A partir de la fig. III.11, montrent que la réponse indicielle du modèle réduit démarre a partir au point 0.4 et la réponse indicielle du modèle complet démarre au point 0 après un certain temps les deux réponses devient identique et réagit simultanément jusqu'à atteigne la consigne désiré.



**Fig. III.12 Comparaison entre le diagramme de nyquist du modèle complet et réduit modreal.**

**III.3.4 Méthode de Projection stable et instable :**

La méthode calcule la projection stable et instable d'une réalisation minimale de Système  $G$ . Tels que  $G(s) = [G(s)]_- + [G(s)]_+$

$[G(s)]_- = (A_{11}, \hat{B}_1, \hat{C}_1, \hat{D}_1)$  Dénote la partie stable de  $G(s)$

$[G(s)]_+ = (A_{22}, \hat{B}_2, \hat{C}_2, \hat{D}_2)$  Dénote la partie instable de  $G(s)$

**Algorithme :**

Trouver une matrice unitaire  $V$  par l'intermédiaire du blksch ou du rschur commandé de routines de décomposition de Schur tels que

$$A = V^T A V = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}$$

Basé sur le modèle de la forme commandée de Schur, vous pouvez obtenir un stable et un antistable  $|\lambda_i(\bar{A}_{11})| < |\lambda_i(\bar{A}_{22})|$ .

Enfin la solution de l'équation de matrice  $X$

$$\hat{A}_{11} X - X \hat{A}_{22} + \hat{A}_{12} = 0$$

$[G(s)]_- = (A_{11}, \hat{B}_1, \hat{C}_1, \hat{D}_1)$  Et  $[G(s)]_+ = (A_{22}, \hat{B}_2, \hat{C}_2, \hat{D}_2)$

$$\begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{bmatrix} V B \quad \text{Et} \quad [\hat{C}_1 | \hat{C}_2] = C V^T \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

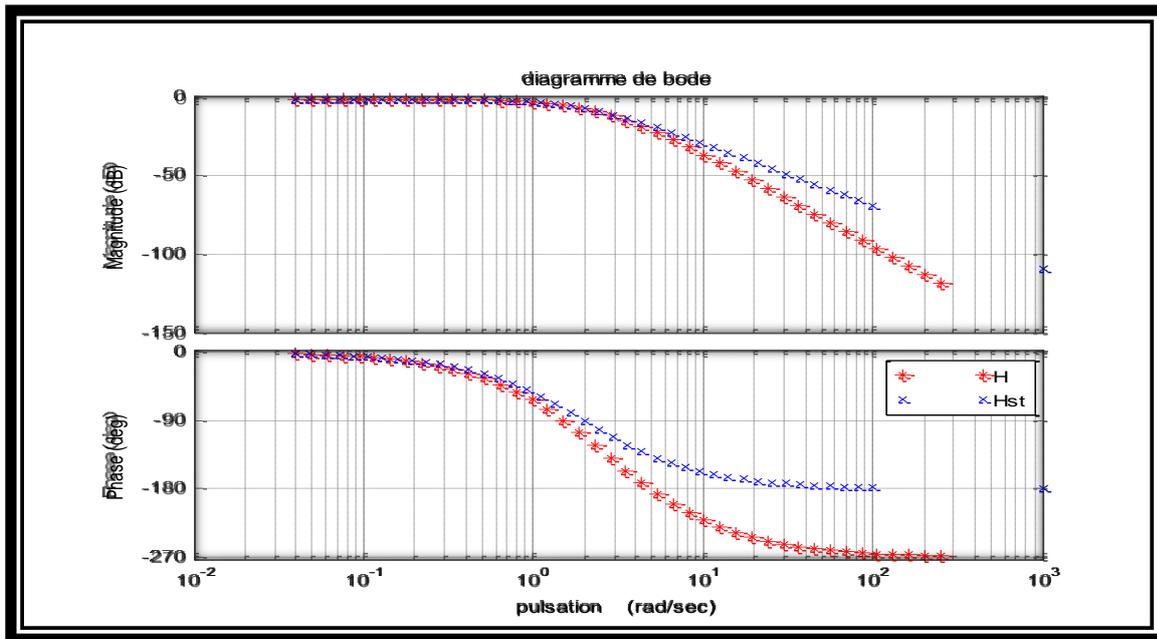
Le modèle réduit stabproj

- 1 ère technique du modèle réduit est comme suit

$$H_{st} = \frac{3.6}{s^2 + 4s + 4}$$

- 2 éme technique du modèle réduit est comme suit

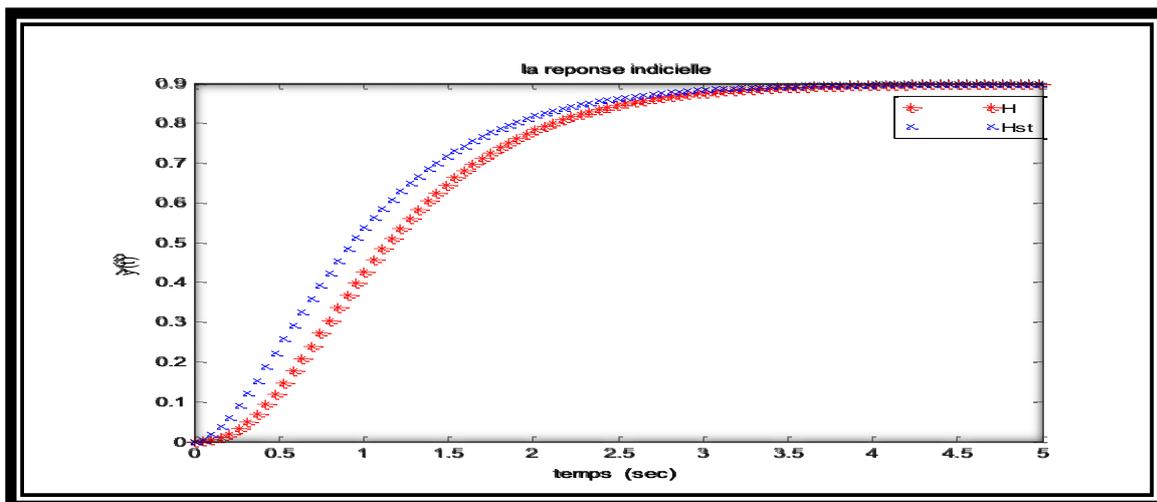
$$H_{in} = 0$$



**Fig. III.13** Comparaison le diagramme de bode du modèle complet et le modèle réduit stabproj.

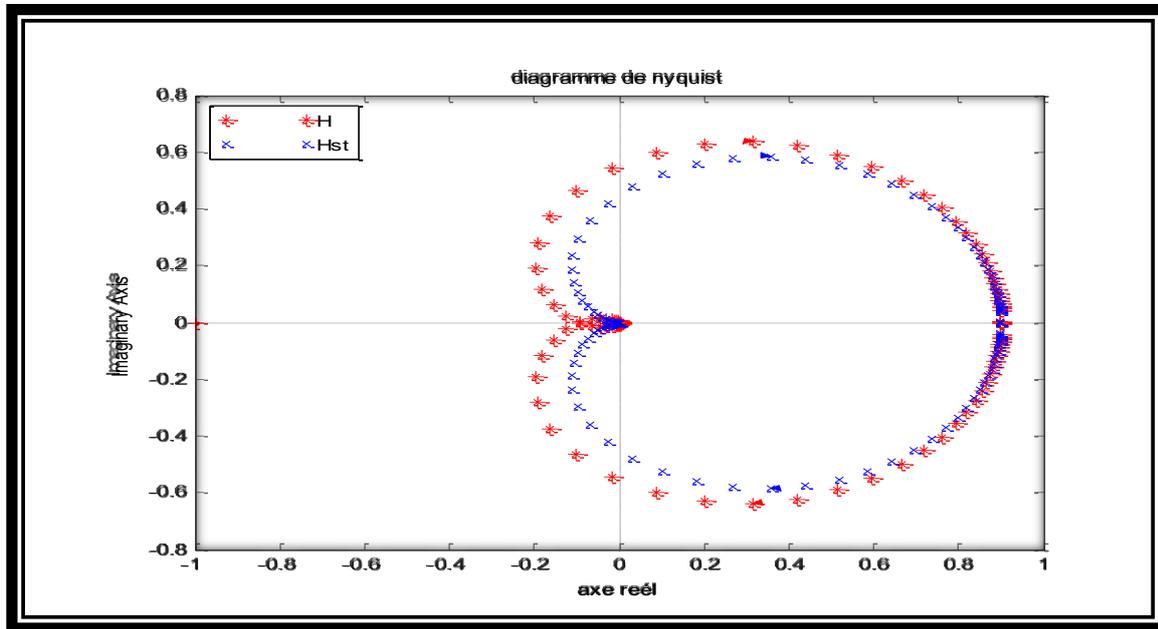
Comme le montre le diagramme de bode de la fig. III.13, le modèle réduit capte les caractéristiques du système dans l'intervalle de fréquence moins de 5.32 rad/sec très bien, mais la correspondance dans la région de fréquences supérieures à 5.32 rad/sec est pauvre. En outre, le modèle réduit ne tient pas pleinement compte de la dynamique dans la gamme fréquences de 5.32 -  $10^4$  rad/sec.

De plus, le diagramme de bode en phase du modèle réduit Hnc capte les caractéristiques du système dans l'intervalle de pulsation moins de 0.752, mais après cet intervalle le diagramme de bode en phase du modèle réduit est au dessus de celui du système complet.



**Fig. III.14** : Comparaison la réponse indicielle du modèle complet et modèle réduit stabproj.

A partir de la fig. III.14, on montre que la réponse indicielle du modèle réduit accroître très rapide est très vite par rapport a la réponse indicielle du modèle réduit. Alors en déduire que la technique de réduction donne la meilleure solution.



**Fig. III.15 : Comparaison entre le diagramme de nyquist du modèle complet et réduit stabproj.**

A partir de fig. III.12, et fig. III.15, on note que les deux courbes tracés laissé le point critique (-1,0) a la gauche pour une pulsation variante de 0 a l'infini. Donc en déduire que les deux systèmes est stable. On observe aussi l'identique et ressemblance entre les deux diagrammes de nyquist des systèmes réduits et le diagramme de nyquist du système complet.

### III.3.5 Méthode de décomposition du système en mode lente et rapide :

La méthode calcule la décomposition en mode lente et rapide d'un système  $G$ . Tels que

$$G(s) = [G(s)]_s + [G(s)]_f$$

$$[G(s)]_s = (A_{11}, \hat{B}_1, \hat{C}_1, \hat{D}_1) \text{ Dénote la partie lente de } G(s)$$

$$[G(s)]_f = (A_{22}, \hat{B}_2, \hat{C}_2, \hat{D}_2) \text{ Dénote la partie rapide de } G(s)$$

#### Algorithme :

Trouver une matrice unitaire  $V$  par l'intermédiaire du blksch ou du rschur commandé de routines de décomposition de Schur tels que

$$A = V^T A V = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}$$

Basé sur le modèle de la forme commandée de Schur, vous pouvez obtenir  $|\lambda_i(\bar{A}_{11})| < |\lambda_i(\bar{A}_{22})|$ .

Enfin la solution de l'équation de matrice X

$$\hat{A}_{11}X - X\hat{A}_{22} + \hat{A}_{12} = 0$$

$$[G(s)]_s = (A_{11}, \hat{B}_1, \hat{C}_1, \hat{D}_1) \quad \text{Et} \quad [G(s)]_f = (A_{22}, \hat{B}_2, \hat{C}_2, \hat{D}_2)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{bmatrix} V B \quad \text{Et} \quad [\hat{C}_1 | \hat{C}_2] = C V^T \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

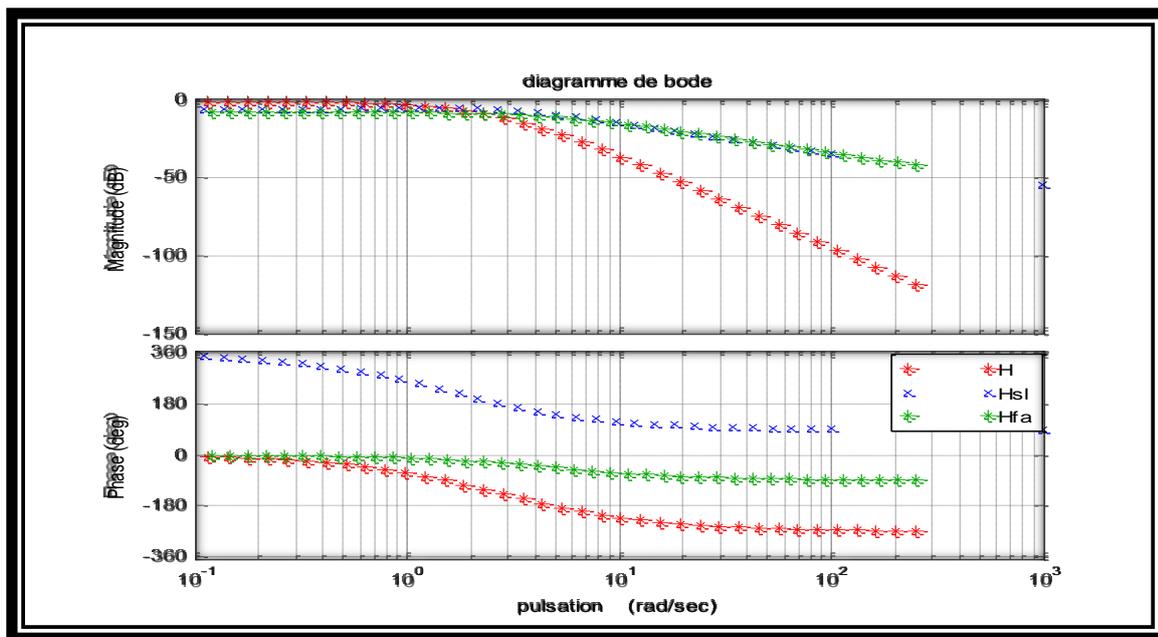
Le modèle réduit slowfast

- 1 ère technique du modèle réduit est comme suit

$$H_{sl} = \frac{-2s + 2}{s^2 + 4s + 4}$$

- 2 ème technique du modèle réduit est comme suit

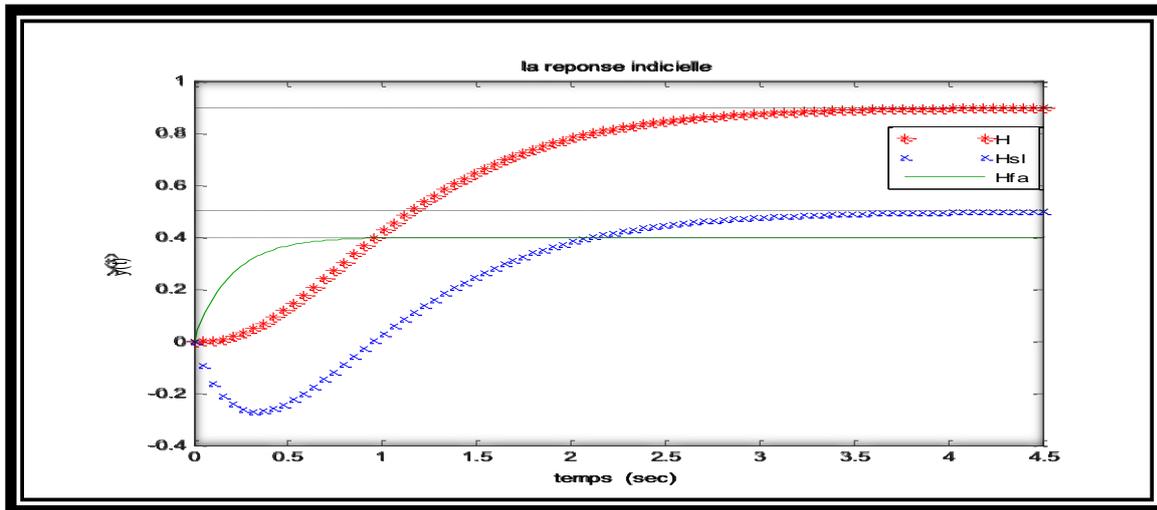
$$H_{fa} = \frac{2}{s + 5}$$



**Fig. III.16 : Comparaison le diagramme de bode du modèle complet et le modèle réduit slowfast.**

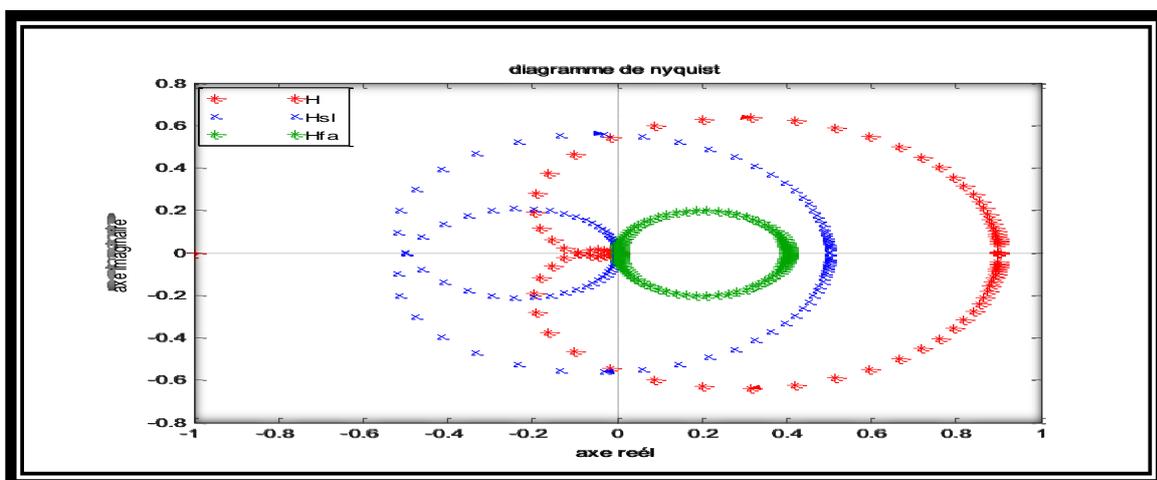
Après la fig. III.16, le diagramme de bode en amplitude du modèle réduit slow est identique au modèle réduit fast. Mais aussi dans cette zone le diagramme de bode des deux modèles réduits est au dessus de celui du modèle complet.

De plus, le diagramme de bode en phase du modèle réduit qui a été déterminé selon est au dessus de celui du système et présente un grand écart sur tout l'intervalle de pulsations. La deuxième technique fast a donné la meilleure approximation dans la domaine des fréquences.



**Fig. III.17 : Comparaison la réponse indicielle du modèle complet et modèle réduit slowfast.**

A partir de la fig. III.17, on montre que la réponse indicielle du système réduit diviser en deux modes lentes et rapides la somme de deux modes elle sa donne la même allure que la réponse indicielle du système complet. Alors elle capte la même dynamique de la réponse indicielle du système complet.



**Fig. III.18 : Comparaison entre le diagramme de nyquist du modèle complet et réduit slowfast.**

A partir de fig. III.18, on note que le diagramme de nyquist du système réduit et le diagramme de nyquist du système complet laissé le point critique  $(-1,0)$  à la gauche pour une pulsation variante de 0 à l'infini.

➤ Correcteur RST :

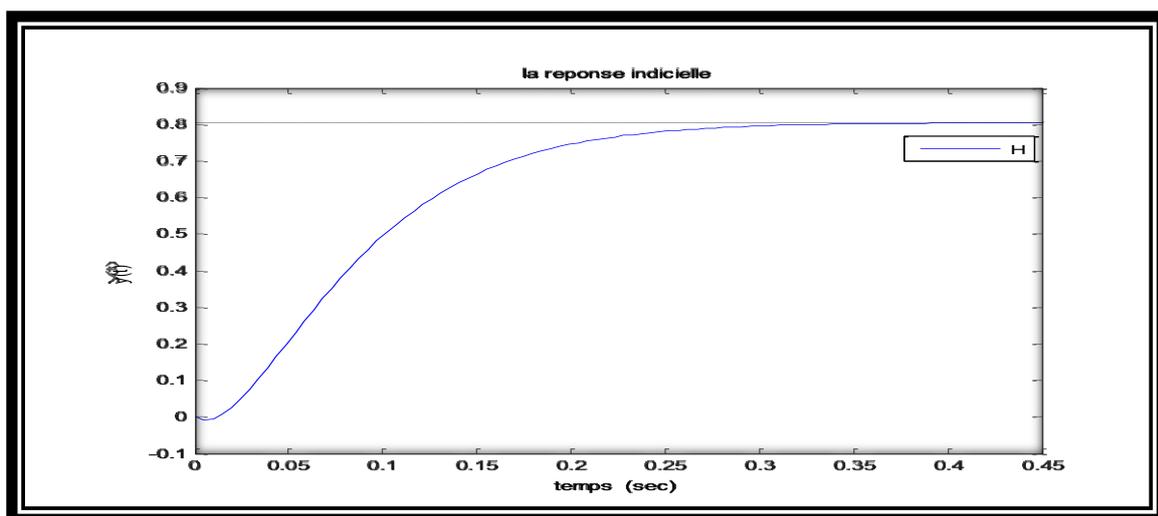
La procédure de conception du régulateur est constituée de deux étapes :

- La mise en œuvre d'une commande numérique nécessite un modèle discrétisé du procédé à commander. Cette stratégie du type RST utilise un modèle en discret du processus permettant d'inclure les connaissances sur le système. Cette approche est généralement utilisée pour améliorer les performances en poursuite et régulation.
- Ensuite, le régulateur est conçu afin de satisfaire les spécifications de poursuite de la référence. Les trois paramètres de conception R, S et T sont directement liés aux propriétés en boucle fermée.

L'ordre du correcteur RST obtenu est 4 pour le modèle complet et de l'ordre de 2 pour les modèles réduits.

Les réponses de la sortie à la référence à une commande de type échelon sont représentées dans les figures suivantes.

➤ Sortie du système original après régulation



**Fig.III.19 : Sortie du système complet après régulation.**

Le régulateur de boucle permettant de stabiliser le système en boucle fermée. Le régulateur RST est utilisé pour ajuster la poursuite de la référence.

- Les pôles et les zéros du système complet avant régulation

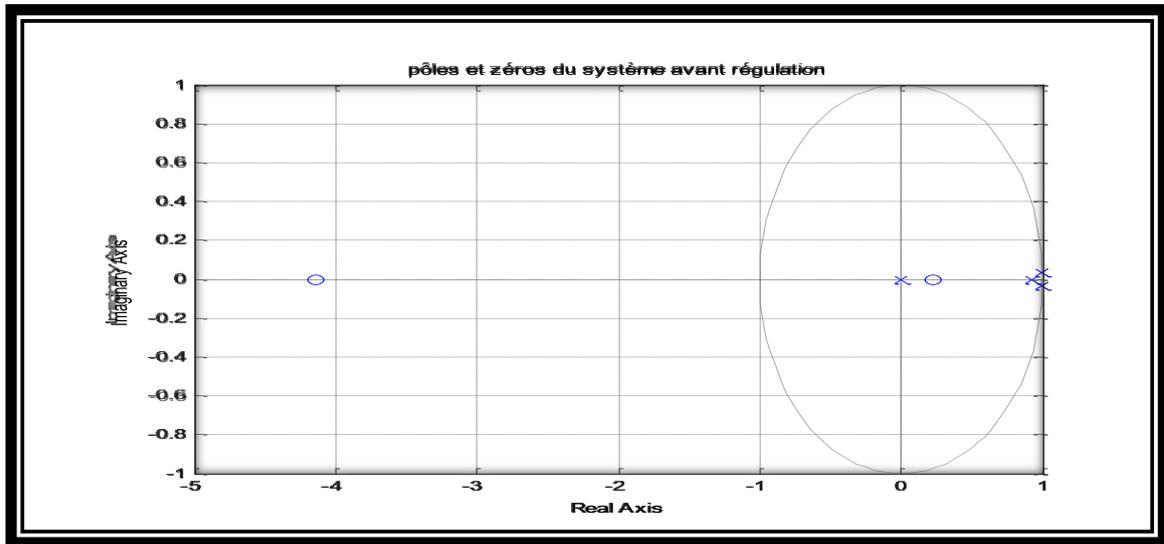


Fig. III.20 : les pôles et les zéros du système complet avant régulation.

- Les pôles et les zéros du système complet après régulation

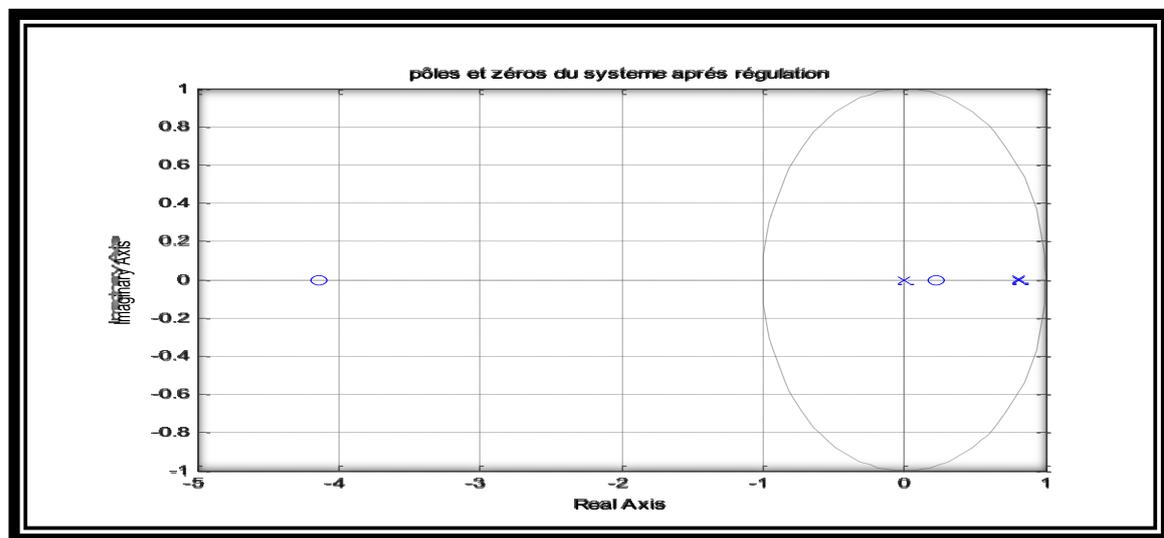


Fig.III.21 : les pôles et les zéros du système complet après régulation.

Système réduit : ncfmr (s)

- Sortie du système ncfmr après régulation

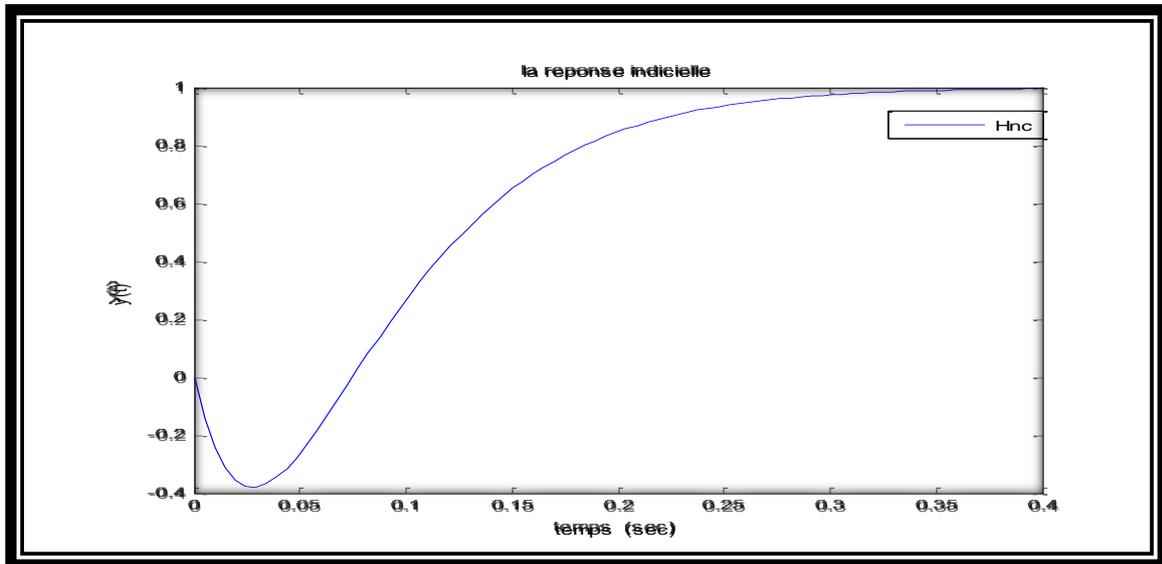


Fig.III.22 : Sortie du système ncfmr après régulation.

- Les pôles et les zéros du système ncfmr avant régulation

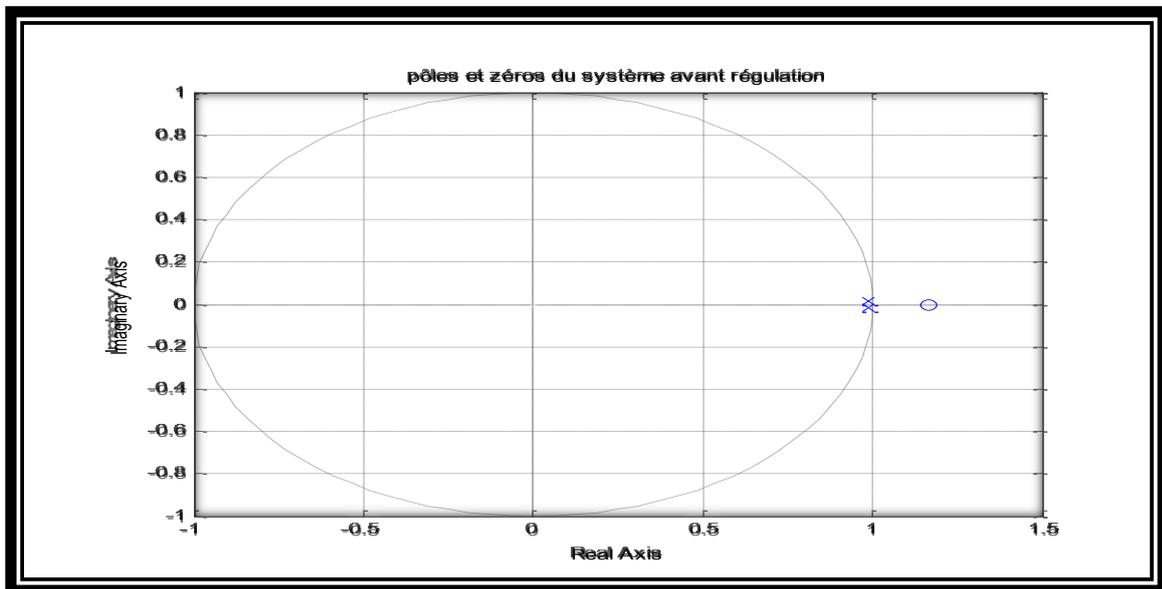


Fig.III.23 : les pôles et les zéros du système ncfmr avant régulation.

- Les pôles et les zéros du système ncfmr après régulation

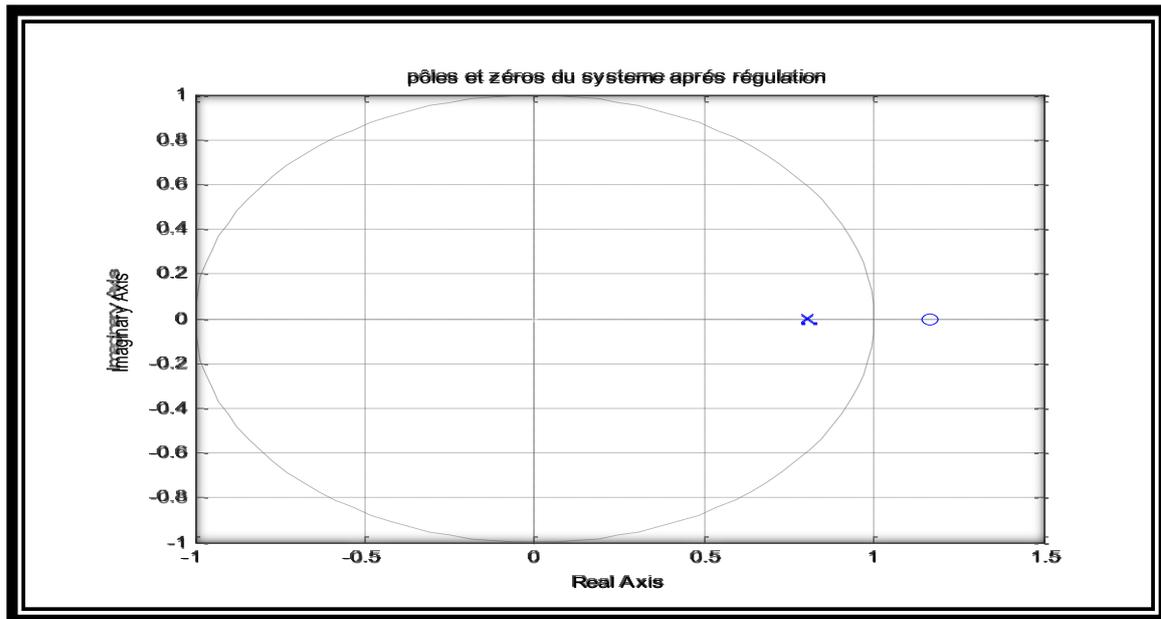


Fig.24 : les pôles et les zéros du système ncfmr après régulation.

Système réduit : schurmr

- Sortie du système schurmr après régulation

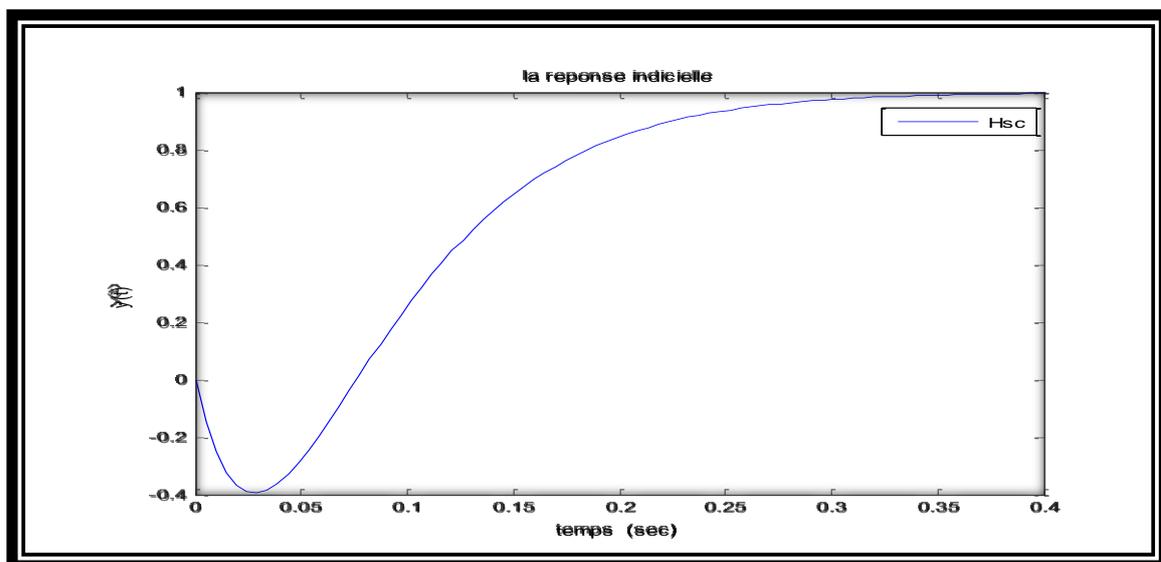


Fig. III. 25 : Sortie du système schurmr après régulation.

- Les pôles et les zéros du système schurmr avant régulation

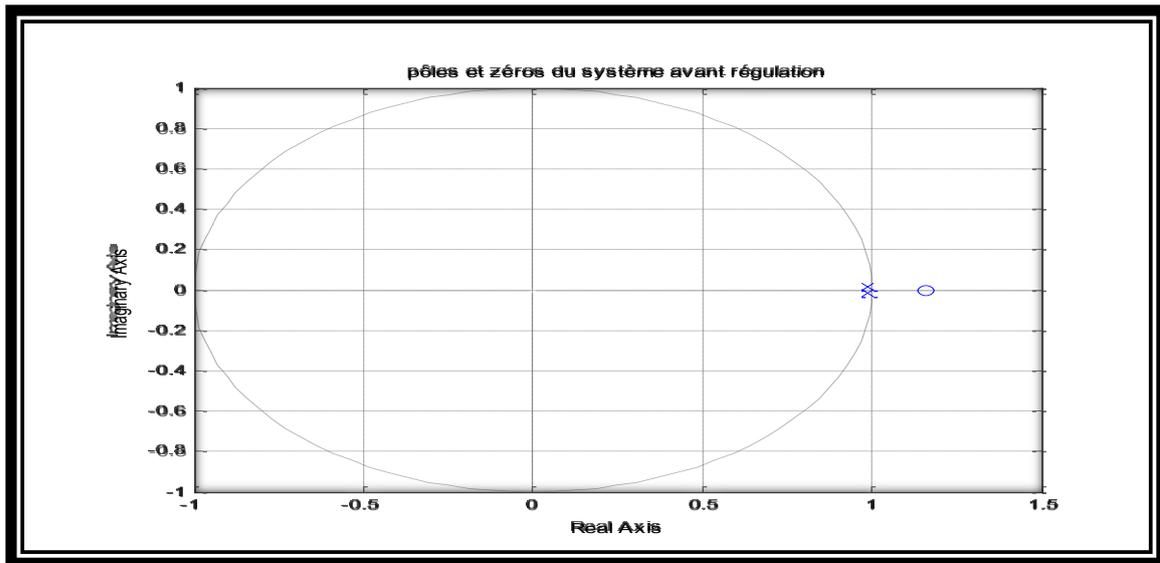


Fig. III. 26 : les pôles et les zéros du système schurmr avant régulation.

- Les pôles et les zéros du système schurmr après régulation

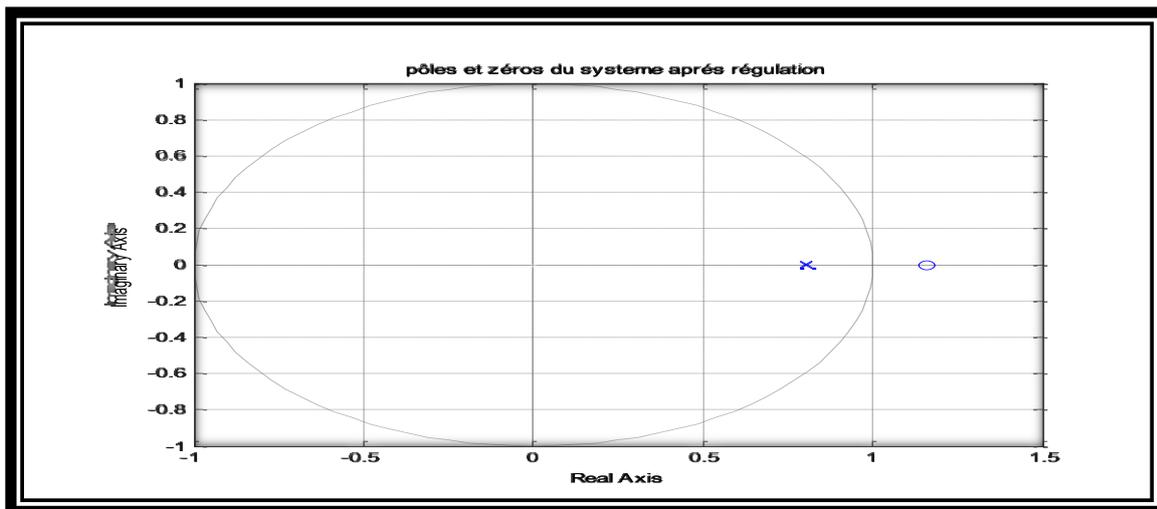
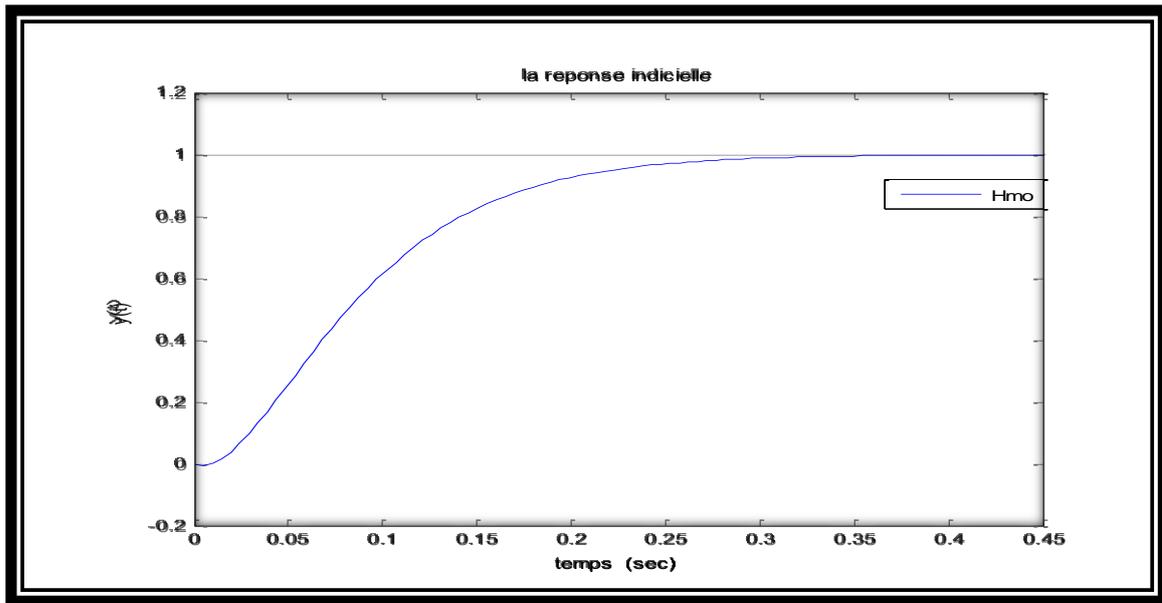


Fig. III.27 : les pôles et les zéros du système schurmr après régulation.

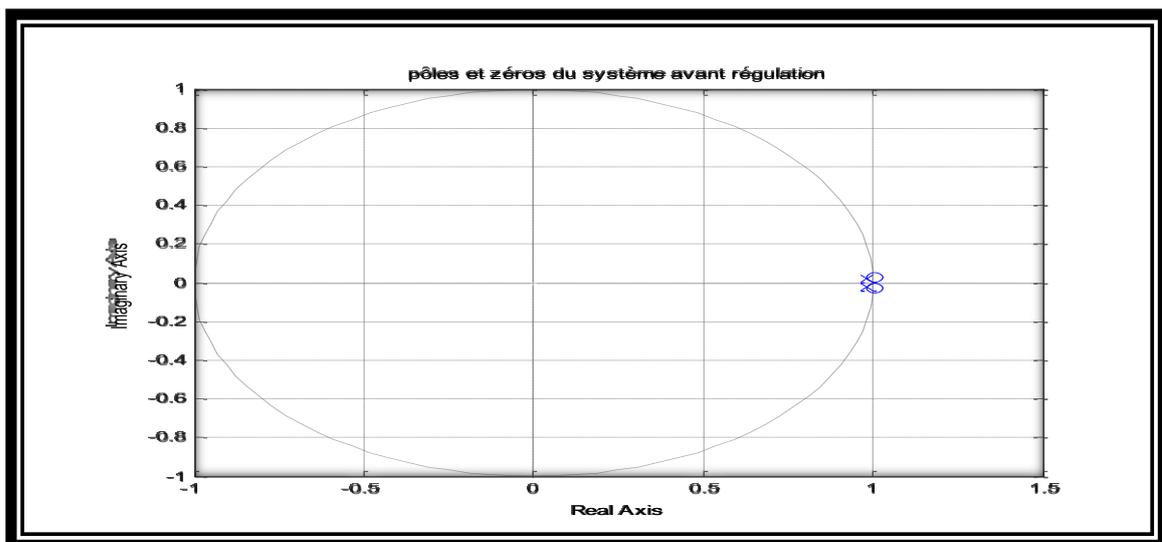
Système réduit : modreal

- Sortie du système modreal après régulation



**Fig. III.28 : Sortie du système modreal après régulation.**

- Les pôles et les zéros du système modreal avant régulation



**Fig. III.29 : les pôles et les zéros du système modreal avant régulation.**

- Les pôles et les zéros du système modreal après régulation

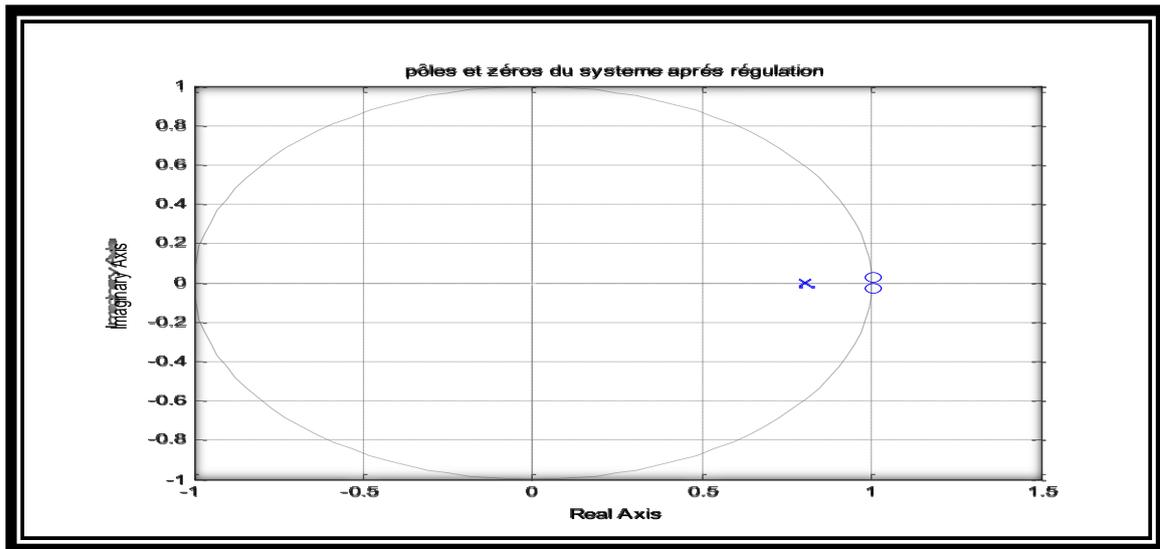


Fig. III.30 : les pôles et les zéros du système modreal après régulation.

Système réduit : stabproj

➤ Sortie du système stabproj après régulation

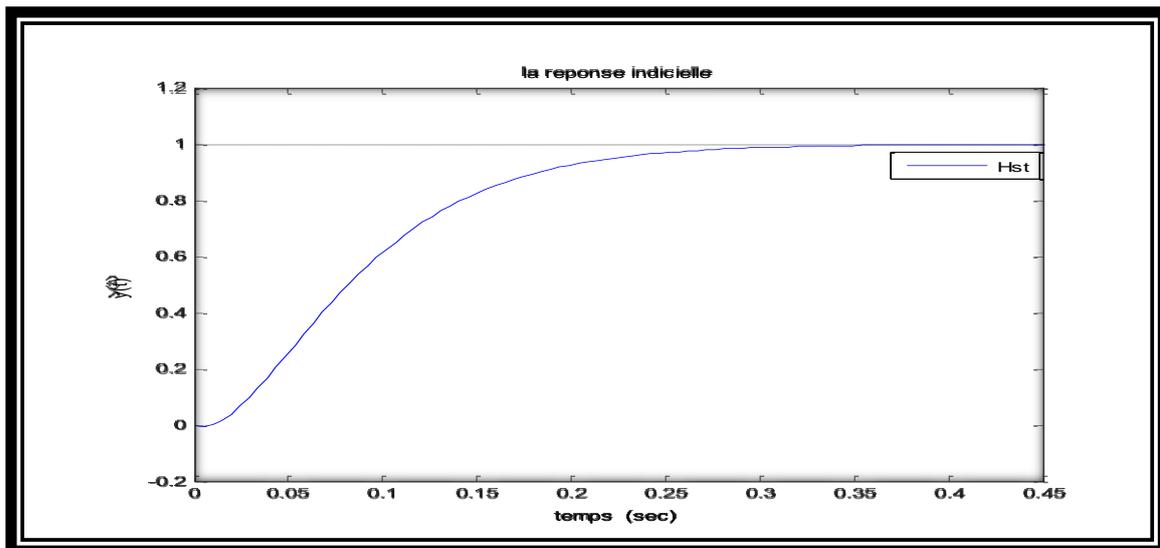


Fig.III.31 : Sortie du système stabproj après régulation.

➤ Les pôles et les zéros du système stabproj avant régulation

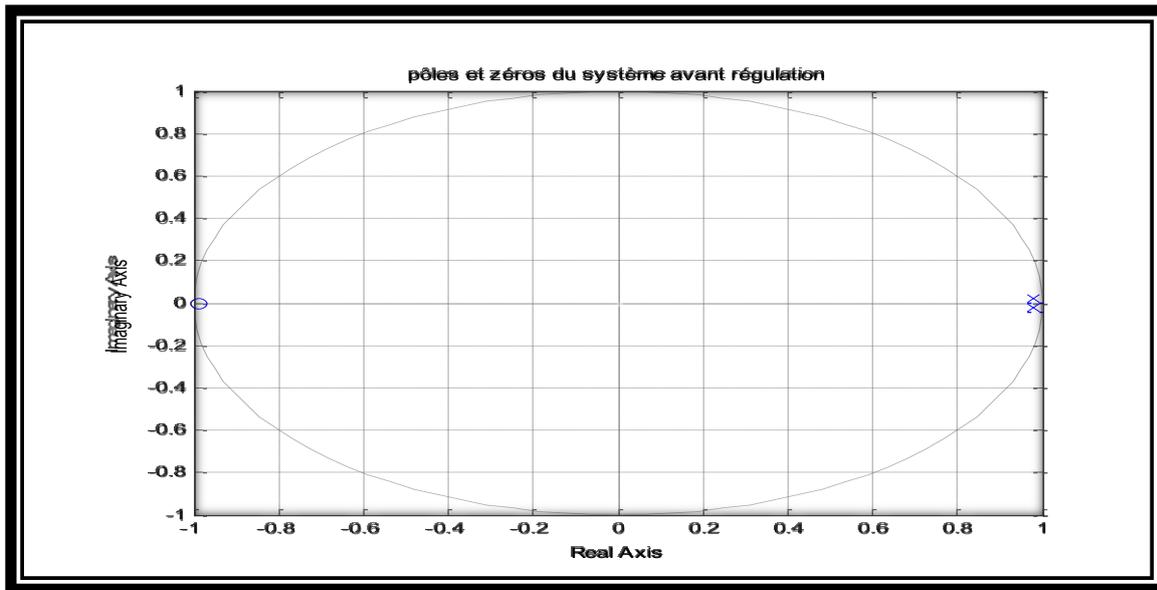


Fig. III.32 : les pôles et les zéros du système stabproj avant régulation.

- Les pôles et les zéros du système stabproj après régulation

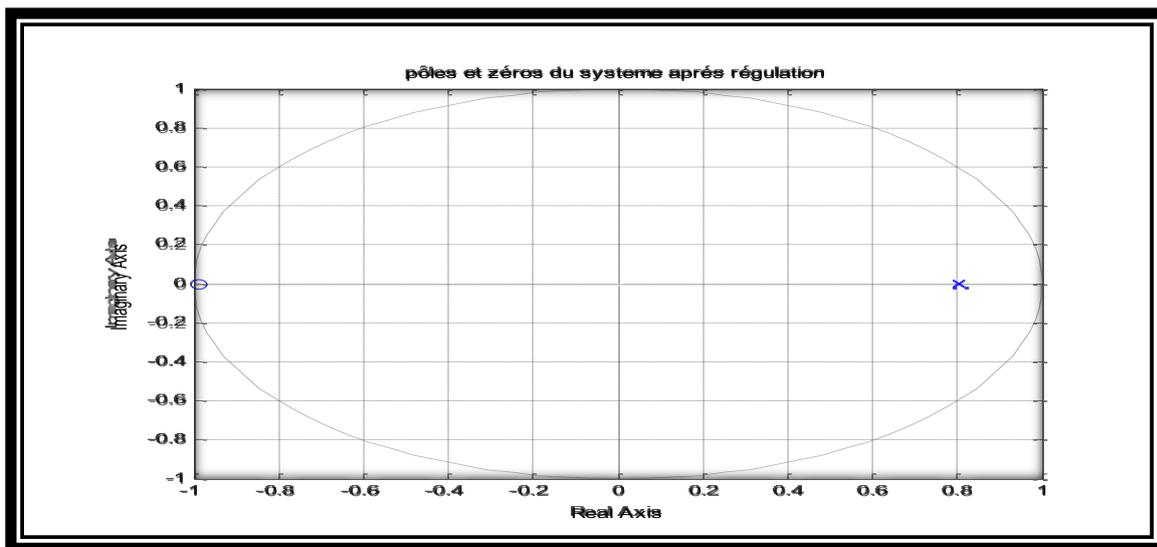
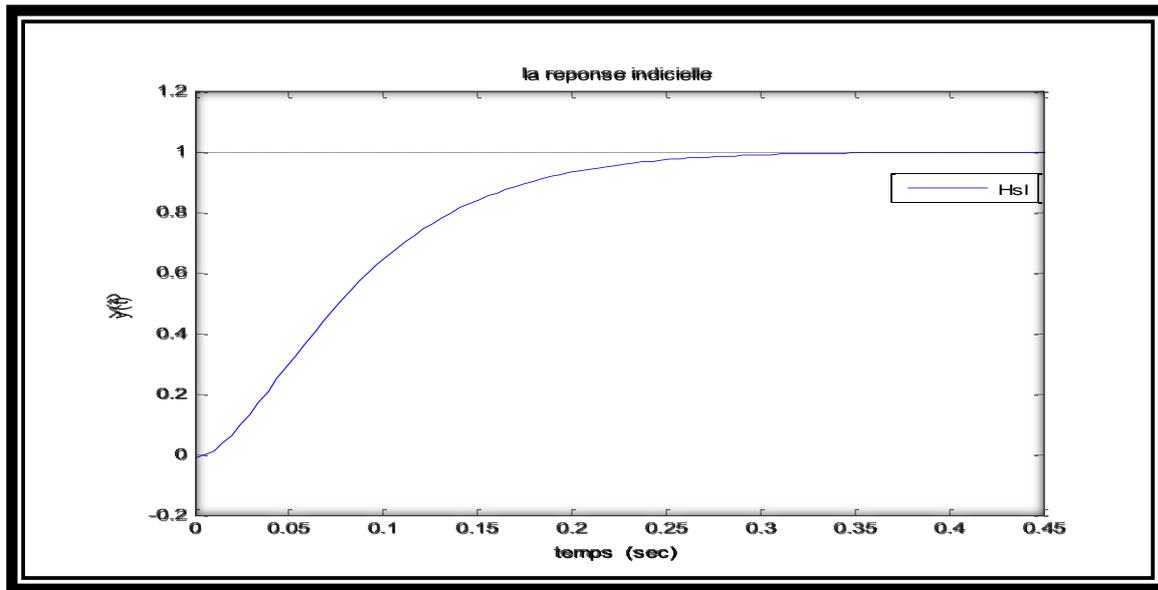


Fig. III.33 : les pôles et les zéros du système stabproj après régulation.

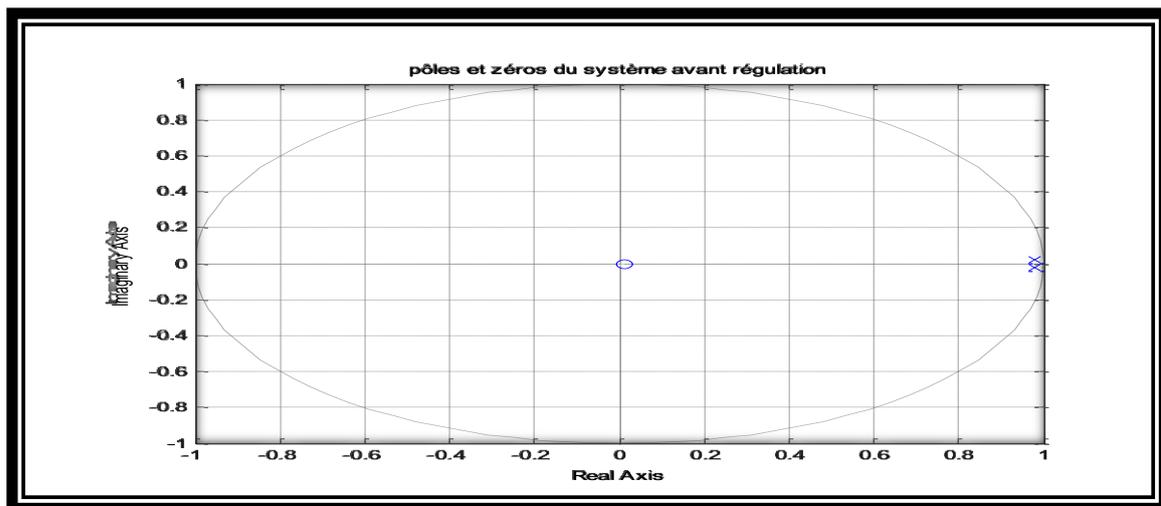
Système réduit : slowfast

- Sortie du système slowfast après régulation



**Fig. III.34 : Sortie du système slowfast après régulation.**

- Les pôles et les zéros du système slowfast avant régulation



**Fig. III.35 : les pôles et les zéros du système slowfast avant régulation.**

- Les pôles et les zéros du système slowfast après régulation

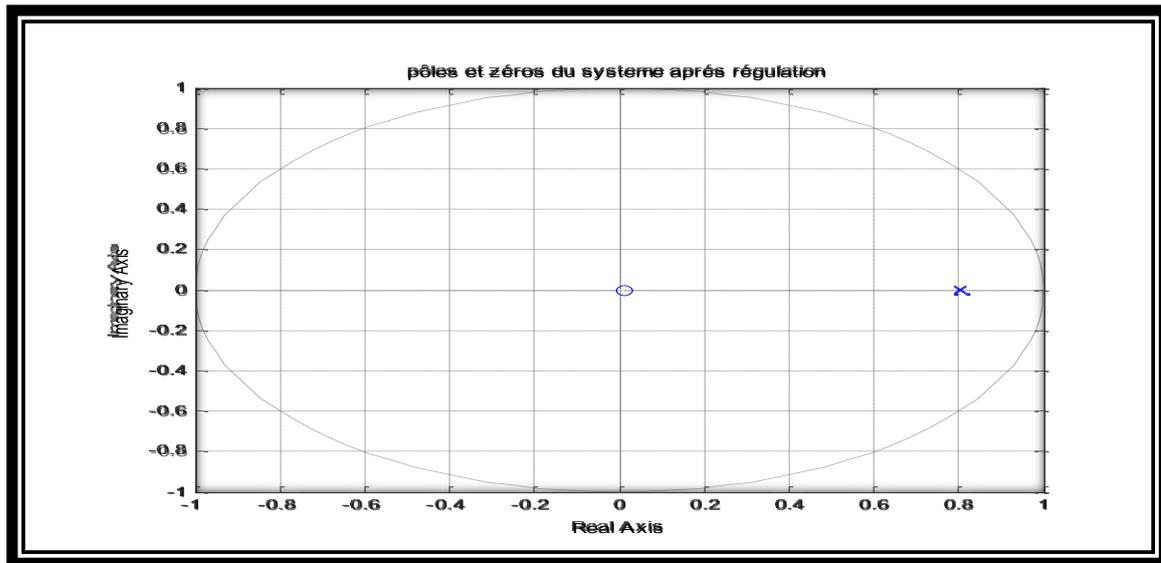


Fig. III.36 : les pôles et les zéros du système slowfast après régulation.

Après les figures des pôles et des zéros on n'observe que les pôles avant régulation situées au point critique (1,0). Mais après la régulation les pôles situées à l'intérieur du cercle unitaire. Donc en déduire que le système est stable.

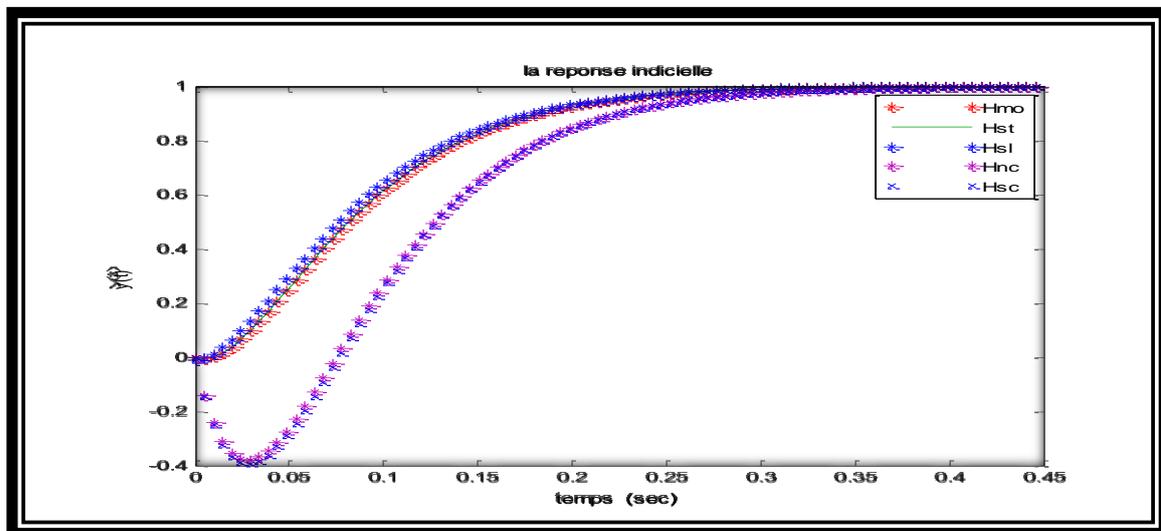


Fig. III. 37 : Réponse temporelle des modèles réduits vis-à-vis d'un échelon de référence.

Le régulateur RST a clairement de bonnes performances. Cette méthode se révèle performante pour maîtriser la dynamique en boucle fermée.

D'après la fig. III.37, les modèles réduits qui ont une réponse plus proche de celle du système à contrôler sont les modèles Hmo et Hst et Hsl que les modèles Hnc et Hsc.

L'avantage de l'approche de réduction de modèle est que le modèle réduit permet le développement de correcteurs de complexité faible afin d'être embarquées sur des systèmes de commande ayant de très fortes contraintes de ressources matricielles et de calcul.

### **III. 4 Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats de simulation. Les résultats confirment l'efficacité des méthodes de réduction de modèle. Les méthodes de réduction de modèle ont l'avantage d'approcher le système réel par un modèle réduit sur une plage de fréquence.

La procédure de synthèse de régulateur RST est utilisée, les résultats de simulation montrent clairement l'efficacité de la procédure. Cette méthode se révèle performante pour maîtriser la dynamique en boucle fermée. L'intérêt de cette méthode est d'agir sur le modèle complet du système en modifiant les caractéristiques du système complet bouclé.

## Conclusion générale

Dans ce manuscrit, nous avons présenté quelques méthodes de réduction de modèle existantes dans la littérature. Quelques techniques de réduction ont été illustrées à travers un exemple d'application : procédé thermique. Les résultats de simulations obtenus dans le cadre de cette application mis en évidence les avantages des méthodes proposées.

Lorsque le modèle du procédé contient un retard pur, une méthode de réduction de modèle est nécessaire. En approche le modèle qui contient un retard pur par un modèle réduit en assurant que les marges de robustesse, obtenues avec le correcteur conçu basé sur le modèle réduit, seront au moins les mêmes avec le modèle contient un retard pur.

Toutefois, en pratique, des régulateurs d'ordre réduits sont souvent exigés pour la mise en œuvre en temps réel. Par conséquent, la réduction de modèle joue un rôle fondamental dans la conception de commandes pour les systèmes dynamiques. Dans le cadre de la conception de régulateur de rétroaction, le modèle d'ordre réduit est utilisé comme un moyen pour synthétiser le correcteur. Par conséquent, la chose la plus importante n'est pas l'erreur d'approximation, mais les propriétés en boucle fermée. Plusieurs méthodes de conception de correcteur basée sur le modèle d'ordre réduit avec une garantie de la stabilité ont été proposées.

Les perspectives de ce mémoire est représentée comme suit :

- Le modèle réduit conserve les propriétés du modèle complet
- Approcher le système réel par un modèle réduit sur une plage de fréquence
- Modifiant les caractéristiques du système complet
- La synthèse montre l'efficacité de la procédure

Dans ce travail de mémoire, nous avons utilisé une méthode des synthèses du correcteur RST. L'efficacité de l'approche proposée a été démontrée au moyen de l'ensemble des modèles d'ordre réduit et le modèle original.

### Références bibliographiques

- [1] Rachid. A, Mehdi. D. «Automatique : Réalisation Réduction et commande des systèmes linéaires ». Edition technip. Paris. 1997.
- [2] Godoy. E. «Système de régulation ». Dunod. Paris. 2007.
- [3] Rachid. A. «Système de régulation ». Masson. Paris. 1996.
- [4] Proust. P. «Automatique : Contrôle et régulation ». Dunod. Paris. 2004.
- [5] Longchamp. R. «Commande numérique de système dynamique ». EPF de Lausanne. 1995.
- [6] Proust, P. « Contrôle régulation ». Nathan. Paris. 1997.
- [7] Martaj. N, Mokhtari. M. « Matlab R2009. Simulink et stateflow pour l'ingénieur. Chercheurs et étudiants ». Springer. Paris. 2009.
- [8] Ksouri. M, Borne. P. « La commande par ordinateur application aux procédés industriels ». Technip. Paris. 1999.
- [9] Mokhtari. M. « Matlab 5.2 et 5.3 et Simulink 2 et 3 pour l'étudiant et l'ingénieur ». Springer. Allemagne. 2000.
- [10] Stéphane Azou. « Réalisation équilibrée de systèmes par orthogonalisation de fonctions d'entrée- Gramiens et approximation ». Thèse de Doctorat. Université de Bretagne occidentale. 29 Décembre 1997.
- [11] Hoang Bao. « Contribution aux méthodes de synthèse de correcteurs d'ordre réduits sous contraintes de robustesse et aux méthodes de réduction de modèles pour la synthèse robuste en boucle fermée ». Doctorat. Institut Polytechnique de Grenoble. 29 novembre 2010.
- [12] Ksouri. M, Allahem. S. « réduction de modèles Application à un système : une boule en sustentation ». Master. Université de Biskra. 2013-2014.