

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche scientifique



Université Mohamed Khider Biskra
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Electrique
Filière : Électronique
Option : Télécommunication

Réf:.....

Mémoire de Fin d'Etudes
En vue de l'obtention du diplôme:
MASTER

Thème

Estimation spectrale paramétrique d'un signal vocale

Présenté par :
Zouzou djoubier

Soutenu le : 04 Juin 2014

Devant le jury composé de :

Dr. Bakhouche Khaled	MCB	Président
Dr. Sbaa Salim	MCA	Encadreur
M^m. Barkat Aicha	MAA	Examineur

Année universitaire : 2013 / 2014

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la recherche scientifique



Université Mohamed Khider Biskra
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Electrique
Filière : Electronique
Option : Télécommunication

Mémoire de Fin d'Etudes
En vue de l'obtention du diplôme :

MASTER

Thème

Estimation spectrale paramétrique d'un signal vocale

Présenté par :
Zouzou djoubier

Avis favorable de l'encadreur :
Sbaa Salim

Avis favorable du Président du Jury
Dr. Bakhouche Khaled

Signature

Cachet et signature

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche scientifique



Université Mohamed Khider Biskra
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Electrique
Filière : Electronique
Option : Télécommunication

Thème :

Estimation spectrale paramétriques d'un signal vocale

Proposé par : Mr. Sbaa Salim

Dirigé par : Mr. Sbaa Salim

Résumé

Dans ce travail, nous avons étudié l'estimation spectrale paramétrique qui est appliquée sur une voix vocale. L'estimation des paramètres d'un module ARMA (p, q) est un problème qui se pose à la fois en automatique et en traitement du signal. Nous avons présenté une méthode d'estimation des paramètres d'un module ARMA.

Dans ce mémoire, nous avons estimé une voix vocale en utilisant un bruit par un modèle paramétrique ARMA. Les résultats obtenus par ces méthodes pour estimer une voix vocale et comparable pour la densité spectrale d'un modèle.

Mot clé : Traitement du signal, signal vocale, Modélisation d'un signal, Estimation spectrale paramétrique, modèle AR, MA, ARMA.

Abstract

In this work, we have studied estimating the parameters applying with vocal voice. The need for estimating the parameters of an ARMA (p, q) process arises in many applications both in signal processing and in automatic control. Recently, we present an estimation procedure to get the ARMA parameters.

This result in DSP of vocal voice obtained by model is compared with results obtained by estimation methods.

Keyword: Signal processing, Estimation parameters, AR, MA, ARMA.

Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement Mr. Sbaa Salim d'avoir dirigé mes travaux de ce mémoire et de son soutien moral durant l'année et au cours de préparation de ce mémoire.

Nous remercies Mr. Bakhouche Khaled pour son aide précieuse et d'avoir accepté de juger ce travail.

Nous remercies M^{me}. Barkat Aicha qui ma fait l'honneur d'accepter de juger ce travail.

Dédicaces

A mes chers parents,

A toute ma famille et mes voisins,

A tous mes amis,

Djoubier

Table Des matières

TABLE DES MATIERES	1-VIII
LISTE DES FIGURES	10
LISTE DES ABREVIATIONS	13
INTRODUCTION GENERAL	1
CHAPITRE 1 : ETAT DE L'ART DES METHODES MODELISATION DES SIGNAUX	3
1 INTRODUCTION	4
2 LA RPRESENTATION DE SIGNAL	4
2.1 Définition de signal	4
2.2 Bruit	5
2.4 Traitement de signal	5
3 CLASSIFICATION DES SIGNAUX	5
3.1 Signaux physiques et modèles	5
3.1.1 Signaux réalisables	5
3.1.2 Modèles	6
3.2 SIGNAUX DÉTERMINISTES OU ALÉATOIRES	6
3.2.1 Définitions	6
3.2.2 Sous-classes de signaux, déterministes	7
a) Définitions	7
3.2.3 Notation complexe des signaux sinusoïdaux et concept de fréquence négative :	8
3.2.4 Sous-classes de signaux aléatoires	10
a) Définitions	10
3.3 Spectres des signaux	11
3.3.1 SIGNAUX À ÉNERGIE OU PUISSANCE MOYENNE FINIE	11
a) Classification énergétique	11
3.3.2 Energie et puissance moyenne d'un signal.	11
a) Définitions	11
3.3.3 Signaux à énergie finie	12
3.3.4 Signaux à puissance moyenne finie (non nulle)	13
3.4 VARIABLES CONTINUES ET DISCRÈTES	13
3.4.1 Classification morphologique.	13
a) Définitions	13
3.4.2 Modèles de signaux analogiques, échantillonnés et numériques	14
3.4.3 Correspondances et différences	14
4 MODELISATION DES SIGNAUX	15
4.4.1 Prédiction linéaire	24
CHAPITRE 2 : ESTIMATION PARAMETRIQUE D'UN SIGNAL	28
1 INTRODUCTION	29
2 MODELES RATIONNELS LINEAIRES	30
3 ESTIMATION DES PARAMETRES D'UN MODELE AR	35
4 METHODES D'ESTIMATION	37
5 CONCLUSION	54

CHAPITRE 3 : RESULTATS ET DISCUSSIONS	55
1. INTRODUCTION	56
2. METHODE AR :.....	56
3. METHODE ARMA.....	63
CONCLUSION GENERALE	65
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	66

Liste Des Figures

Fig1.1 Les signaux sinusoïdaux	7
Fig. 1.2 Signal pseudo-aléatoire.	8
Fig. 1.3 Signal quasi-périodique.....	8
Fig. 1.4 Signaux transitoires : $x(t)$ = impulsion rectangulaire ; $y(t)$ = impulsion exponentielle Décroissante ; $z(t)$ = impulsion sinusoïdal.	9
Fig1.5 conjugués d'amplitude $A/2$ tournant dans des directions opposées avec une pulsation (vitesse angulaire)	9
Fig. 1. 6 Signal aléatoire stationnaire : $x(t)$ = signal à large bande (bruit blanc) ; $y(t)$ = signal filtré passe-bas.	10
Fig. 1.7 Signal aléatoire non stationnaire.	10
Fig. 1.8 Distingue quatre types de signaux.....	13
Fig. 1.9 Modélisation d'un système.....	23
Fig. 2.1 – Processus ARMA (p,q) vu comme la sortie d'un filtre linéaire.	30
Fig. 2.2 – Différences entre spectres ARMA, AR et MA.	31
Fig. 2.3 – Périodogramme du signal.	33
Fig. 2.4 – Spectre issu d'une modélisation AR(20) du signal.	33
Fig. 2.5 – Spectre issu d'une modélisation MA(20) du signal.	34
Fig. 2.6 – Spectre issu d'une modélisation ARMA(8,6) du signal.	34
Fig. 2.7 – Ordre minimal de modélisation AR pour avoir une résolution comparable au périodogramme, en fonction de N et du SNR.	42
Fig. 2.8 – Comparaison du spectre AR et du périodogramme. 2 sinus+bruit. N=32. SNR=15dB	43
Fig. 2.9 – Comparaison du spectre AR et du périodogramme. 2 sinus+bruit. N=64. SNR=15dB.	44
Fig. 2.10 – Comparaison du spectre AR et du périodogramme. 2 sinus+bruit. N=128. SNR=15dB.	44
Fig. 2.11 – Comparaison du spectre AR et du périodogramme. 2 sinus+bruit. N=256. SNR=15dB.	44
Fig. 2.12– Influence du SNR sur la résolution du modèle AR. 3 sinus + bruit. N=256. SNR=0dB. p=12.....	45
Fig. 2.13– Influence du SNR sur la résolution du modèle AR. 3 sinus + bruit. N=256. SNR=5dB. p=12.....	45
Fig. 2.14– Influence du SNR sur la résolution du modèle AR. 3 sinus + bruit. N=256. SNR=10dB. p=12.	45
Fig. 2.15– Influence du SNR sur la résolution du modèle AR. 3 sinus + bruit. N=256. SNR=15dB. p=12	46
Fig. 2.16– Influence de l'amplitude des sinusoïdes sur la modélisation AR et le périodogramme.....	46
Fig. 2.17 – Influence de l'amplitude des sinusoïdes sur la modélisation AR et le périodogramme.....	46
Fig. 2.18 – Comparaison maxima-pôles.....	50

Fig. 2.19– Critères AIC, MDL pour une modélisation AR(p) de 2 sinus+bruit. SNR=5dB. N=256.	51
Fig. 2.20 – Critères FPE,CAT pour une modélisation AR(p) de 2 sinus+bruit. SNR=5dB. N=256.	51
Fig. 2.21 – Spectre issu d’une modélisation AR(2) d’un processus AR(4).	52
Fig. 2.22 – Spectre issu d’une modélisation AR(4) d’un processus AR(4).	52
Fig. 2.23 – Spectre issu d’une modélisation AR(8) d’un processus AR(4).	52
Fig. 2.24– Spectre issu d’une modélisation AR(16) d’un processus AR(4).	53
Fig. 2.25 – Valeur des pôles calculés par modélisation AR(p) d’un processus AR(4)	53
Fig.2.26– Valeurs singulières de la matrice de corrélation estimée.....	53

Liste des abréviations

FFT	Fast Fourier Transform.
ISO	International Organization for Standardization.
AR	Auto Regressive Moving Average.
MA	Moving Average
ARMA	Auto Regressive Moving Average
SNR	Rapport Signal / Bruit
FPE	Final Prediction Error
CAT	Criterion Autoregressive Transfer
AIC	Akaike Information Criterion
MDL	Minimum Description Length

Introduction général

Le traitement du signal est la discipline qui développe et étudie les techniques de traitement (filtrage, amplification...), d'analyse et d'interprétation des signaux.

Il existe plusieurs branches particulières du traitement du signal, en fonction de la nature des signaux considérés. En particulier traitement de la parole (ou plus généralement du son), pour l'analyse, la compression, la synthèse et la reconnaissance de la parole.

Après de nombreuses années de recherche en traitement automatique de la parole, on peut s'étonner de l'intérêt persistant pour le problème de l'analyse du signal vocal qui se pose préalablement à tout traitement. Il apparaît, en effet, que malgré les succès obtenus ces dernières années dans l'industrialisation d'équipements de synthèse et de reconnaissance, le développement de produits plus élaborés dans le futur, reste dépendant en partie, de la qualité de l'analyse :

En synthèse de la parole, l'amélioration de la qualité et du naturel de la voix synthétique demande, au-delà d'un bon module du canal vocal, une meilleure compréhension du modèle des sources (cordes vocales, constrictions dans le canal...). Il s'agit d'un problème de déconvolution particulièrement délicat car seul le signal vocal de sortie est accessible ;

C'est l'examen des résultats de ces méthodes d'analyse appliquées au domaine de la parole qui fera l'objet de cet mémoire. Depuis des méthodes de modélisation plus élaborées sont maintenant disponibles pour répondre aux problèmes complexes rencontrés :

Méthodes récursives séquentielles, c'est-à-dire, actualisant à chaque nouvel échantillon, un modèle instantané qui s'adapte au cours du temps aux variations du système générateur du signal. Ces méthodes effectuent une estimation des moindres carrés exacts dans diverses conditions et sont dotées d'algorithmes rapides. Elles permettent en (quasi) synchronisme, la détection d'événements et de ruptures dans le signal par surveillance du processus d'innovation ;

Depuis l'introduction des méthodes d'estimation élaborées dans le domaine de la parole, Le modèle ARMA constitue le modèle de représentation par excellence. C'est un modèle externe simple qui ne prétend pas traduire le fonctionnement interne du

conduit vocal, bien que quelques arguments, parfois contestables, aient été avancés pour justifier cette interprétation.

Notre mémoire est organisé selon les chapitres suivants :

Le premier chapitre est dédié à un état de l'art de modélisation des signaux.

Le deuxième chapitre commence par la définition de l'estimation des méthodes paramétrique et des exemples d'utilisations.

Le troisième chapitre présent les résultats obtenus sur modèle ARMA. Une étude comparative entre les différents résultats.

Nous terminons ce mémoire par une conclusion générale et des perspectives envisagées concernant notre travail.

Chapitre 1 : Etat de l'art des méthodes Modélisation des signaux

Résumé

Dans ce chapitre nous expliquant les principales méthodes de Modélisation des signaux. On commence par la représentation de signal et ensuite un bref détail Modélisation des signaux le plus utilisées.

1 Introduction

Le signal est le support de l'information émise par une source et destinée à un récepteur c'est le véhicule de l'intelligence dans les systèmes. Il transporte les ordres dans les équipements de contrôle et de télécommande, il achemine sur les réseaux l'information, la parole ou l'image.

Il est particulièrement fragile et doit être manipulé avec beaucoup de soins. Le traitement qu'il subit a pour but d'extraire des informations, de modifier le message qu'il transporte ou de l'adapter aux moyens de transmission, c'est là qu'interviennent les techniques numériques. En effet, si l'on imagine de substituer au signal un ensemble de nombres qui représentent sa grandeur ou amplitude à des instants convenablement choisis le traitement, même dans sa forme la plus élaborée, se ramène à une séquence d'opérations logiques et arithmétiques sur cet ensemble de nombres, associées à des mises en mémoire.

La modélisation des systèmes est l'un des grands domaines du traitement du signal par ailleurs, la modélisation des signaux constitue une autre approche pour leur analyse, avec des propriétés qui diffèrent de celles de la transformée de Fourier et des filtres définis dans le domaine des fréquences. La prédiction linéaire, en particulier, est un outil simple et efficace pour caractériser certains types de signaux et procède à leur compression. Les traitements sont spécifiques dans le domaine temporel, en utilisant les paramètres statistiques et principalement la corrélation. [1]

Dans ce chapitre nous allons étudier l'état de l'art des méthodes de la modélisation des signaux. Le plan de travail de ce chapitre est comme suit : la première partie la représentation de signal. La deuxième partie principe général des méthodes de modélisation des signaux.

2 LA REPRÉSENTATION DE SIGNAL

2.1 Définition de signal

Un signal est la représentation physique de l'information, qu'il convoie de sa source à son destinataire. La description mathématique des signaux est l'objectif de la théorie du signal. Elle offre les moyens d'analyser, de concevoir et de caractériser des systèmes de traitement de l'information.

2.2 Bruit

Un bruit est un phénomène perturbateur gênant la transmission ou l'interprétation d'un signal, [2].

2.3 Rapport signal sur bruit

Le rapport signal sur bruit mesure la quantité de bruit contenue dans le signal. Il s'exprime par le rapport des puissances du signal (P_S) et du bruit (P_N). Il est souvent donné en décibels (dB), [3].

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 10 \log \frac{p_S}{p_N}$$

2.4 Traitement de signal

C'est la discipline technique qui, s'appuyant sur les ressources de l'électronique, de l'informatique et de la physique appliquée, a pour objet l'élaboration ou l'interprétation des signaux porteurs de l'information

Son application se situe dans tous les domaines concernés par la transmission ou l'exploitation des informations transporter par ces signaux, [2].

3 CLASSIFICATION DES SIGNAUX

Ce chapitre considère différentes propriétés des signaux. Ces propriétés seront très importantes pour la classification de signaux et, en conséquence, leur modélisation, les opérations possibles, la définition de mesures adaptées, etc.

3.1 Signaux physiques et modèles

3.1.1 Signaux réalisables

Un signal est le résultat d'un système physique réel, qui est donc réalisable, ce qui induit plusieurs propriétés :

- l'énergie du signal est bornée,
- l'amplitude du signal est bornée,
- l'amplitude du signal est une fonction continue, en raison de l'inertie du système,
- le spectre du signal est borné et tend vers 0 lorsque la fréquence tend vers l'infini

3.1.2 Modèles

Les modèles de signaux sont des représentations mathématiques (fonctions réelles ou complexes, fonctionnelles, etc.) qui reposent fréquemment sur des hypothèses simplificatrices (parfois fausses !) mais permettant d'effectuer des calculs théoriques.

Par exemple :

– un échantillon d'énergie finie mais infiniment bref n'est pas réalisable ; il est cependant pratique d'utiliser une impulsion de Dirac pour représenter une impulsion de durée très brève,

– un signal sinusoïdal $x(t) = \sin \omega t$ n'est pas réalisable, car un signal produit par un système physique réel ne peut pas exister de $-\infty$ à $+\infty$; c'est cependant un modèle mathématique très usuel.

Le modèle est donc une approximation de la réalité, dans lequel on considère les propriétés importantes dans le contexte de l'étude. L'intérêt du modèle dépend donc de la qualité de l'approximation et de sa facilité d'emploi, dans un contexte donné, [4].

3.2 SIGNAUX DÉTERMINISTES OU ALÉATOIRES

3.2.1 Définitions

La première classification est obtenue en considérant la nature profonde de l'évolution du signal en fonction du temps. Elle fait apparaître deux types fondamentaux de signaux :

- les signaux déterministes (ou certains, ou encore non aléatoires) dont l'évolution en fonction du temps peut être parfaitement prédite par un modèle mathématique approprié ; [5].

A l'intérieur de chacune de ces deux grandes classes, on peut définir d'autres propriétés.

Pour les signaux déterministes, on considère :

- les signaux périodiques ou non périodiques,
- les signaux périodiques peuvent être sinusoïdaux, composites ou pseudo-aléatoires,
- les signaux non-périodiques peuvent être quasi-périodiques ou transitoires, [4].

- les signaux aléatoires, dont le comportement temporel est imprévisible et pour la description desquels il faut se contenter d'observations statistiques, [5].

En ce qui concerne les signaux aléatoire, on peut définir :

- les signaux stationnaires ou non stationnaires,
- les signaux stationnaires peuvent être ergodiques ou non ergodiques,
- les signaux non stationnaires peuvent être cyclo-stationnaires ou quelconques.

L'objet de ce chapitre est de définir de façon précise ces principales propriétés, [4].

3.2.2 Sous-classes de signaux, déterministes.

a) Définitions

Parmi les signaux déterministes, on distingue :

- les signaux périodiques, satisfaisant à la relation

$$x(t) = x(t + kT) \quad k \text{ entier} \quad (1.1)$$

Qui obéissent à une loi de répétition cyclique régulière, de période T ;

- les signaux non périodiques, qui ne jouissent pas de cette propriété.

Les signaux sinusoïdaux (fig. 1.1), d'équation générale

$$\begin{aligned} X(t) &= A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \alpha\right) \\ &= A \sin [2\pi/T (T + \tau)] \end{aligned} \quad (1.2)$$

Forment le groupe le plus familier de signaux périodiques.

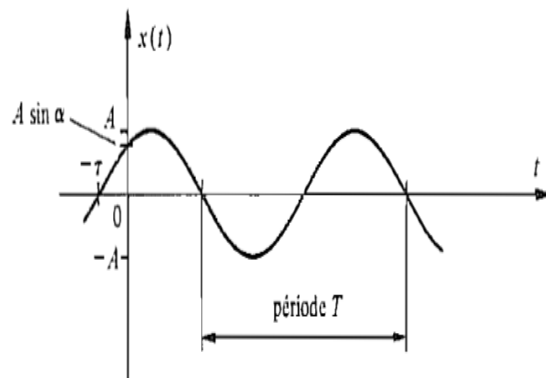


Fig1.1 Les signaux sinusoïdaux

Les signaux pseudo-aléatoires (**fig. 1.2**) forment une catégorie particulière de signaux périodiques dont le comportement rappelle celui d'un signal aléatoire.

Parmi les signaux non périodiques, il faut distinguer les signaux quasi-périodiques (**fig. 1.3**), qui résultent d'une somme de sinusoïdes de périodes démesurées, des signaux transitoires dont l'existence est éphémère (**fig. 1.4**).

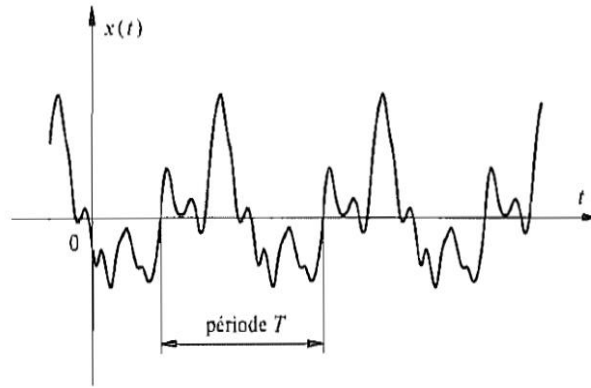


Fig. 1.2 Signal pseudo-aléatoire.

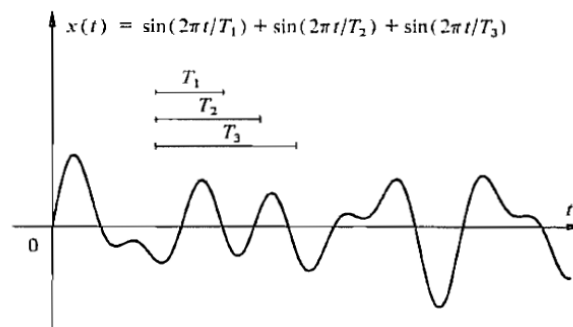


Fig. 1.3 Signal quasi-périodique.

3.2.3 Notation complexe des signaux sinusoïdaux et concept de fréquence négative :

Il est souvent avantageux de représenter une fonction sinusoïdale par la partie imaginaire - ou réelle pour une notation en cosinus - d'une exponentielle complexe :

$$A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right) = \text{Im} \left\{ A \exp \left[j\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right) \right] \right\} \quad (1.3)$$

Une autre représentation est possible en considérant le signal sinusoïdal (ou Cosinusoidal) comme la résultante de deux phasors conjugués d'amplitude $A/2$ tournant dans des directions opposées avec une pulsation (vitesse angulaire) de $\pm \omega = \pm 2\pi/T$ (fig. 1.5). C'est une application directe de la formule d'Euler :

$$A \sin(\omega t) = \frac{A}{2} \exp(j\omega t) - \frac{A}{2} \exp(-j\omega t) \quad (1.4)$$

Pour tenir compte du sens de rotation, on parle de fréquence positive ($\omega = +2\pi f$) et négative ($\omega = -2\pi f$). Ce concept de fréquence négative n'a pas de signification physique. Il est utilisé pour la représentation de fonctions de la fréquence (spectre, fonction de réponse fréquentielle) où $-\infty < f < \infty$.

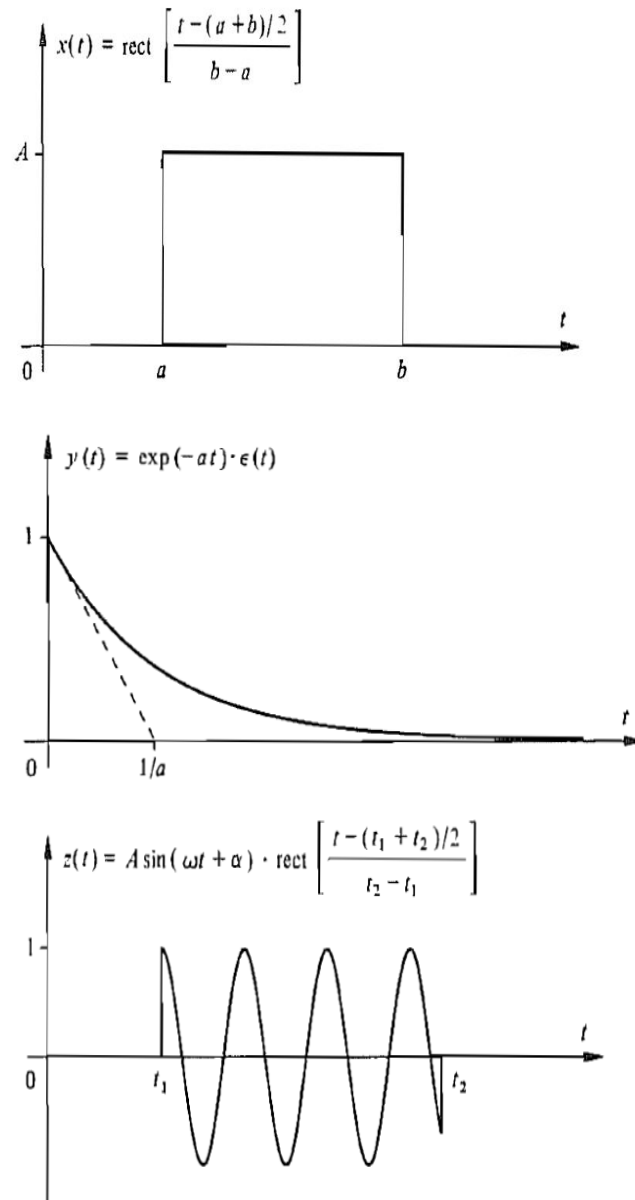


Fig. 1.4 Signaux transitoires : $x(t)$ = impulsion rectangulaire ; $y(t)$ = impulsion exponentielle Décroissante ; $z(t)$ = impulsion sinusoïdal.

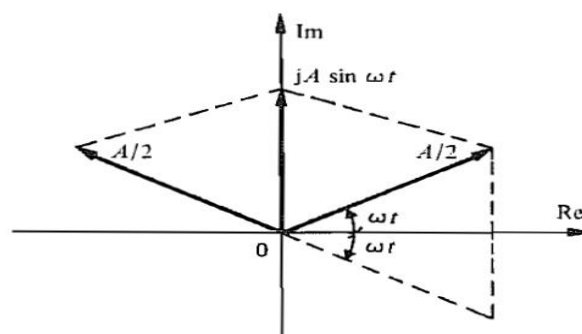


Fig1.5 conjugués d'amplitude $A/2$ tournant dans des directions opposées avec une pulsation (vitesse angulaire)

3.2.4 Sous-classes de signaux aléatoires.

a) Définitions

Les signaux aléatoires peuvent, quant à eux, être classés en deux grandes catégories :

- les signaux aléatoires stationnaires, dont les caractéristiques statistiques sont Invariantes dans le temps (**fig. 1.6**) ;
- Les signaux aléatoires non stationnaires, qui ne jouissent pas de cette propriété (**fig. 1.7**).

Si les valeurs moyennes statistiques, ou moments, d'un signal stationnaire s'identifient aux valeurs moyennes temporelles, on dit qu'il est ergodique.

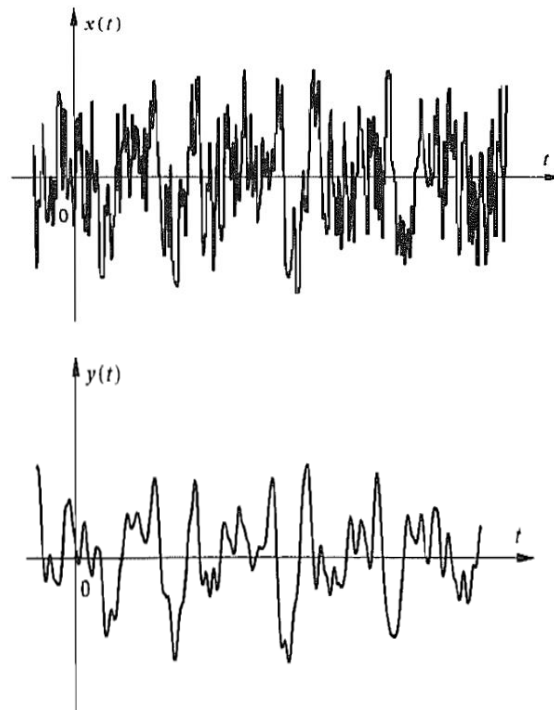


Fig. 1. 6 Signal aléatoire stationnaire : $x(t)$ = signal à large bande (bruit blanc) ; $y(t)$ = signal filtré passe-bas.

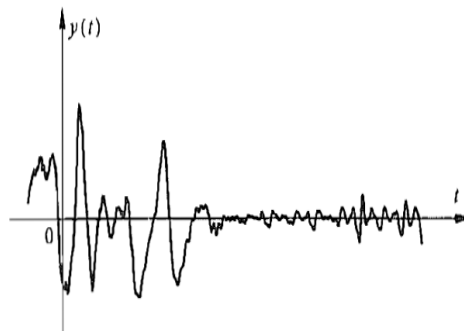


Fig. 1.7 Signal aléatoire non stationnaire.

3.3 Spectres des signaux

3.3.1 SIGNAUX À ÉNERGIE OU PUISSANCE MOYENNE FINIE

a) Classification énergétique

Une distinction fondamentale peut être faite entre deux grandes catégories de signaux :

- les signaux à énergie finie ;
- les signaux à puissance moyenne finie non nulle.

La première catégorie comprend tous les signaux de type transitoire, qu'ils soient déterministes ou aléatoires. La deuxième catégorie englobe presque tous les signaux périodiques, quasi-périodiques et les signaux aléatoires permanents.

Certains signaux théoriques n'appartiennent à aucune de ces deux catégories : c'est le cas par exemple de $x(t) = \exp(at)$ pour $-\infty < t < \infty$

L'abstraction mathématique commode qu'est l'impulsion de Dirac $\delta(t)$ n'est pas classable non plus dans ce contexte, pas plus que la suite périodique d'impulsions de Dirac $\delta_T(t)$

3.3.2 Energie et puissance moyenne d'un signal.

a) Définitions

En électrotechnique la puissance instantanée fournie à un bipôle est définie comme le produit des valeurs instantanées de la tension $u(t)$ à ses bornes et du courant $i(t)$ qui le traverse :

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) \qquad W = V \cdot A \qquad (1.5)$$

Dans le cas d'une résistance linéaire R , respectivement d'une conductance linéaire G , on a :

$$P(t) = Ri^2(t) = \frac{1}{R} u^2(t) = Gu^2(t) \qquad W \qquad (1.6)$$

L'énergie dissipée sur un intervalle $[t_1, t_2]$, avec $t_2 > t_1$, est l'intégrale de cette Puissance instantanée. Elle se mesure en joule

$$W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = R \int_{t_1}^{t_2} i^2(t) dt = G \int_{t_1}^{t_2} u^2(t) dt \qquad J \qquad (1.7)$$

En divisant cette énergie par la durée de l'intervalle, on obtient une puissance moyenne, mesurée en watts :

$$P(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \frac{R}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i^2 d(t) = \frac{G}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u^2 d(t) \quad (1.8)$$

Par analogie, on appelle respectivement énergie (normalisée) et puissance moyenne (normalisée) d'un signal réel $x(t)$, calculées sur un intervalle $[t_1, t_2]$:

$$W_x(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt \quad (1.9)$$

$$P_x(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt \quad (1.10)$$

La racine carrée de (1.10) est la valeur efficace ($x_{eff}(T) = \sqrt{p_x(T)}$). C'est la même définition que celle introduite pour les grandeurs périodiques, mais étendue à des signaux de forme quelconque.

La puissance moyenne normalisée possède donc une dimension égale au carré de celle de $x(t)$. En multipliant encore par l'unité de temps, on obtient la dimension de l'énergie normalisée. Si $x(t)$ est une tension ou un courant électrique, (1.9) et (1.10) correspondent à l'énergie et la puissance dissipées par une résistance de 1 Ohm.

L'énergie totale et la puissance moyenne totale d'un signal sont obtenues en considérant un intervalle s'étendant à tout l'axe réel. Les relations (1.9) et (1.10) sont alors modifiées comme suit :

$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \quad (1.11)$$

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \quad (1.12)$$

La puissance moyenne totale est définie comme une valeur principale de Cauchy. Pour les signaux périodiques, la puissance moyenne totale (1.12) est égale à la puissance moyenne sur une période.

Si le signal est représenté par une fonction complexe de la variable réelle t , on remplace dans (1.11) et (1.12) $x^2(t)$ par $|x(t)|^2$, [5].

3.3.3 Signaux à énergie finie

Les signaux à énergie finie sont ceux pour lesquels l'intégrale (1.11) est bornée.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (1.13)$$

Ces signaux sont dits de carré intégrable (sommable),

Leur puissance moyenne est nulle

3.3.4 Signaux à puissance moyenne finie (non nulle)

Les signaux périodiques, quasi périodiques, et signaux aléatoires permanents. Ces signaux satisfont à la condition suivante : [6].

$$0 < \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt < \infty \tag{1.14}$$

3.4 VARIABLES CONTINUES ET DISCRÈTES

3.4.1 Classification morphologique.

a) Définitions

Un signal peut se présenter sous différentes formes selon que son amplitude est une variable continue ou discrète et que la variable libre t (considérée ici comme le temps) est elle-même continue ou discrète (**fig. 1.8**). On distingue donc ainsi quatre types de signaux :

- le signal à amplitude et temps continus appelé couramment signal analogique ;
- le signal à amplitude discrète et temps continu appelé signal quantifié ;
- le signal à amplitude continue et temps discret appelé signal échantillonné ;
- le signal à amplitude et temps discrets appelé signal numérique (ou improprement digital), car il est représentable par une suite de nombres ou série temporelle.

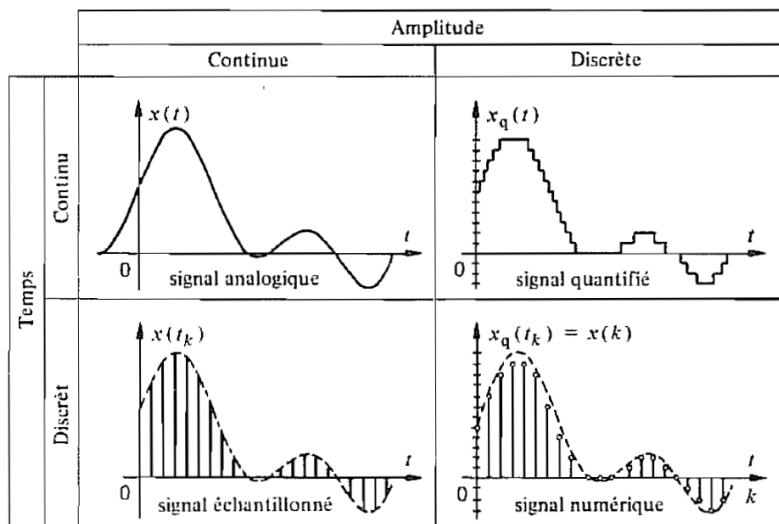


Fig. 1.8 Distingue quatre types de signaux

3.4.2 Modèles de signaux analogiques, échantillonnés et numériques

Le modèle analogique d'un signal est une fonction du temps t , où la variable test continue. Il est noté $x(t)$, $y(t)$, etc.

Le modèle échantillonné d'un signal est une suite de valeurs assignées à des discrets $t_k = k \cdot \Delta t$, où k est une variable discrète (nombre entier) et Δt représente le pas d'échantillonnage. Il est noté $x(t_k)$, $y(t_k)$, etc.

Le modèle numérique d'un signal correspond au modèle échantillonné dont valeur est représentée par un nombre quantifié. Sous sa forme standardisée, il est simplement noté $x(k)$, $y(k)$, etc.), après normalisation du pas Δt , respectivement de la fréquence d'échantillonnage $f_e(\Delta t = f_e^{-1} = 1)$ Pour un signal de durée finie, l'indice k est un nombre entier généralement compté entre 0 et $N - 1$, où N est le nombre total d'échantillons.

3.4.3 Correspondances et différences

Comme indiqué au paragraphe 3.3.2, à tout signal analogique transitoire $x(t)$ est associé une certaine énergie normalisée $w_{xa} = \int x^2(t) dt$, mesurée par exemple en $v^2 \cdot s$. Pour un signal échantillonné, une correspondance peut être établie à l'aide de la relation discrète $w_{xe} = \sum x^2(t_k) \cdot \Delta t$. Afin de minimiser l'erreur entre les calculs des énergies forme intégrale et discrète, chaque échantillon $x(t_k)$ doit être considéré comme situé milieu de l'intervalle Δt correspondant. En posant $\Delta t = 1$, l'énergie d'un signal numérique standardisé est représentée par $w_{xn} = \sum x^2(k)$.

Au saut unité analogique $\epsilon(t)$ correspond la séquence unité numérique $\epsilon(k)$, constituée d'une suite d'échantillonné qui sont nuls pour $k < 0$ et de valeur unité pour le $k \gg 0$. A l'impulsion de Dirac $\delta(t)$ correspond l'impulsion unité numérique $\delta(k)$ qui vaut 1 pour $k = 0$ et est nulle pour $k \neq 0$. Cette impulsion unité peut aussi être définie par la différence $\delta(k) = \epsilon(k) - \epsilon(k - 1)$. Le signal numérique $\text{rect} [(k - L)/K] = \epsilon(k) - \epsilon(k - K)$ où $L = K/2$ si K est pair et $L = (K - 1)/2$ si K est impair, est constitué d'une suite de K échantillons de valeur unité compris entre les positions le $k=0$ et $k = K - 1$. Les autres échantillons sont nuls.

A l'exponentielle complexe analogique $\exp(j2\pi nt/T)$, de fréquence discrète n/T , correspond l'exponentielle complexe numérique $\exp(j2\pi nk/N)$, de fréquence discrète n/N . N est ici le nombre d'échantillons constituant une période fondamentale ($n = 1$). Le nombre entier n est l'indice harmonique. Le modèle analogique permet de

considérer une infinité d'harmoniques, de fréquences discrètes $f_n = n/t$ réparties sur tout l'axe des fréquences, de $-\infty$ à $+\infty$, pour $-\infty < n < +\infty$. Au contraire, le nombre d'harmoniques distinctes représentables par le modèle numérique est limité à $N - 1$, car $\exp(j2\pi k/N) = \exp(j2\pi[N + 1]K/N)$: l'exponentielle complexe numérique est modulo N . L'intervalle principal des fréquences $f_n = n/N$ va donc de 0 à 1, avec une répétition périodique de période unité. On observe, de plus, une antisymétrie par rapport à la fréquence $1/2$ puisque $\exp(j2\pi \left[\frac{N}{2} + 1\right] k/N) = -\exp(j2\pi k/N)$. En traitement numérique des signaux (réels), il est suffisant de considérer l'intervalle de fréquence $[0, 1/2]$, [5].

4 Modélisation des signaux

4.1 Autocorrélation et intercorrélation

Pour mesurer le degré de similitude de deux signaux on définit un coefficient de corrélation. Il est naturel de faire correspondre la valeur 1 de ce coefficient à deux signaux identiques, la valeur zéro à deux signaux sans aucune relation et la valeur -1 à des signaux opposés. Quand on compare des signaux décalés dans le temps, le coefficient de corrélation devient une fonction de temps, et l'on obtient la fonction d'intercorrélation si les signaux sont différents et la fonction d'autocorrélation s'ils sont identiques.

La fonction d'autocorrélation du signal aléatoire discret $x(n)$ est la suite $r_{xx}(p)$ telle que :

$$r_{xx}(p) = E[x(i), x(i - p)] \quad (1.15)$$

Où $E[x]$ désigne l'espérance de x .

Avec l'hypothèse d'ergodicité, il vient :

$$r_{xx}(p) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N x(i) \cdot x(i - p) \quad (1.16)$$

La fonction $r_{xx}(p)$ est paire ; elle a comme valeur à l'origine la puissance du signal et quel que soit n

$$|r_{xx}(p)| \ll r_{xx}(0) \quad (1.17)$$

Soit un ensemble de N coefficients h_i ($1 \ll i \ll N$). Le calcul de la variance de la variable $y(n)$ telle que :

$$y(n) = \sum_{i=1}^N h_i x(n - i)$$

Conduit à :

$$E[y^2(n)] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N h_i h_j E[x(n-i) \cdot x(n-j)]$$

Soit :

$$E[y^2(n)] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N h_i h_j r_{xx}(i-j) \quad (1.18)$$

Comme cette variance est positive ou nulle, il en résulte l'inégalité suivante :

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N h_i h_j r_{xx}(i-j) \gg 0 \quad (1.19)$$

Cette propriété caractérise les fonctions de type positif.

Si dans la définition (1.15) on remplace $x(i-n)$ par un autre signal, on obtient une fonction qui permet de comparer deux signaux différents décalés, La fonction d'intercorrélation entre deux signaux discrets $x(n)$ et $y(n)$ est la suite $r_{xy}(p)$ telle que :

$$r_{xy}(p) = E[x(i)y(i-p)] \quad (1.20)$$

Avec l'hypothèse d'ergodicité :

$$r_{xy}(p) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N x(i)y(i-p) \quad (1.21)$$

On a également :

$$r_{xy}(-p) = E[x(i)y(i+p)] = r_{xy}(p) \quad (1.22)$$

Par exemple dans le cas où ces signaux constituent l'entrée et la sortie d'un filtre de coefficients h_m :

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m x(n-m)$$

Il vient :

$$r_{yx}(p) = E[y(i) \cdot x(i-p)] = \sum_{m=0}^{\infty} r_{xx}(p-m)$$

Soit.

$$r_{yx}(p) = r_{xx}(p) * h_m \quad (1.23)$$

De même :

$$r_{xy}(p) = r_{xx}(p) * h_{-m} \quad (1.24)$$

Et également ;

$$r_{yy}(p) = r_{xx}(p) * h_m * h_{-m} \quad (1.25)$$

Si deux signaux aléatoires centres sont indépendants, leurs fonctions d'intercorrélacion sont nulles. De plus, on a toujours l'inégalité :

$$|r_{xy}(p)| \ll \frac{1}{2} [r_{xx}(0) + r_{yy}(0)] \quad (1.26)$$

Il est intéressant de signaler que le calcul des fonctions d'autocorrélacion et d'intercorrélacion peut, dans certains cas, se faire sans multiplication, en remplaçant les signaux par leur signe. En particulier, si $x(n)$ est un signal gaussien, on montre que [7] :

$$r_{xx}(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{r_{xx}(0)} \cdot E[x(i) \cdot \text{signe}[x(i-p)]] \quad (1.27)$$

$$r_{xx}(p) = r_{xx}(0) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot E[\text{signe}[x(i) \cdot x(i-p)]]\right) \quad (1.28)$$

Ainsi toute l'information contenue dans un signal gaussien est fournie par ses passages par Zéro. Ces relations, qui peuvent s'étendre à d'autres types de signaux, permettent de simplifier les calculs et, par suite, les matériels.

La transformée de Fourier $\Phi_{xy}(f)$ de la fonction d'intercorrélacion $r_{xy}(p)$ prend le nom d'inter spectre :

$$\Phi_{xy}(f) = X(f) \cdot \overline{Y(f)}$$

Où $X(f)$ désigne le spectre de la suite $x(n)$ et $\overline{Y(f)}$ le spectre conjugué de la suite $y(n)$.

Si la suite $y(n)$ est la sortie d'un filtre de fonction de transfert $H(f)$, il vient :

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{Y(f) \overline{X(f)}}{X(f) \overline{X(f)}}$$

D'où la relation :

$$\Phi_{yx}(f) = \Phi_{xx}(f) \cdot H(f) \quad (1.29)$$

Qui correspond à (1.23). De même à la relation (1.24) correspond :

$$\Phi_{xy}(f) = \Phi_{xx}(f) \cdot \overline{H(f)}$$

et finalement :

$$\Phi_{yy}(f) = \Phi_{xx}(f) \cdot |H(f)|^2 \quad (1.30)$$

Ces résultats s'appliquent à l'analyse spectrale des signaux aléatoires en général et sont utiles pour l'étude des systèmes adaptatifs.

4.2 ANALYSE SPECTRALE PAR CORRELOGRAMME

La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation est la densité spectrale de puissance du signal :

$$S(f) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} r(p)e^{-2j\pi pf} \quad (1.31)$$

En désignant par $r(p)$ la fonction d'autocorrélation (AC) du signal, En pratique, l'analyse du signal se fait à partir d'un nombre limité, N_0 d'échantillons. Il faut donc commencer par estimer les valeurs de $r(p)$.

Une première estimation de la fonction AC est fournie par l'expression :

$$r_1(p) = \frac{1}{N_0} \sum_{n=p+1}^{N_0} x(n)x(n-p) \quad (1.32)$$

Elle est biaisée car :

$$E[r_1(p)] = \frac{N_0 - p}{N_0} r(p)$$

En fait, pour avoir une estimation non biaisée il faut prendre :

$$r_2(p) = \frac{1}{N_0 - p} \sum_{n=p+1}^{N_0} x(n)x(n-p) \quad (1.33)$$

A partir de P valeurs de la fonction AC, l'estimation spectrale dite corrélogramme est donnée par :

$$S_{CR}(f) = \sum_{p=-(P-1)}^{P-1} r_2(p)e^{-j2\pi pf} \quad (1.34)$$

Ou encore, en fonction du spectre théorique :

$$S_{CR}(f) = S(f) * \frac{\sin \pi f (2P - 1)}{\sin \pi f} \quad (1.35)$$

La variance est approximativement donnée par :

$$\text{var}\{S_{CR}(f)\} \approx \frac{(2P - 1)}{N_0} S_2(f) \quad (1.36)$$

Il apparaît alors qu'il faut prendre le minimum de valeurs de la fonction AC pour effectuer l'estimation, c'est à dire qu'il faut se limiter aux valeurs significatives de la fonction AC résultant de l'estimation [8].

L'approche la plus directe pour obtenir le spectre de puissance d'un signal à partir de N_0 échantillons Consiste à calculer la transformée de Fourier discrète et à prendre les valeurs $X(k)^2$. Le développement de ce terme montre que c'est l'estimation biaisée (1.32) de la fonction AC qui intervient dans cette procédure.

4.3 MATRICE d'AUTOCORRELATION

La matrice d'autocorrélation (AC) de dimension N d'un signal est la matrice carrée suivante :

$$R_N = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & r(2) & \dots & r(N-1) \\ r(1) & r(0) & r(1) & \dots & r(N-2) \\ r(2) & r(1) & r(0) & \dots & r(N-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(N-1) & r(N-2) & r(N-3) & \dots & r(0) \end{bmatrix}$$

La fonction d'autocorrélation étant de type positif (1.19), la matrice d'autocorrélation est définie positive et symétrique. En fait, elle possède un double symétrie, puisqu'elle est aussi symétrique par rapport à la seconde diagonale. Il en résulte un ensemble de propriétés fondamentales [7].

On considère d'abord les valeurs propres $\lambda_i (0 \ll i \ll N - 1)$ de la matrice d'autocorrélation d'ordre N . L'équation caractéristique :

$$\det(\lambda I_N - R_N) = 0$$

Conduit aux relations :

$$\det(R_N) = \prod_{i=0}^{N-1} \lambda_i \quad (1.38)$$

$$N \cdot r(0) = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i = N\sigma_x^2 \quad (1.39)$$

C'est-à-dire que si le déterminant de la matrice est non nul, aucune valeur propre n'est nulle et leur somme est égale à N fois la puissance du signal.

Le caractère défini positif de la matrice R_N entraîne de plus qu'elles sont toutes positives :

$$\lambda_i > 0; 0 \ll i \ll N - 1 \quad (1.40)$$

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les déterminants suivants soient tous positifs :

$$r(0); \det \begin{bmatrix} r(0) & r(1) \\ r(1) & r(0) \end{bmatrix}; \dots; \det \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(N-1) \\ r(1) & r(0) & \dots & r(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(N-1) & \dots & \dots & r(0) \end{bmatrix}$$

Les matrices, correspondantes sont les matrices d'autocorrélation d'ordre inférieur ou égal à N .

Dans ces conditions, la matrice R_r est diagonalisable et il vient :

$$R_N = M^{-1} \cdot \text{diag}(\lambda_i) \cdot M \quad (1.41)$$

Où M est une matrice carrée de dimension N , telle que $M^i = M^{-1}$ et $\text{diag}(\lambda_i)$ la matrice diagonale des valeurs propres, M^i peut être égale à M dans certains cas. La matrice s'exprime en fonction des vecteurs propres normalisés $U_i (0 \ll i \ll N - 1)$ par :

$$R_N = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i U_i U_i' \quad (1.41\text{bis})$$

L'analyse des systèmes fait apparaître les puissances successives des matrices R_N et R_N^{-1} . En utilisant, d'une part, le théorème de Cayley-Hamilton selon lequel une matrice vérifie son équation caractéristique, on montre que la puissance d'une matrice s'exprime en fonction des puissances de ses valeurs propres :

$$(R_N)^p = \sum_{i=0}^N \lambda_i^p \prod_{j=0, j \neq i}^{N-1} \frac{R_N - \lambda_j I_N}{\lambda_i - \lambda_j} \quad (1.42)$$

Pour les grandes valeurs de l'entier p , avec :

$$\lambda_{max} = \max_{0 \ll i \ll N-1} (\lambda_i)$$

On peut écrire, si ce maximum correspond à la valeur zéro de l'indice :

$$(R_N)^p \simeq \lambda_{max}^p \sum_{j=1}^{N-1} \frac{R_N - \lambda_j I_N}{\lambda_{max} - \lambda_j} \quad (1.43)$$

Par suite pour les grandes valeurs de p , on peut faire l'approximation :

$$(R_N)^p \simeq \lambda_{max}^p \cdot K_N \quad (1.44)$$

Où K_N est la matrice carrée d'ordre N de la relation (1.42) ; comme la matrice R_N est diagonalisable et satisfait (1.40), K_N s'exprime aussi plus simplement comme le produit de M^{-1} par une matrice déduite de M en annulant toutes les lignes sauf celle qui correspond à l'indice de la plus grande valeur propre.

De même d'après (1.40) on peut écrire dans les mêmes conditions :

$$(R_N^{-1})^p \simeq \lambda_{max}^{-p} \cdot K'_N \quad (1.45)$$

Avec :

$$\lambda_{min} = \min_{0 \ll i \ll N-1} (\lambda_i)$$

En fait, il apparaît dans la suite que ces deux valeurs propres extrêmes, λ_{min} et λ_{max} conditionnent le comportement des systèmes adaptatifs.

L'interprétation physique des valeurs propres de la matrice d'autocorrélation n'apparaît pas aisément à partir de leur définition. Pour éclairer ce point il est intéressant de les rapprocher du spectre du signal $x(n)$.

Le cas où le signal $x(n)$ est périodique et de période N est considéré d'abord. Alors, la suite $r(p)$ elle aussi est périodique, et, de plus, elle est symétrique avec :

$$r(N - i) = r(i); \quad 0 \ll i \ll N - 1$$

Dans ces conditions la matrice R_N est une matrice circulante, dans laquelle chaque ligne se déduit de la précédente par décalage. Si la suite $\Phi_{xx}(n)$ ($0 \ll n \ll N - 1$) désigne la transformée de Fourier de la suite $r(p)$, la relation suivante est facile à vérifier directement, T_N étant la matrice de la transformée de Fourier d'ordre N :

$$R_N \cdot T_N = T_N \cdot \text{diag}(\Phi_{xx}(n))$$

D'où

$$R_N = T_N \cdot \text{diag}(\Phi_{xx}(n)) \cdot T_N^{-1} \quad (1.46)$$

D'après (1.40), les valeurs propres de la matrice R_N sont dans ce cas les valeurs de la transformée de Fourier discrète de la fonction d'autocorrélation, c'est-à-dire les valeurs de la densité spectrale de puissance du signal. M est la matrice de la transformée en cosinus.

Cette relation est également valable pour un bruit blanc discret puisque le spectre est constant et que, comme la matrice d'autocorrélation est à un facteur près une matrice unité, les valeurs propres sont égales.

Les signaux réels ont généralement une densité spectrale de puissance non constante et leur fonction d'autocorrélation $r(p)$ décroît quand l'indice p croît. Alors, pour N suffisamment grand, les éléments significatifs de la matrice de dimension N se trouvent regroupés au voisinage de la diagonale principale. Dans ces conditions, soit R'_N la matrice d'autocorrélation du signal $x(n)$ supposé périodique et de période N ; ses valeurs propres forment un échantillonnage de la densité spectrale de puissance. La différence entre R_N et R'_N tient au fait que R'_N est une matrice circulante et elle apparaît principalement dans le coin supérieur droit et le coin inférieur gauche ; ainsi on peut observer que R_N se rapproche davantage d'une matrice diagonale que R'_N ; par suite ses valeurs propres sont moins dispersées. En fait, sous certaines conditions généralement réalisées en pratique, on montre que :

$$\min_{0 \ll n \ll N-1} (\Phi_{xx}(n)) \ll \lambda_{min} \ll \lambda_{max} \ll \max_{0 \ll n \ll N-1} (\Phi_{xx}(n)) \quad (1.47)$$

et pour N suffisamment grand :

$$\lambda_{min} \simeq \min_{0 \ll f \ll 1} \Phi_{xx}(f); \quad \lambda_{max} \simeq \max_{0 \ll f \ll 1} (\Phi_{xx}(f)) \quad (1.48)$$

Finalement, on peut considérer en pratique que les valeurs propres extrêmes de la matrice d'autocorrélation approchent les valeurs extrêmes de la densité spectrale de puissance du signal, quand la dimension de cette matrice est suffisamment grande.

4.4 Modélisation

Les filtres numériques s'appliquent à la modélisation des systèmes, selon le schéma de la **figure 1.9**. Le signal $x(n)$ est appliqué au système et au modèle et les coefficients sont calculés pour minimiser l'écart entre les sortie du système et du modèle.

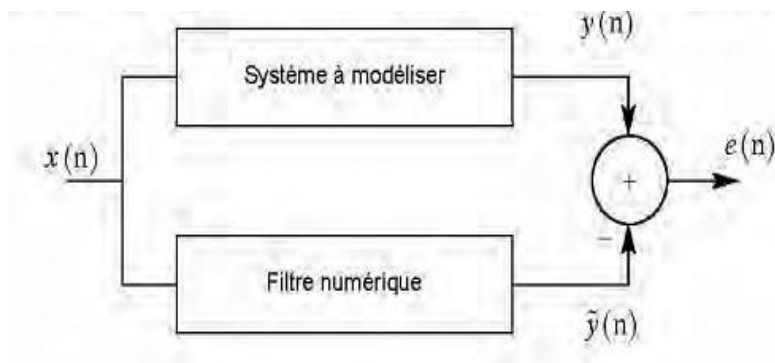


Fig. 1.9 Modélisation d'un système

Le type de filtre à utiliser comme modèle dépend de la connaissance a priori du système à modéliser. Cependant, les filtres de type RIF s'imposent en général, pour leur facilité de calcul et de mise en œuvre. La sortie s'écrit alors :

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h_i x(n-i) = H^E X(n) \quad (1.49)$$

Où $X(n)$ est le vecteur des N données les plus récentes, le nombre de coefficients N étant choisi en fonction de la connaissance du modelé. L'erreur de sortie est définie par

$$e(n) = y(n) - \tilde{y}(n) \quad (1.50)$$

Le critère retenu pour le calcul des coefficients est généralement la minimisation de l'erreur quadratique moyenne (EQM) :

$$J = E[e^2(n)] \quad (1.51)$$

L'annulation des dérivées de la fonction cout J conduit la relation $E[e(n)X(n)] = 0$, qui exprime la décorrélation entre la sortie et le vecteur des données d'entrée les plus récentes. Il vient alors :

$$E[y(n)X(n)] - E[X(n)X^t(n)]H = 0 \quad (1.52)$$

La définition (1.15) de la fonction d'autocorrélation montre que $E[X(n)X^t(n)] = R_N$ et les coefficients sont donnés par :

$$H = R_N^{-1} r_{yx} \quad (1.53)$$

C'est-à-dire que les coefficients du filtre modèle sont obtenus en multipliant l'inverse de la matrice AC par le vecteur d'intercorrélacion entre la sortie du système et son entrée, défini par :

$$r_{yx} = E \left[y(n) \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ x(n+1) - N \end{bmatrix} \right] \quad (1.54)$$

L'erreur quadratique moyenne minimale, E_{min} , est obtenue en combinant (1.50) et (1.52), ce qui fournit les 3 expressions :

$$\begin{aligned} E_{min} &= E[y^2(n)] - H^t R_N H \\ E_{min} &= E[y^2(n)] - H^t r_{yx} \\ E_{min} &= E[y^2(n)] - r_{yx}^t R_N^{-1} r_{yx} \end{aligned} \quad (1.55)$$

L'égalisation est un cas particulier dans lequel le système à modéliser est l'inverse de celui qui a produit le signal d'entrée $x(n)$. Ainsi, en transmission et en l'absence de bruit, l'égaliseur a pour fonction de transfert l'inverse de celle du canal.

4.4.1 Prédiction linéaire

La prédiction linéaire qui est développée dans ce modélisation, la modèle AR elle est basée sur l'hypothèse que chaque échantillon du signal original $x(n)$ peut-être approché par une combinaison linéaire des p échantillons qui précèdent :

$$x(n) = -a(1) \cdot x(n-1) - a \cdot x(n-2) - \dots - a(p) \cdot x + e(n) \quad (1.56)$$

Dans cette expression, les coefficients $a(i)$ sont appelés coefficients de prédiction d'ordre p et le signal $e(n)$:

$$e(n) = \sum_{i=0}^p a(i) \cdot x(n-i); \quad a(0) = 1 \quad (1.57)$$

Est l'erreur de prédiction (ou résidu) d'ordre p .

Les coefficients de prédiction doivent être estimés selon un certain critère. Il est clair que la prédiction (1.55) n'est possible que si $x(n)$ est autocorrélé : on ne peut pas prédire un bruit blanc. Il faut donc s'attendre à ce que la matrice d'autocorrélation du signal joue un rôle important dans cette estimation.

4.4.2 Variance de l'erreur de prédiction

Nous supposons dans cette section que le signal $x(n)$ est aléatoire et stationnaire ; les coefficients $a(i)$ sont donc indépendants du temps et ils peuvent être estimés une fois pour toutes en prenant tout le temps qui convient.

L'estimation des coefficients de prédiction est basée sur la minimisation de la variance de l'erreur de prédiction

$$\begin{aligned}
 \sigma_e^2 &= E|e(n)|^2 = E \left[\sum_{i=0}^p a(i) \cdot x(n-i) \cdot \sum_{j=0}^p a(j) \cdot x(n-j) \right] \\
 &= E \left[\sum_{i,j=0}^p a(i) \cdot a(j) \cdot x(n-i) \cdot x(n-j) \right] \quad (1.58) \\
 &= E \left[\sum_{i,j=0}^p a(i) \cdot a(j) \cdot x(n-i) \cdot x(n-j) \right] \\
 &= \sum_{i,j=0}^p a(i) \cdot a(j) \cdot \phi_x(i-j)
 \end{aligned}$$

Dans cette dernière expression, $\phi_x(k)$ représente la fonction d'autocorrélation du signal x :

$$\begin{aligned}
 \phi_x(k) &= E[x(n) \cdot x(n+k)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N+K}^{N-K} x(n) \cdot x(n+k); \\
 \phi_x(0) &= \sigma_x^2 \quad (1.59)
 \end{aligned}$$

La moyenne de est supposée nulle : une composante continue ne porte en général aucune information utile et l'on peut nécessaire l'extraire à l'aide d'un filtre très simple.

Le vecteur des coefficients de prédiction d'ordre p sera noté :

$$\underline{a} = [1, a(1), a(2), \dots, a(p)]^T = [1, \underline{a}^T]^T \quad (1.60)$$

Et la matrice d'autocorrélation du signal $x(n)$:

$$F_x = \begin{bmatrix} \phi_x(0) & \phi_x(1) & \dots & \phi_x(p-1) & \phi_x(1) \\ \phi_x(1) & \phi_x(0) & \dots & \dots & \phi_x(p-1) \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \phi_x(1) \\ \phi_x(p) & \dots & \dots & \phi_x(1) & \phi_x(0) \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

Selon (1.57) et (1.59), la variance σ_e^2 de l'erreur de prédiction peut s'écrire :

$$\sigma_e^2 = [1, \underline{a}^T] \cdot F_x \cdot [1, \underline{a}^T]^T$$

C'est une forme quadratique définie positive en les $a(i)$, ce qui assure l'unicité de son minimum.

On remarquera que la matrice d'autocorrélation possède une structure très particulière : les éléments situés le long de chaque diagonale parallèle à la diagonale principale sont égaux ; une telle matrice est appelée matrice toeplitz. De plus, en l'occurrence, il s'agit d'une matrice de toeplitz symétrique, [9].

5 Conclusion

Selon l'application recherchée, Les méthodes de modélisation des signaux permettent de retrouver exactement l'estimation d'un Modèle ARMA.

Plusieurs algorithmes pour ce cas sont proposés dans littérature. Cependant, l'algorithme basé sur ARMA.

Dans le chapitre suivant nous avons étudié l'estimation du signal paramétrique par Modèle ARMA.

Chapitre 2 : Estimation Paramétrique d'un Signal

Résumé

Dans ce chapitre nous allons étudier les méthodes paramétriques. Le plan de travail de ce chapitre est comme suit : la première partie les modèles rationnels linéaires. La deuxième partie Estimation des paramètres d'un modèle AR et finalement par Méthodes d'estimation ARMA.

1 Introduction

En traitement du signal, on considère généralement qu'il existe 6 opérations principales :

- CAPTER ET MESURER
- MODELISER ET ANALYSER : représentation (non) paramétrique
- CODER ET TRANSMETTRE : compression, cryptographie
- FILTRER ET SYNTHETISER : débruitage, synthèse
- DECIDER ET CONTROLER : détection, estimation,...
- INTERPRETER ET RECONNAÎTRE : classification, contrôle

La modélisation paramétrique intervient prioritairement. Elle consiste à associer à un signal un modèle, représenté par un vecteur paramètre $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p]^T$ censé représenter au mieux le signal considéré. Etant donné que l'on choisit a priori un modèle pour le signal, cela signifie qu'en général on possède des informations a priori sur le signal lui-même qui permettent de sélectionner tel ou tel modèle. Il s'ensuit que le choix d'un modèle plutôt que d'un autre requiert au préalable une analyse du signal.

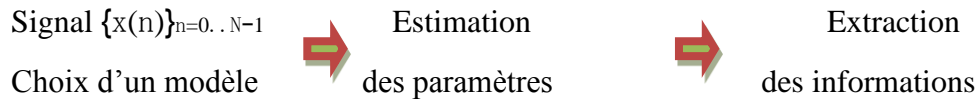
L'intérêt d'une modélisation paramétrique est double :

- Elle permet de réduire l'espace de représentation. On peut ainsi représenter un ensemble de N échantillons par un vecteur de dimension $p \ll N$. Ceci est particulièrement intéressant dans de nombreuses applications : Classification, Détection, Transmission-Compression.
- Elle permet d'extraire de façon plus fine certaines informations. C'est par la modélisation permet d'estimer avec une meilleure résolution que le périodogramme le spectre d'un signal.

On trouve de nombreuses applications de la modélisation dans des domaines comme les télécommunications, la mécanique, l'acoustique, le biomédical, le radar, le sonar, etc. Un processus de modélisation comporte en général 3 étapes :

- a) choix d'un modèle (à partir de connaissances a priori)
- b) estimation des paramètres du modèle à partir des échantillons du signal
- c) extraction de l'information à partir du modèle

Dans l'étape c), on substitue complètement au signal son modèle : on suppose que le modèle estimé est correct et on utilise les propriétés théoriques du modèle pour extraire l'information utile. En fait, on utilise le schéma suivant [10]:



L'estimation des paramètres d'un module ARMA (p, q) est un problème qui se pose h la fois en automatique et en traitement du signal. Nous avons présenté une méthode d'estimation des paramètres d'un module ARMA.

Dans ce chapitre nous allons étudier les méthodes paramétriques. Le plan de travail de ce chapitre est comme suit : la première partie les modèles rationnels linéaires. La deuxième partie Estimation des paramètres d'un modèle AR et finalement par Méthodes d'estimation ARMA.

2 Modèles rationnels linéaires

2.1 Définition

La plupart des processus sont bien approximés par un modèle rationnel linéaire. Un modèle général est le modèle ARMA (p,q) [11,12], (Auto Regressive Moving Average) défini par l'équation de récurrence :

$$x(n) = - \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) + \sum_{k=0}^q b_k u(n-k) \quad (2.1)$$

Il peut être vu comme la sortie d'un filtre linéaire, dont l'entrée est u(n) et la fonction de transfert H(z) telle que :

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k} \quad (2.2)$$

$$B(z) = 1 + \sum_{k=1}^q b_k z^{-k}$$

$$A(z) = 1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k} \quad (2.3)$$

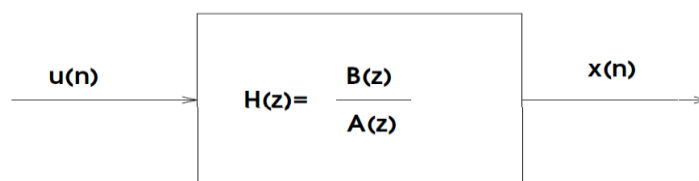


Fig. 2.1 – Processus ARMA (p,q) vu comme la sortie d'un filtre linéaire.

On montre que pour assurer que le processus $x(n)$ soit stationnaire, il faut que $H(z)$ soit stable et causal, i.e. que $A(z)$ ait ses zéros à l'intérieur du cercle unité. On considère que l'entrée $u(n)$ du filtre est un bruit blanc et on suppose également en général que $u(n)$ est un processus gaussien.

Cas particuliers :

$$\text{AR}(p) : x(n) = -\sum_{k=1}^p a_k x(n-k) + u(n) \quad : \text{ filtre "tout-pôle"}$$

$$\text{MA}(q) : x(n) = \sum_{k=0}^q a_k u(n-k) \quad : \text{ filtre "tout-zéro"}$$

2.2 Relations entre les modèles

On peut exprimer (cf théorème de Wold) tout modèle ARMA (p,q) ou AR(p) [13] par un modèle MA(∞) [14]. De même, on peut exprimer tout modèle ARMA (p,q) ou MA(q) par un modèle AR(∞). Calculons par exemple le modèle AR(∞) équivalent au modèle ARMA (p,q) en écrivant que les deux réponses impulsionnelles sont identiques :

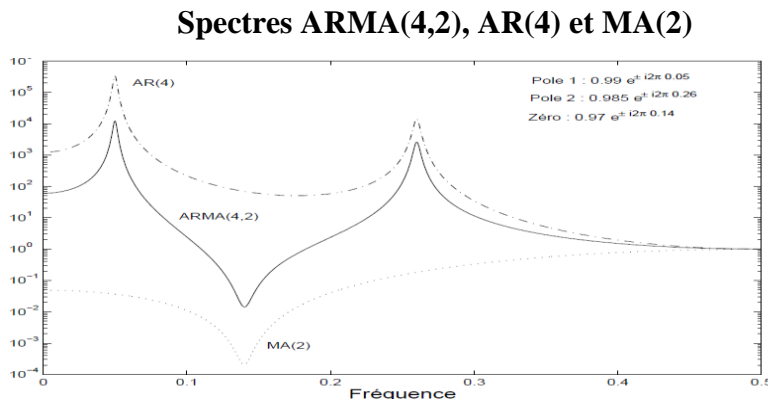


Fig. 2.2 – Différences entre spectres ARMA, AR et MA.

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1}{C(z)} \approx \Leftrightarrow A(z) = B(z)C(z) \quad (2.4)$$

D'où :

$$c_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ -\sum_{k=1}^q b_k c_{n-k} + a_n & 1 \leq n \leq p \\ -\sum_{k=1}^q b_k c_{n-k} & n > p \end{cases} \quad (2.5)$$

On peut éventuellement choisir un modèle AR au lieu d'un modèle ARMA et néanmoins avoir une bonne approximation si l'ordre choisi est suffisamment grand.

Cependant, l'ordre nécessaire risque d'être élevé, ce qui conduit à des problèmes de coût calculatoire et de précision d'estimation des paramètres AR [15].

2.3 Equations de Yule-Walker

On montre que la fonction d'autocorrélation d'un processus ARMA (p,q) vérifie les équations suivantes, appelées équations de Yule-Walker [16, 17]:

$$r_{xx}(m) = \begin{cases} r_{xx}^*(-m) & m < 0 \\ -\sum_{k=1}^p a_k r_{xx}(m-k) + \sigma^2 \sum_{k=m}^q b_k h_{k-m}^* & m \in [0, q] \\ -\sum_{k=1}^p a_k r_{xx}(m-k) & m > q \end{cases} \quad (2.6)$$

On peut récrire ces équations sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} r_{xx}(q) & r_{xx}(q-1) & \dots & r_{xx}(q-p+1) \\ r_{xx}(q+1) & r_{xx}(q) & \dots & r_{xx}(q-p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(q+p-1) & r_{xx}(q+p-2) & \dots & r_{xx}(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} r_{xx}(q+1) \\ r_{xx}(q+2) \\ \vdots \\ r_{xx}(q+p) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Cas AR(p)

$$\begin{pmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(-1) & \dots & r_{xx}(-p+1) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \dots & r_{xx}(-p+2) \\ \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ r_{xx}(p-1) & r_{xx}(p-2) & \dots & r_{xx}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} r_{xx}(1) \\ r_{xx}(2) \\ \cdot \\ \cdot \\ r_{xx}(p) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Le spectre s'écrit directement à partir de la connaissance de $\{r_{xx}(k)\}_{k=0\dots p}$ et de ces récursions.

C'est en partie parce que les équations de Yule-Walker permettent d'extrapoler la fonction de corrélation que les méthodes paramétriques sont dites hautes résolution. En effet, que ce soit pour le périodogramme [18] ou le corrélogramme [19], on tronque la fonction de corrélation, d'où un fenêtrage, c'est-à-dire une perte de résolution et l'apparition de lobes secondaires. Dans le cas AR par exemple, ce n'est plus le cas puisqu'on a :

$$S_x(f) = \frac{\sigma^2}{|1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-j2\pi kf}|^2} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(m) e^{-j2\pi mf} \quad (2.9)$$

Où

σ^2 est une variance et ϕ_{xx} (l'autocorrélation) est défini par

$$\phi_{xx}(m) = \begin{cases} \hat{r}_{xx}(m) & |m| \leq p \\ -\sum_{k=1}^p a_k \phi_{xx}(m-k) & |m| > p \end{cases} \quad (2.10)$$

Les figures 2.3-2.6 illustrent les différences pouvant exister entre les spectres issus de différentes modélisations d'un même signal.

2.4 Modèles ARMAX [11],...

Il existe un grand nombre de modèles. Parmi la classe des modèles linéaires, on peut définir le modèle général suivant :

$$x(n) = -\sum_{k=1}^{na} a_k x(n-k) + \sum_{k=0}^{nb} b_k u(n-d-k) + \sum_{k=1}^{nc} c_k v(n-k) \quad (2.11)$$

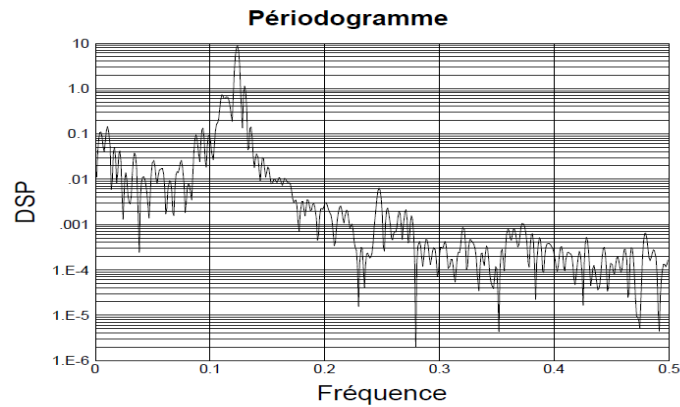


Fig. 2.3 – Périodogramme du signal.

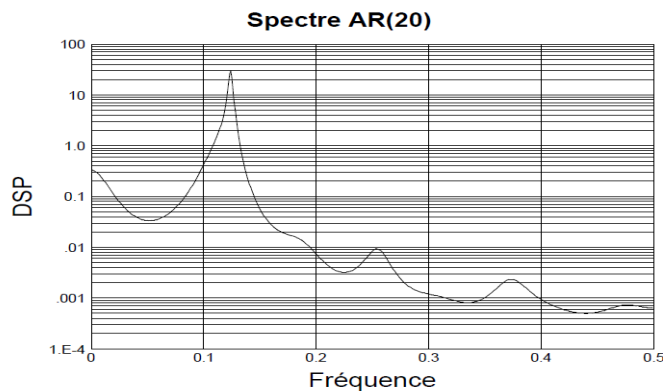


Fig. 2.4 – Spectre issu d'une modélisation AR(20) du signal.

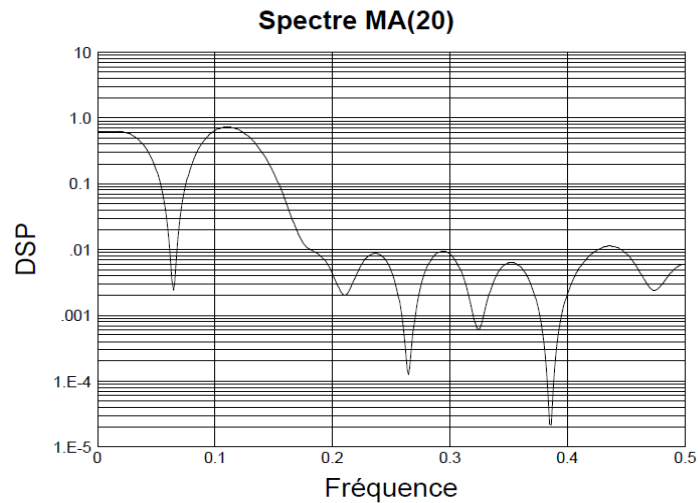


Fig. 2.5 – Spectre issu d'une modélisation MA(20) du signal.

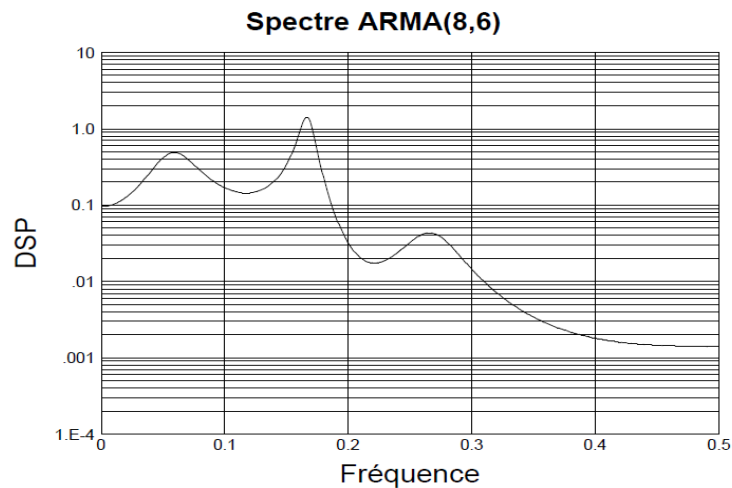


Fig. 2.6 – Spectre issu d'une modélisation ARMA(8,6) du signal.

Où $u(n)$ est un bruit blanc et $v(n)$ une entrée de contrôle. Ce modèle est dit ARMAX [20] (ARMA with exogenous signal). Les cas particuliers suivants sont souvent considérés :

- $nc = 0$: il s'agit du modèle ARMA (na, nb) classique
- $nb = 0$: modèle ARX
- $nc = nb = 0$: modèle AR (na)

Un cas spécial de modèle ARMA est le modèle ARIMA pour lequel le polynôme $A(z)$ est de la forme :

$$A(z) = (1 - z^{-1})^L A_1(z) \quad (2.12)$$

Où les zéros de $A_1(z)$ sont à l'intérieur du cercle unité. Il s'agit en fait d'un intégrateur d'ordre L d'un processus ARMA.

Dans le domaine des modèles ARMA, Grenier a proposé un modèle ARMA pour lequel les paramètres AR et MA dépendent du temps, [21, 22,23] :

$$x(n) = - \sum_{k=1}^{na} a_k(n-k)x(n-k) + \sum_{k=0}^{nb} b_k(n-k)u(n-k) \quad (2.13)$$

Dans la suite de ce cours, on s'intéressera plus particulièrement aux modèles AR et ARMA. On présentera les principales méthodes d'estimation des paramètres AR et notamment le lien existant entre la prédiction linéaire et les équations de Yule-Walker [22, 23].

3 Estimation des paramètres d'un modèle AR

3.1 Relation AR-Prédiction linéaire

Supposons que $x(n)$ soit un processus AR(p). On cherche à trouver le meilleur prédicteur d'ordre p de $x(n)$ [24, 25] :

$$\hat{x}(n) = - \sum_{k=1}^p \alpha_k x(n-k) \quad (2.14)$$

Pour cela, on cherche les coefficients α_k qui minimisent la puissance de l'erreur de prédiction [26] :

$$p = E\{|e(n)|^2\} = E\{|\hat{x}(n) - x(n)|^2\} \quad (2.15)$$

Ou :

$$\begin{aligned} p &= E \left\{ \left[x(n) + \sum_{k=1}^p \alpha_k x(n-k) \right] \left[x^*(n) + \sum_{k=1}^p \alpha_k^* x^*(n-k) \right] \right\} \\ &= r_{xx}(0) + \sum_{k=1}^p \alpha_k r_{xx}(-k) + \sum_{k=1}^p \alpha_k^* r_{xx}(k) + \sum_{k=1}^p \sum_{m=1}^p \alpha_k \alpha_m^* r_{xx}(m-k) \\ &= r_{xx}(0) + \alpha^H r + r^H \alpha + \alpha^H \alpha \end{aligned} \quad (2.16)$$

Avec :

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}, \mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_{xx}(1) \\ r_{xx}(2) \\ \vdots \\ r_{xx}(p) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(-1) & \dots & r_{xx}(-p+1) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \dots & r_{xx}(-p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(p-1) & r_{xx}(p-2) & \dots & r_{xx}(0) \end{pmatrix}$$

(2.17),(2.18)

D'où, la minimisation revient à :

$$\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = 2\mathbf{r} + 2\mathbf{R}\boldsymbol{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{R}\boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{r} \quad (2.19)$$

On retrouve les équations de Yule-Walker [22] :

Le meilleur prédicteur d'ordre p d'un processus AR(p) est donné par les paramètres AR

On a :

$$p_{min} = \sum_{k=0}^p \alpha_k r_{xx}(-k) \quad (2.20)$$

A cause de la propriété précédente, on estime généralement les paramètres AR par minimisation de l'erreur de prédiction linéaire [26]. Il existe une autre approche que celle de la prédiction linéaire qui a été proposée par Burg [27, 28] et appelée méthode du maximum d'entropie. Comme on l'a vu, si l'on suppose connus $\{r_{xx}(k)\}_{k=0, \dots, p}$, alors la fonction d'autocorrélation est implicitement extrapolée (via les équations de Yule-Walker) pour un processus AR. Burg s'est alors posé la question suivante pour un processus quelconque : si l'on connaît $\{r_{xx}(k)\}_{k=0, \dots, p}$, comment est-il possible d'extrapoler $r_{xx}(p+1)$, $r_{xx}(p+2)$, \dots de manière à garantir le caractère semi-défini positif de la fonction de corrélation ? Il a alors montré que parmi toutes les extrapolations possibles, celle qui donne l'entropie maximale correspond à un processus AR. En d'autres termes, le processus AR est le processus le plus aléatoire qui permette d'extrapoler la fonction d'autocorrélation à partir de la connaissance de $\{r_{xx}(k)\}_{k=0, \dots, p}$. Burg considère cette propriété importante dans la mesure où elle permet de faire le moins d'hypothèses possible (telle que corrélation nulle) sur la fonction d'autocorrélation en dehors de $\{r_{xx}(k)\}_{k=0, \dots, p}$. Du fait de l'analogie que

nous venons de présenter, la méthode du maximum d'entropie est souvent assimilée à la modélisation AR. Dans la suite de cours, elle sera plutôt associée à la méthode proposée par Burg pour estimer les paramètres AR [28].

Dans la suite, nous présentons différentes méthodes d'estimation de ces paramètres AR, fondées soit sur une minimisation de l'erreur de prédiction, soit sur l'algorithme de Burg.

4 Méthodes d'estimation

4.1 Algorithme de Levinson

C'est un algorithme qui permet de résoudre tout système du type $Ax = b$ avec A Toeplitz, donc en particulier les équations normales de Yule-Walker :

$$\begin{pmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(-1) & \dots & r_{xx}(-p) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \dots & r_{xx}(-p+1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_{xx}(p) & r_{xx}(p-1) & \dots & r_{xx}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Principe : Trouver de façon récursive les paramètres d'ordre k en fonction des paramètres d'ordre $k - 1$.

Algorithme :

Initialisation :

$$a_1[1] = -\frac{r_{xx}(1)}{r_{xx}(0)}$$

$$p_1 = (1 - |a_1[1]|^2)r_{xx}(0) \quad (2.22)$$

Récursion :

$$\begin{aligned} a_k[k] &= -\frac{r_{xx}(k) + \sum_{i=1}^{k-1} a_{k-1}[i]r_{xx}(k-i)}{p_{k-1}} = k_k \\ a_k[i] &= a_{k-1}[i] + a_k[k]a_{k-1}^*[k-i] \quad i = 1, \dots, k-1 \\ p_k &= [1 - |a_k[k]|^2]p_{k-1} \end{aligned} \quad (2.23)$$

En pratique, on utilise un estimateur de la fonction de corrélation. Pour assurer un Système à minimum de phase (pôles à l'intérieur du cercle unité), on prend l'estimateur biaisé.

Intérêts :

– $O(p^2)$ opérations pour estimer les paramètres.

– possibilité de récupérer tous les prédicteurs d'ordre inférieur,

NB : Les coefficients $\{k_k\}_{k=1,\dots,p}$ sont dits coefficients de réflexion. Trois représentations équivalentes sont possibles pour un processus AR :

$$\{p_p, a_p[1], \dots, a_p[p]\} \Leftrightarrow \{r_{xx}(0), k_1, \dots, k_p\} \Leftrightarrow \{r_{xx}(0), \dots, r_{xx}(p)\} \quad (2.24)$$

4.2 Algorithme de Burg

On a vu que Burg avait montré que dans le cas où $x(n)$ est Gaussien, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{r_{xx}(k)\}_{k=0\dots p} \text{ connus} \\ \text{entropie maximale} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{r_{xx}(k)\}_{k=0\dots p} \text{ connus} \\ x(n) \text{ spectre } AR(p) \end{array} \right.$$

Principe de l'algorithme de Burg : c'est un algorithme récursif en ordre qui minimise par rapport au coefficient de réflexion la puissance des erreurs de prédiction directe et rétrograde. On a :

$$e_k^f(n) = x(n) + \sum_{m=1}^k a_k[m]x(n-m) = e_{k-1}^f(n) + k_k e_{k-1}^b(n-1) \quad (2.25)$$

$$e_k^b(n) = x(n-k) + \sum_{m=1}^k a_k^*[m]x(n-k+m) = e_{k-1}^b(n-1) + k_k^* e_{k-1}^f(n) \quad (2.26)$$

On cherche à minimiser :

$$p_k = \frac{1}{2}(p_k^f + p_k^b) = \frac{1}{2} \sum_{n=k}^{N-1} |e_k^f(n)|^2 + |e_k^b(n)|^2 \quad (2.27)$$

Si l'on suppose connus k_1, k_2, \dots, k_{k-1} alors p_k ne dépend que de k_k . On a donc :

$$k_k = \frac{-2 \cdot \sum_{n=k}^{N-1} e_{k-1}^f(n) e_{k-1}^{b*}(n-1)}{\sum_{n=k}^{N-1} |e_{k-1}^f|^2 + |e_{k-1}^b(n-1)|^2} \quad (2.28)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} a_k[k] &= k_k \\ a_k[i] &= a_k[i] + a_k[k] a_{k-1}^*[k-i] \quad i = 1 \dots k-1 \\ p_k &= (1 - |a_k[k]|^2) \end{aligned} \quad (2.29)$$

L'algorithme de Burg garantit un système à minimum de phase.

Inconvénients :

- dédoublement de raies dans le cas d'un sinus + bruit avec fort SNR.
- estimation des pics dépendant de la phase.

4.3 Algorithmes des moindres carrés

En général, on utilise des méthodes qui consistent à minimiser, au sens des moindres carrés, la puissance de l'erreur de prédiction linéaire.

Soit $\hat{x}(n) = -\sum_{k=1}^p a_k x(n-k)$ le prédicteur d'ordre p de $x(n)$ et $e(n) = x(n) - \hat{x}(n) = x(n) + \sum_{k=1}^p a_k x(n-k)$ l'erreur de prédiction

On peut écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \cdot \\ e_p \\ e_{p+1} \\ \cdot \\ e_N \\ e_{N+1} \\ \cdot \\ e_{N+p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & & \\ x_p & & & x_1 & 0 \\ x_{p+1} & & & & x_1 \\ \vdots & \ddots & & & \\ x_N & & \ddots & & x_{N-p} \\ 0 & x_N & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ \vdots & & \ddots & & x_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_p \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

On cherche alors à minimiser :

$$p = \sum_{n=n_0}^{n_1} |e(n)|^2 = \sum_{n=n_0}^{n_1} \left| x(n) + \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) \right|^2 = \|Xa + h\|^2 \quad (2.31)$$

Selon l'horizon $[n_0, n_1]$ sur lequel on effectue la minimisation, on a des algorithmes différents :

- $[1, N + p]$ avec fenêtrage (on suppose le signal nul en dehors de $[1, N]$) \rightarrow méthode des corrélations.
- $[1, N]$: préfenêtrage.
- $[p + 1, N + p]$: postfenêtrage.
- $[p+1, N]$: sans fenêtrage (on n'utilise que la portion disponible du signal) \rightarrow méthode des covariances.

Quelle que soit la méthode, le vecteur qui minimise (4.19) est donné par :

$$a = -(X^H X)^{-1} X^H h = -R^{-1} r \quad (2.32)$$

Avec :

$$R(i, j) = \sum_{n=n_0}^{n_1} x^*(n-i)x(n-j)$$

$$r(j) = \sum_{n=n_0}^{n_1} x(n)x^*(n-j) \quad (2.33)$$

1er cas : méthode des corrélations

On a :

$$R(i,j) = [X^H X](i,j) = \sum_{n=1}^{N-i+j} x^*(n)x(n+i-j) \quad (2.34)$$

La matrice R, qui est de Toeplitz, n'est autre que la matrice des corrélations des équations de Yule-Walker dans laquelle l'estimateur biaisé de la corrélation est utilisé : on peut donc utiliser l'algorithme de Levinson-Durbin pour résoudre cette équation.

2ème cas : méthode des covariances

Ici

$$R(i,j) = [X^H X](i,j) = \sum_{n=p+1}^N x^*(n-i)x(n-j) \quad (2.35)$$

Dans ce cas, la matrice R, bien qu'hermitienne n'est plus de Toeplitz : on ne peut plus appliquer l'algorithme de Levinson-Durbin. Néanmoins, Morf et al ont développé un algorithme nécessitant $O(p^2)$ opérations pour résoudre de tels systèmes.

3ème cas : méthode des covariances modifiée

Marple [18] a proposé de minimiser, non plus la puissance de l'erreur de prédiction avant mais la demi somme des erreurs de prédiction arrière et avant :

$$p = \frac{1}{2}(p^f + p^b) = \frac{1}{2} \sum_{n=p+1}^N |e^f(n)|^2 + |e^b(n)|^2 \quad (2.36)$$

Où :

$$e^f(n) = x(n) + \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) \quad (2.37)$$

$$e^b(n) = x(n-p) + \sum_{k=1}^p a_k^* x(n-p+k)$$

Dans ce cas, la matrice R est donnée par :

$$R(i, j) = \sum_{n=p+1}^N x^*(n-i)x(n-j) + x(n+i-p)x^*(n+j-p) \quad (2.38)$$

Marple a proposé un algorithme rapide pour résoudre ce système.

4.4 Propriétés des méthodes AR :

* plus haute résolution que les méthodes classiques : la possibilité d'extrapoler la fonction de corrélation, donc d'éliminer le fenêtrage élimine les lobes secondaires.

* algorithmes rapides.

* bonne performance pour des signaux de courte durée.

– difficulté à choisir l'ordre du modèle.

– résolution décroissante avec le SNR.

– doublement de raies dans certains cas.

– contrairement au périodogramme, pour un signal sinusoïdal, l'amplitude du pic AR.

N'est pas directement proportionnelle à la puissance de la sinusoïde.

– dans le cas d'une somme de n sinusoïdes bruitées, une modélisation AR(L) (avec $L > 2n$) associée à une recherche des n pôles (ou maxima) prépondérants permet

D'obtenir une bonne estimation des fréquences lorsque le SNR est "bon". Néanmoins, ces estimateurs restent biaisés et on peut même montrer que le biais est de l'ordre de $O(1/L^3)$.

NB : Marple a montré que pour 2 sinus noyés dans du bruit, la différence minimum entre les 2 fréquences qu'un modèle AR(p) et que le périodogramme pouvaient résoudre est :

$$\delta f_{AR} \simeq \frac{1.03}{p[(p+1) \cdot SNR]^{0.31}}$$

$$\delta f_{PER} \simeq \frac{0.86}{N} \quad (2.39)$$

Où p désigne l'ordre du modèle AR, N le nombre de points et SNR le rapport signal sur bruit. En fonction de p, N, SNR, le périodogramme peut s'avérer inférieur ou supérieur (en termes de résolution) à un modèle AR. Néanmoins, la résolution n'est pas le seul critère à prendre en compte : la précision (biais, variance) est elle aussi un point important. En terme de précision, les méthodes paramétriques s'avèrent généralement supérieures. La figure qui suit (2.7) montre, en fonction du rapport signal sur bruit, l'ordre minimum du modèle AR pour avoir une résolution comparable au périodogramme :

En résumé, pour de faibles SNR ou un grand nombre de points, le périodogramme s'avère aussi bon (en résolution) que les méthodes paramétriques qui, elles, nécessitent un fort rapport signal sur bruit. Leur intérêt est qu'elles sont utilisables sur des tranches de signal courtes contrairement à la FFT dont la résolution dépend essentiellement de la longueur du signal traité.

Pour illustrer ceci, les figures 2.8-2.15 comparent le périodogramme et le spectre issu d'un modèle AR(12) pour un signal constitué de 2 sinus noyés dans un bruit additif. Les figures 2.8-2.11 montrent l'influence du nombre de points N.

On constate que la modélisation AR permet de retrouver les 2 fréquences quel que soit N alors que le périodogramme est sensible à ce paramètre. Par contraste, les figures 2.12-2.15 illustrent l'influence du SNR sur la modélisation AR à nombre de points fixe.

On s'aperçoit, au vu des figures précédentes, que le SNR doit être suffisamment bon pour que le spectre AR(12) puisse résoudre les 3 fréquences. Il est à noter également, que si l'ordre du modèle avait été choisi plus élevé, le SNR minimum pour détecter les 3 sinus aurait été plus faible.

Nous nous intéressons maintenant à l'influence de l'amplitude des sinusoïdes (voir figures 2.16- 2.17).

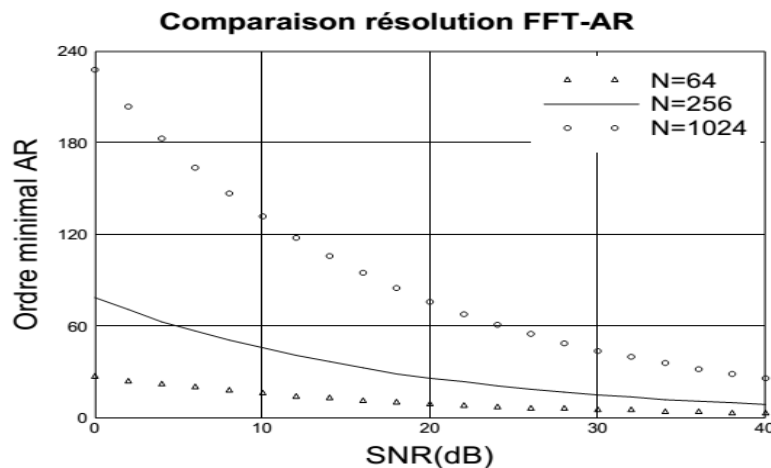


Fig. 2.7 – Ordre minimal de modélisation AR pour avoir une résolution comparable au périodogramme, en fonction de N et du SNR.

On peut constater deux phénomènes :

▲ Le spectre AR ne restitue pas l'amplitude des sinus. En effet, alors que les 3 sinus ont la même amplitude sur la figure 2.16, le spectre AR ne fournit pas trois pics

de même hauteur. Par contre, le périodogramme permet d'estimer la puissance des signaux.

▲ Lorsque les sinus ont des amplitudes différentes, les faibles signaux sont masqués par les forts signaux pour le périodogramme (cf figure 2.17). Le troisième sinus est en effet de même amplitude que le premier lobe secondaire associé au second sinus. Ce phénomène n'existe pas dans le cas d'un modèle AR.

4.5 Estimation des fréquences à partir des paramètres AR

Lorsqu'on désire avoir des informations sur le contenu spectral du signal (DSP, recherche de fréquences,...), la modélisation n'est qu'une première étape : une deuxième étape est nécessaire pour accéder aux informations spectrales. Supposons qu'à partir de N points du signal, on ait estimé des paramètres AR $\{\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p\}$ et la variance du bruit d'entrée $\hat{\sigma}^2$. On peut alors estimer la densité spectrale de puissance du signal par :

$$\hat{S}_x(f) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\left|1 + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k e^{-j2\pi k f}\right|^2} \quad (2.40)$$

On a ainsi accès à une écriture paramétrique du spectre, où n'apparaît plus directement le signal, comme c'est le cas pour la Transformée de Fourier.

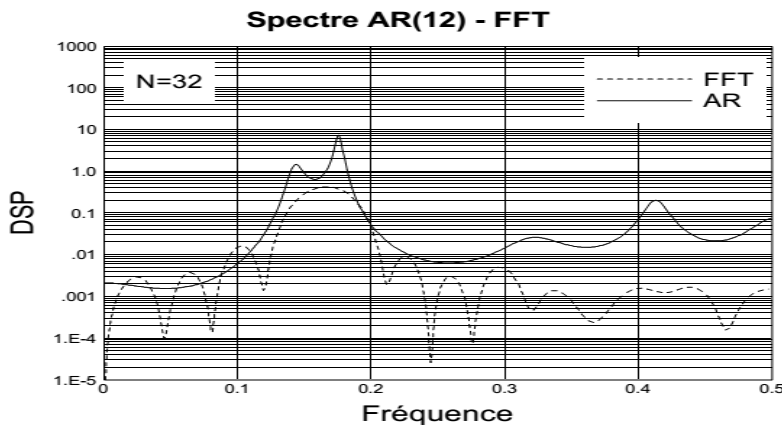


Fig. 2.8 – Comparaison du spectre AR et du périodogramme. 2 sinus+bruit. N=32. SNR=15dB. [15]

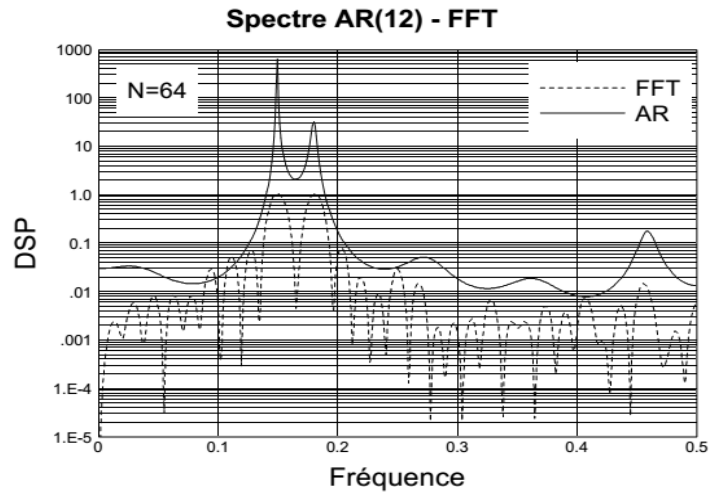


Fig. 2.9 – Comparaison du spectre AR et du périodogramme. 2 sinus+bruit. N=64. SNR=15dB.

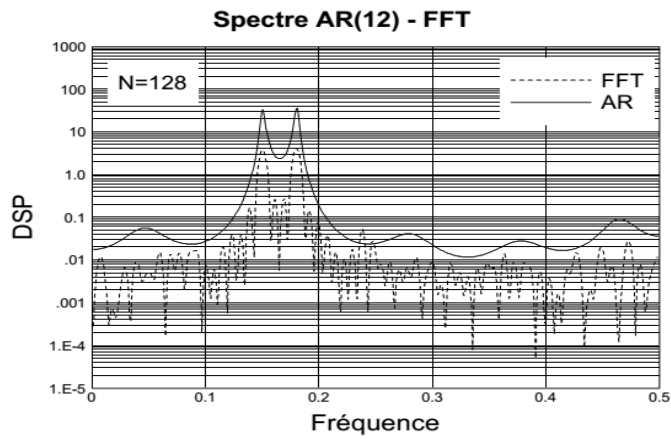


Fig. 2.10 – Comparaison du spectre AR et du périodogramme. 2 sinus+bruit. N=128. SNR=15dB.

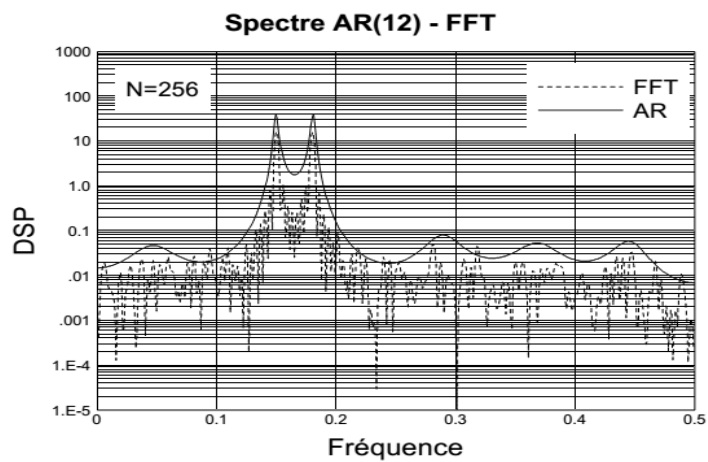


Fig. 2.11 – Comparaison du spectre AR et du périodogramme. 2 sinus+bruit. N=256. SNR=15dB.

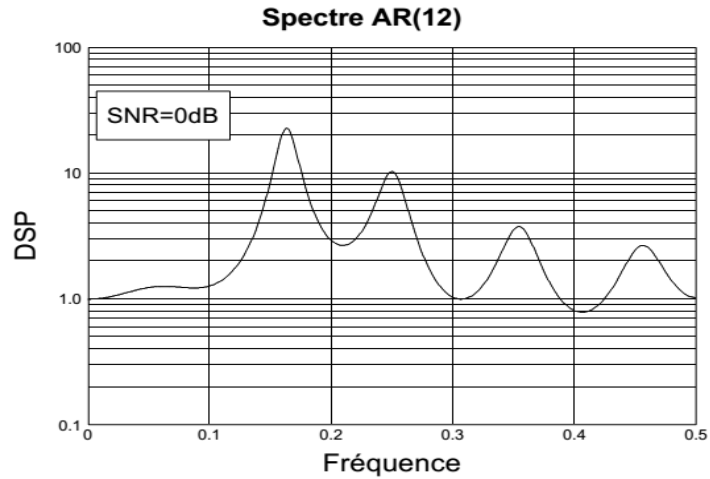


Fig. 2.12– Influence du SNR sur la résolution du modèle AR. 3 sinus + bruit. N=256.
SNR=0dB. p=12.

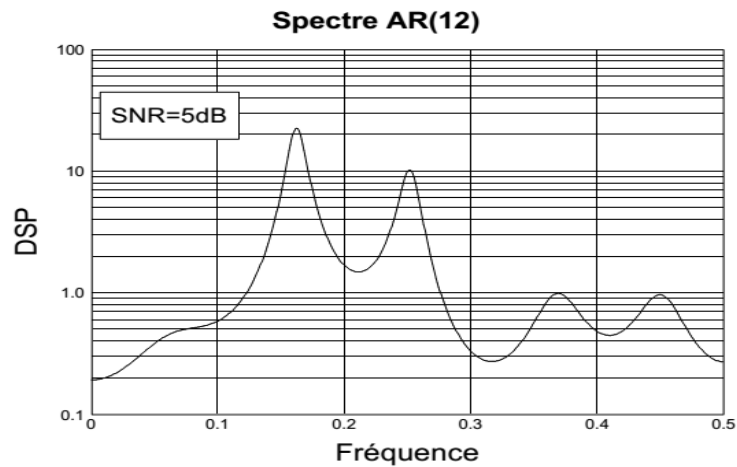


Fig. 2.13– Influence du SNR sur la résolution du modèle AR. 3 sinus + bruit. N=256.
SNR=5dB. p=12.

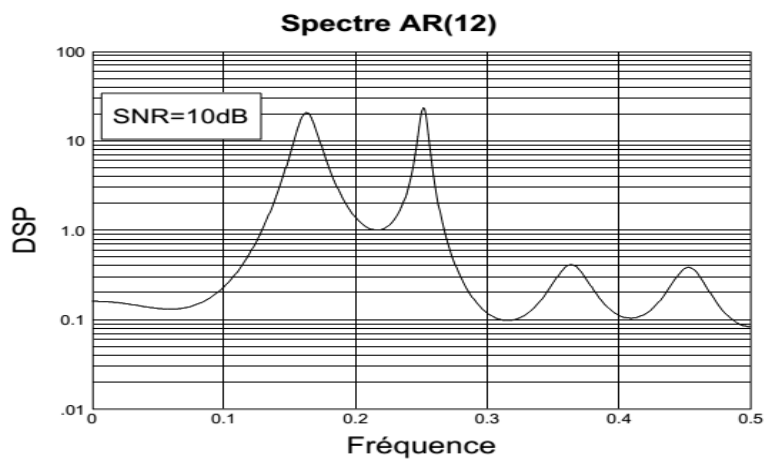


Fig. 2.14– Influence du SNR sur la résolution du modèle AR. 3 sinus + bruit. N=256.
SNR=10dB. p=12.

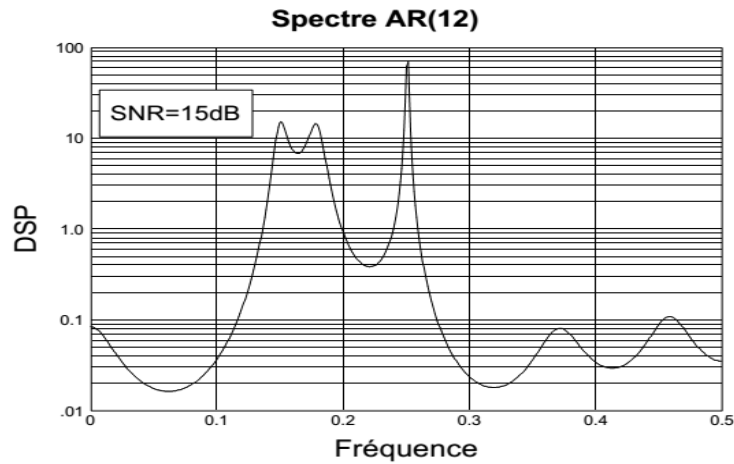


Fig. 2.15– Influence du SNR sur la résolution du modèle AR. 3 sinus + bruit. N=256.
SNR=15dB. p=12

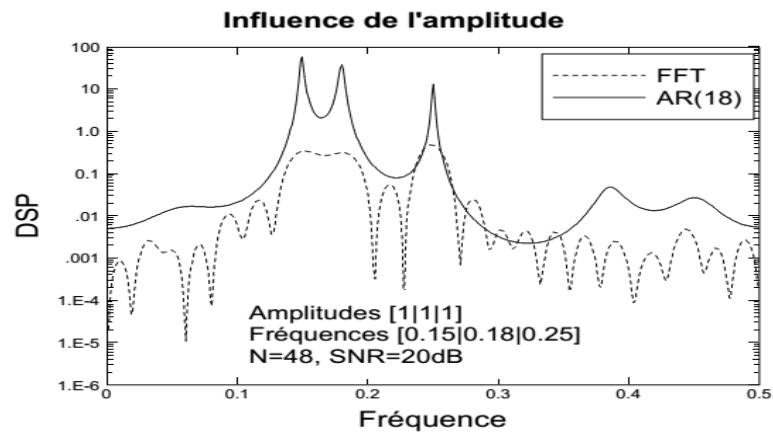


Fig. 2.16– Influence de l'amplitude des sinusoïdes sur la modélisation AR et le périodogramme.

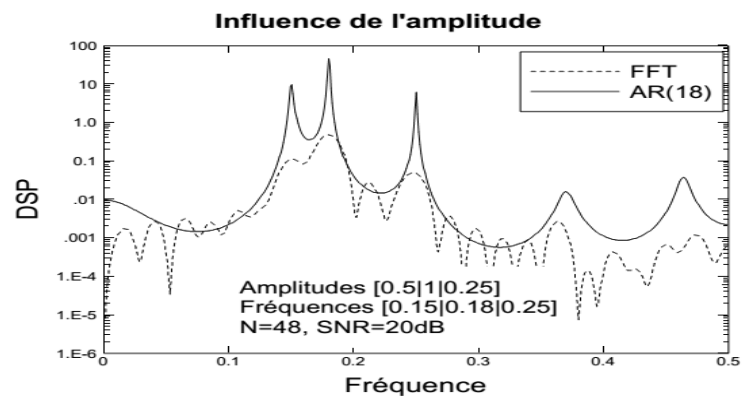


Fig. 2.17 – Influence de l'amplitude des sinusoïdes sur la modélisation AR et le périodogramme.

Souvent, on ne recherche pas la DSP sur l'ensemble des fréquences : on s'intéresse surtout aux modes de résonance du signal et plus exactement à leurs fréquences. Dans ce cas, 2 méthodes principales sont envisageables :

Méthode n°1 : Recherche des positions des maxima de $\hat{s}_x(f)$ En général, on effectue une FFT des paramètres AR $\{1, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p\}$, ce qui donne la valeur du spectre à différentes fréquences équiréparties. On recherche alors les abscisses des q maxima les plus importants :

$$\{1, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p\} \xrightarrow{FFT} \{\hat{S}_x(k/nfft)\}_{k=0, \dots, nfft-1} \xrightarrow{max} \{\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_q\} \quad (2.41)$$

Méthode n°2 : Recherche des pôles du système :

$$\hat{A}(z) = \sum_{k=0}^p \hat{a}_k z^{-k} = \prod_{k=1}^p (1 - \hat{z}_k z^{-1}) \quad (2.42)$$

Avec :

$$\hat{z}_k = \hat{p}_k e^{j2\pi \hat{f}_k} \quad (2.43)$$

Les modules \hat{p}_k des pôles mesurent l'accuité de la résonance : plus \hat{p}_k se rapproche de 1 (i.e. le pôle du cercle unité) plus la résonance est forte : ceci signifie la présence d'une harmonique dans le signal. Plus le module est amorti (c'est-à-dire < 1), plus la composante fréquentielle correspondante est amortie

Les fréquences \hat{f}_k donnent l'information sur les fréquences présentes dans le signal. Par exemple, si l'on cherche une sinusoïde dans le signal, on choisira généralement le pôle le moins amorti (de module le plus près de 1) et on estimera la fréquence de cette sinusoïde comme la fréquence du pôle sélectionné.

Remarque 2.8. La méthode des pôles est généralement plus précise que la méthode des maxima, même si ces 2 méthodes sont asymptotiquement équivalentes. Par exemple, il est possible que la recherche des pôles permette de discerner deux fréquences proches alors que la méthode des maxima ne le permet pas. Ceci est dû au fait qu'on utilise une FFT pour la méthode n°1. En contre partie, le calcul des zéros d'un polynôme est plus long qu'une FFT + recherche de maxima. Néanmoins, des algorithmes rapides de recherche de zéros existent.

La figure 2.18(a) illustre la différence entre les maxima et les pôles. Une modélisation AR(16) d'un signal composé de 3 sinus (fréquences : 0.15, 0.18, 0.25) noyés dans du bruit (SNR = 10dB) a été effectuée. Le spectre AR est estimé à l'aide d'une FFT des paramètres AR sur 1024 points (figure 2.18(a)). D'autre part, on calcule les pôles du modèle (voir figure 2.18(b)) :

On constate donc que :

- les valeurs numériques sont légèrement différentes.
- les 3 pôles les moins amortis correspondent aux trois sinus.

4.6 Critères de sélection de l'ordre

Un des problèmes fondamentaux en modélisation paramétrique, outre le choix du modèle, concerne le choix de l'ordre

▲ choisir un ordre trop faible revient à lisser le spectre.

▲ choisir un ordre trop élevé conduit à des pics secondaires

Plusieurs méthodes ont été proposées qui consistent à minimiser un critère : l'ordre choisi est celui qui minimise le critère. Ce dernier dépend en général de la puissance de l'erreur de prédiction aux différents ordres. Si l'on note \hat{p}_k la puissance de l'EPL pour une modélisation AR(k), les principaux critères utilisés sont :

Akaike Information Criterion :

$$AIC(k) = N \ln(\hat{p}_k) + 2k \quad (2.44)$$

Final Prédiction Error :

$$FPE(k) = \frac{N + k + 1}{N - k - 1} \hat{p}_k \quad (2.45)$$

Criterion Autoregressive Transfer Function :

$$CAT(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\check{p}_i} - \frac{1}{\check{p}_k} \check{p}_i = \frac{N}{N-i} \check{p}_i \quad (2.46)$$

Minimum Description Length :

$$MDL(k) = N \ln(\hat{p}_k) + p \ln(N) \quad (2.47)$$

On montre qu'en fait il est très difficile d'estimer l'ordre du modèle par ces critères. Il est même montré que le critère d'Akaike par exemple est inconsistant, c'est-à-dire que, même pour un nombre de points infini, il ne donne pas avec une probabilité 1 l'ordre correct. Le choix de l'ordre est donc plus du ressort de l'expertise et de la connaissance des signaux, notamment pour des signaux réels : une procédure automatique et infaillible n'existe pas. Néanmoins, les critères précédents fournissent

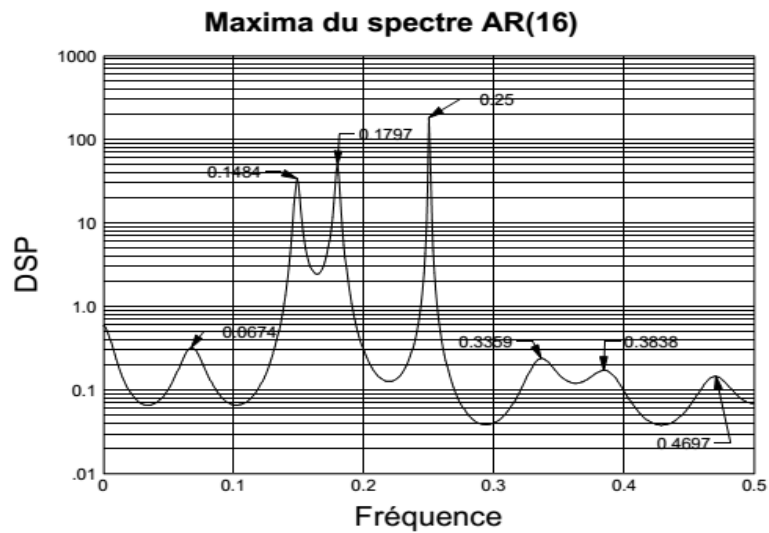
des informations utiles. Les critères précédents (2.44), (2.45), (2.46), (2.47) ont été testés dans le cas de 2 sinus + bruit, pour un SNR de 5dB. 256 points de signal ont été utilisés pour construire un ensemble de modèles AR(p), $p \in [2, 20]$. Pour chaque valeur de p , on a calculé les expressions (2.44), (2.45), (2.46), (2.47) :

Enfin, l'influence du choix de l'ordre sur l'allure du spectre est maintenant illustrée par les figures 2.20-2.23. Pour cela, on considère un véritable processus AR(4) et on fait une modélisation aux ordres 2, 4, 8 et 16 :

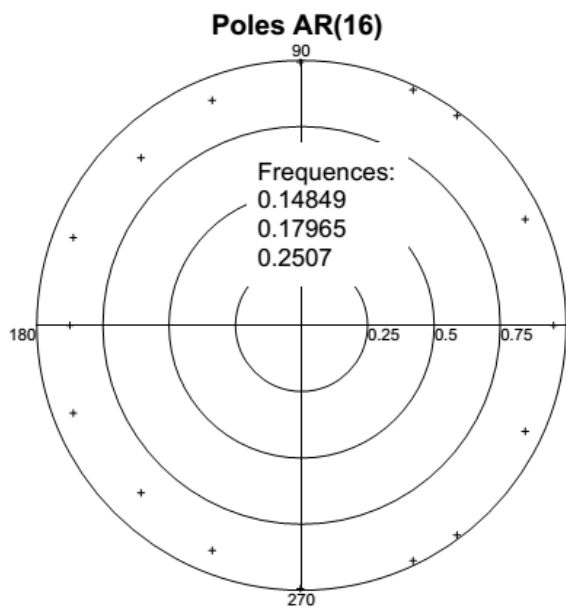
Au vu de ces figures on constate (cf. Figure 2.21) qu'une "sous-détermination" de l'ordre du modèle conduit à placer un pôle approximativement au milieu des deux pôles réels. Par contre, sur les autres figures, il semble que le choix d'un ordre supérieur à 4 ne pose pas de problèmes. Néanmoins, dans le cas $p=16$, on peut s'apercevoir que parmi les 16-4 pôles supplémentaires, 2 sont placés au voisinage des pôles réels (voir figure 2.24). Ceci signifie qu'il existe 3 pôles dans une région où théoriquement n'en existent que 2. Autrement dit, un des pôles "parasites" rend difficile la sélection des véritables modes du signal. Ceci est visible sur les valeurs numériques des pôles mais pas sur l'allure du spectre (cf Figure 2.24).

D'autre part, il convient de noter que si le processus est véritablement un AR d'ordre 4, la matrice de corrélation construite pour une modélisation d'ordre 16 est théoriquement de rang 4, donc de rang déficient : ceci implique en particulier qu'elle n'est pas inversible. D'où théoriquement toujours, la solution d'une modélisation AR(16) n'existe pas

En pratique, étant entendu que l'on estime la fonction de corrélation, la matrice construite à partir d'estimées devient de rang plein. Néanmoins, comme l'indique l'allure des valeurs singulières de cette matrice (voir figure 2.26), elle est "presque" de rang déficient, ce qui peut conduire à des résultats numériques aberrants. Il convient donc, lorsqu'on résout les équations de Yule-Walker, de recourir à des méthodes numériques robustes.



(a) Position des maxima du spectre AR(16)



(b) Position des pôles du modèle AR(16)

Fig. 2.18 – Comparaison maxima-pôles

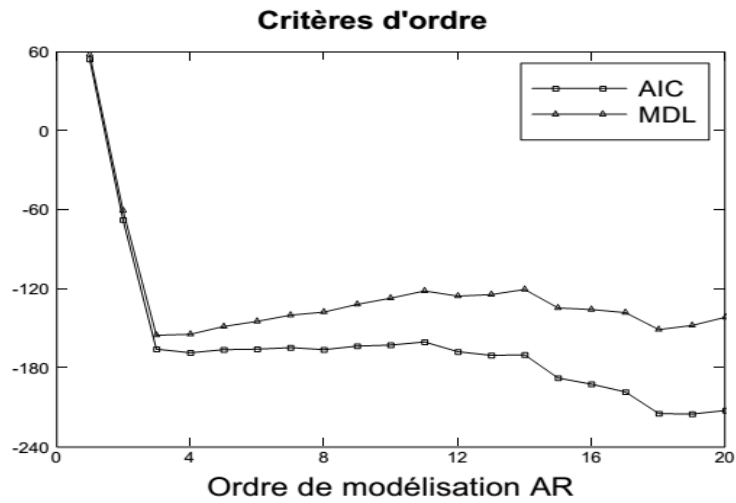


Fig. 2.19– Critères AIC, MDL pour une modélisation AR(p) de 2 sinus+bruit. SNR=5dB. N=256.

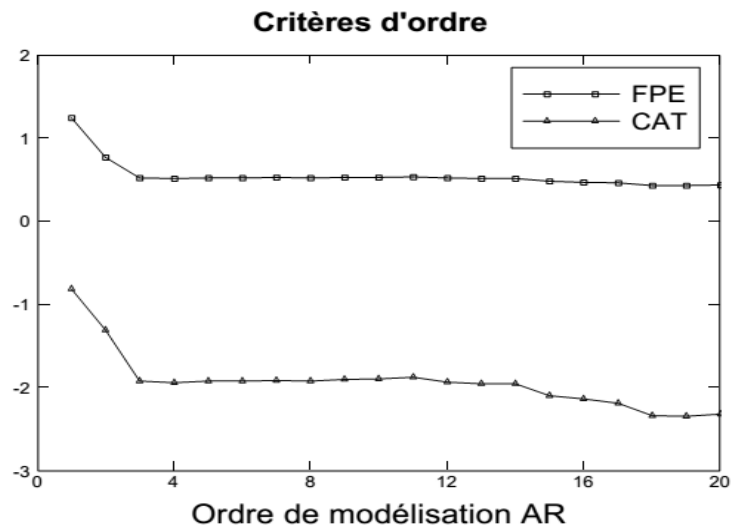


Fig. 2.20 – Critères FPE,CAT pour une modélisation AR(p) de 2 sinus+bruit. SNR=5dB. N=256.

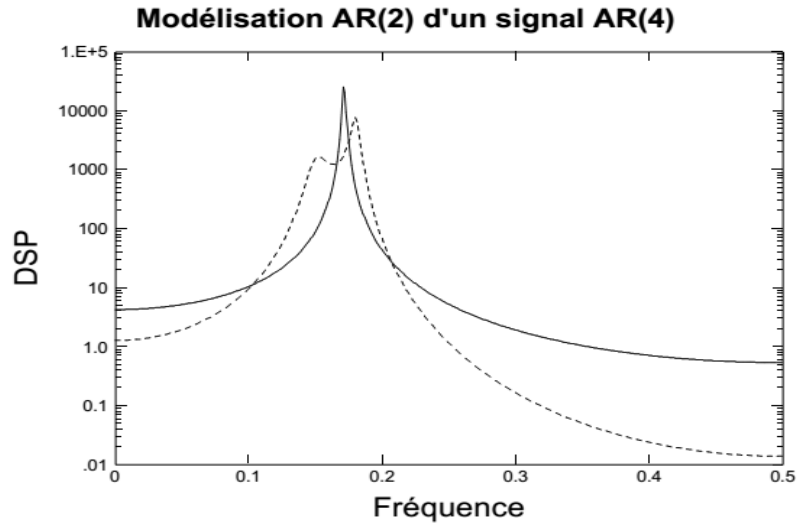


Fig. 2.21 – Spectre issu d'une modélisation AR(2) d'un processus AR(4).

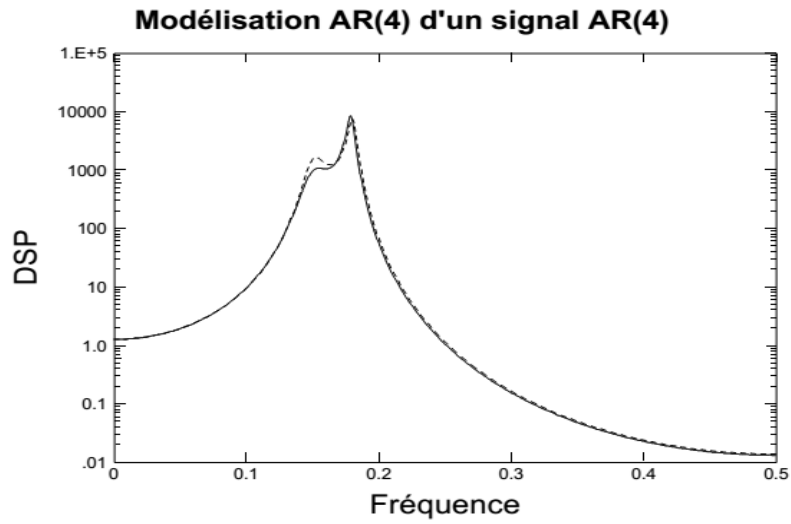


Fig. 2.22 – Spectre issu d'une modélisation AR(4) d'un processus AR(4).

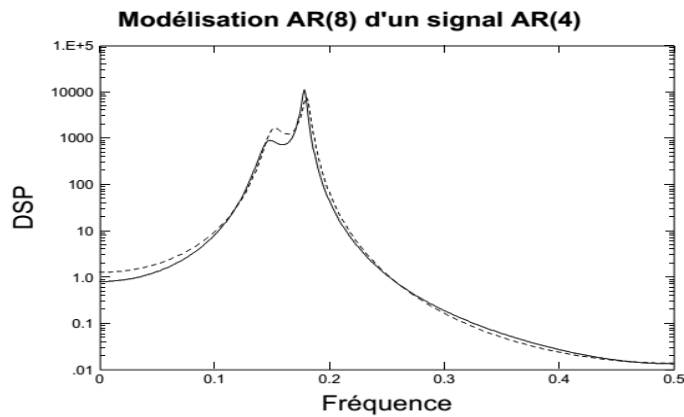


Fig. 2.23 – Spectre issu d'une modélisation AR(8) d'un processus AR(4).

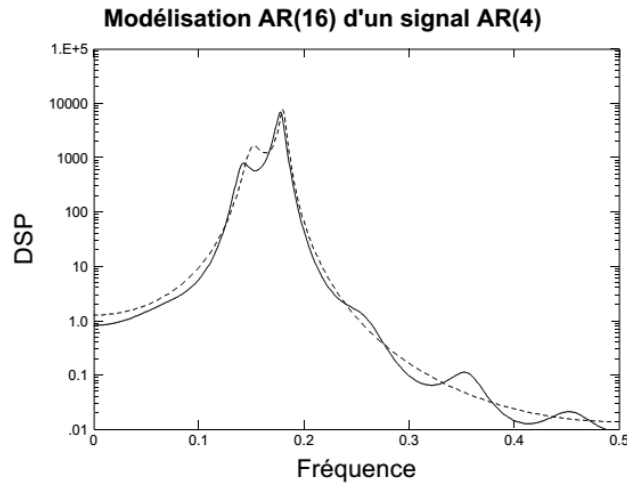


Fig. 2.24– Spectre issu d'une modélisation AR(16) d'un processus AR(4).

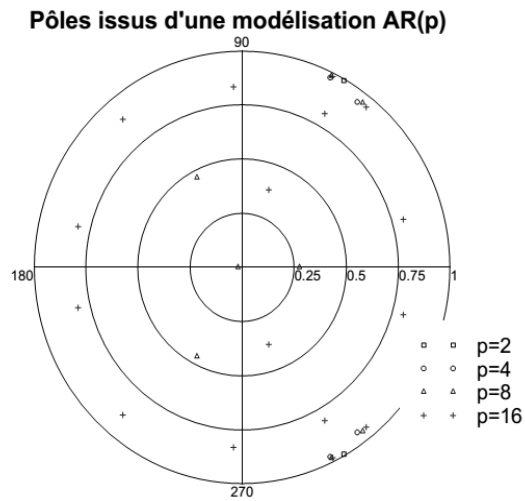


Fig. 2.25 – Valeur des pôles calculés par modélisation AR(p) d'un processus AR(4)

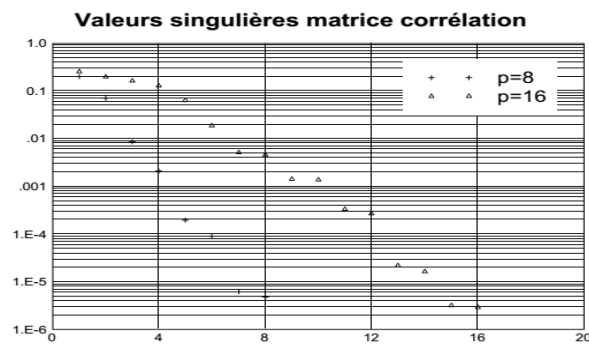


Fig.2.26– Valeurs singulières de la matrice de corrélation estimée

5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié estimation paramétrique pour un signal utilisant plusieurs méthodes paramétrique, et la technique appliquée sur ces méthodes.

Dans le chapitre suivant, nous allons présenter et discuter les résultats obtenus par ces méthodes AR d'une voix vocale telles que nous avons trouvé quelques avantages et des inconvénients d'estimation de AR

Avantage :

Levinson : R Toeplitz, faible complexité, stabilité du filtre AR.

Burg : pas de fenêtre, stabilité du filtre AR.

Morf, Marple : pas de fenêtre, meilleure résolution, biais faible.

Inconvénients :

Levinson : estimation des corrélations, fenêtrage du signal, résolution faible.

Burg : dédoublement de raies, biais sur fréquences.

Morf, Marple : stabilité non garantie.

Chapitre 3 : Résultats et Discussions

Résumé

On commence ce chapitre par la méthode AR appliqué par voix de test utilisés dans notre travail. Ensuite nous présentons les résultats obtenus par l'algorithme basé sur AR et ARMA, On termine par une étude comparative entre les différents algorithmes.

1. Introduction

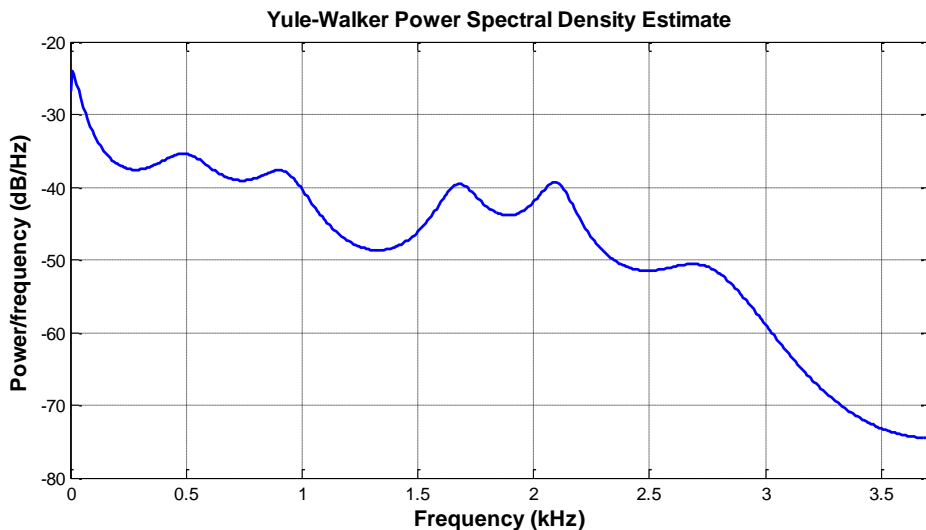
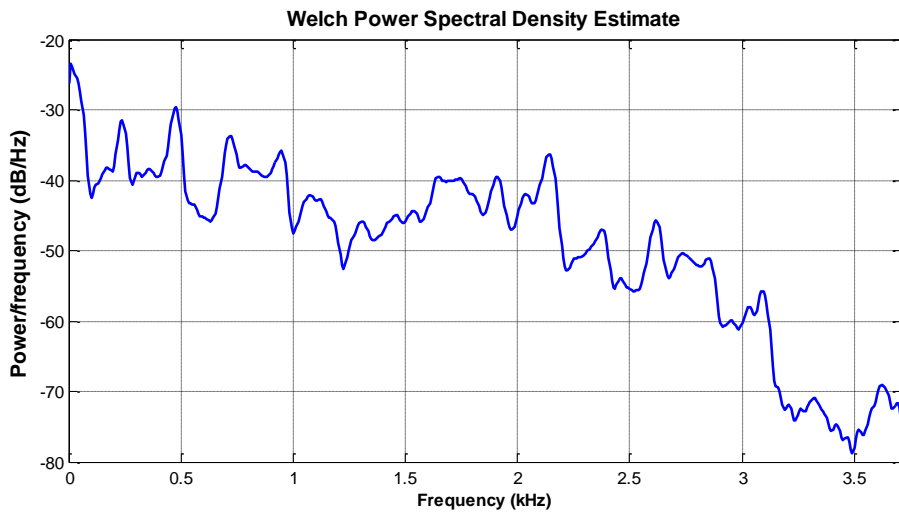
Après l'étude de l'estimation du signal paramétrique. Nous représentons dans ce chapitre les résultats obtenus par un programme qui est appliqué sur des voix vocales. Exemple voix Matlab sans bruit et un autre exemple voix vocale avec bruit de train et fréquemment utilisées dans la littérature.

Le plan de travail dans ce chapitre est organisé comme suit :

On commence par les algorithmes de Méthode AR utilisés dans notre travail (section 2) en détail quelque exemple, Ensuite la méthode ARMA. Et en étude comparative entre les différents algorithmes. On termine par une conclusion générale.

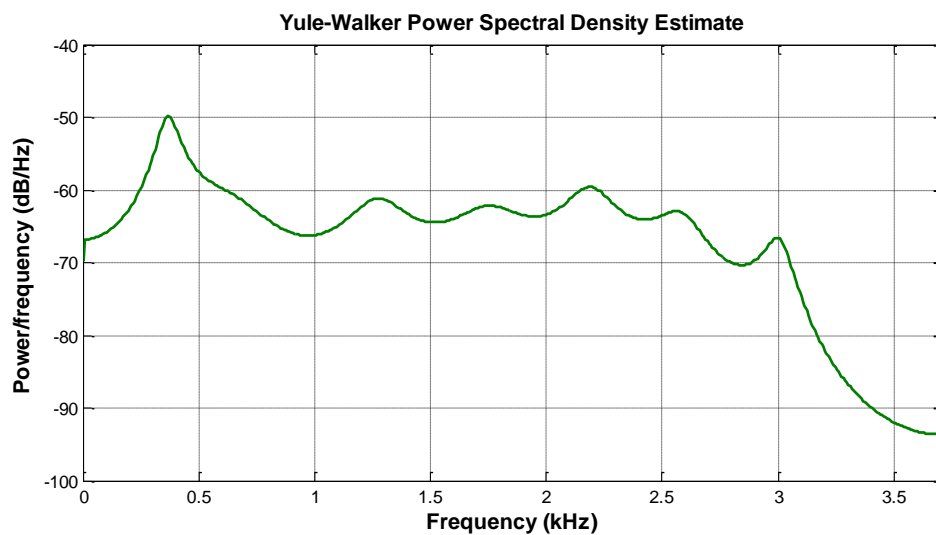
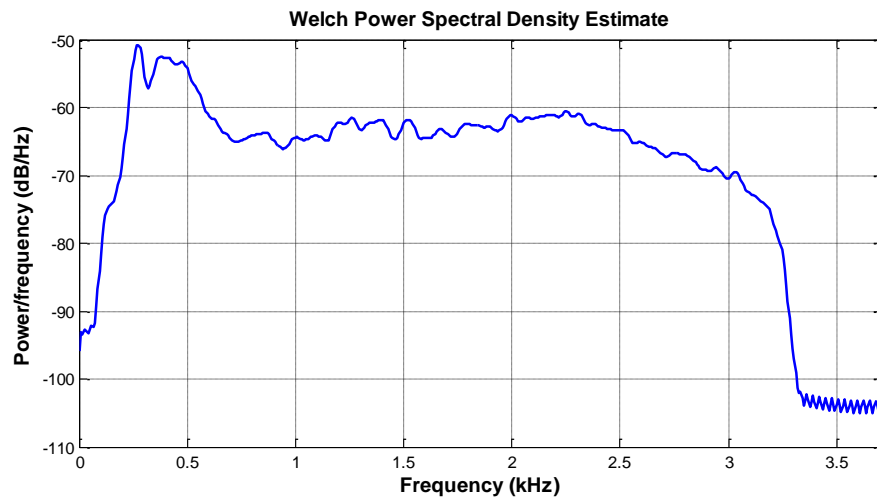
2. Méthode AR :

2.1 Méthode AR Yule-Walker : exemple avec voix vocale `mtlb` sans bruit

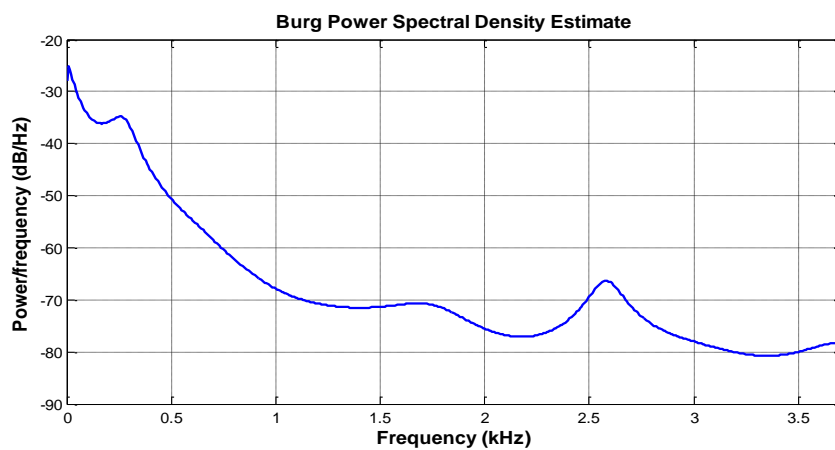


Chapitre 03 : Résultats et Discussions

Modèle AR de Yule-Walker pour voix vocal `sp01_train_sn0.wav` avec des bruits de train.

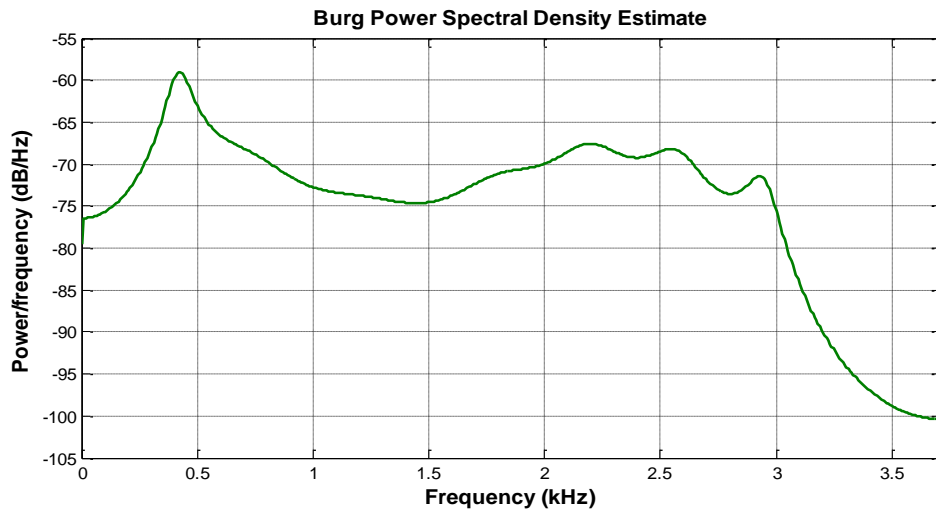


2.2 Méthode AR de Burg : exemple avec voix vocal mtlb sans bruit

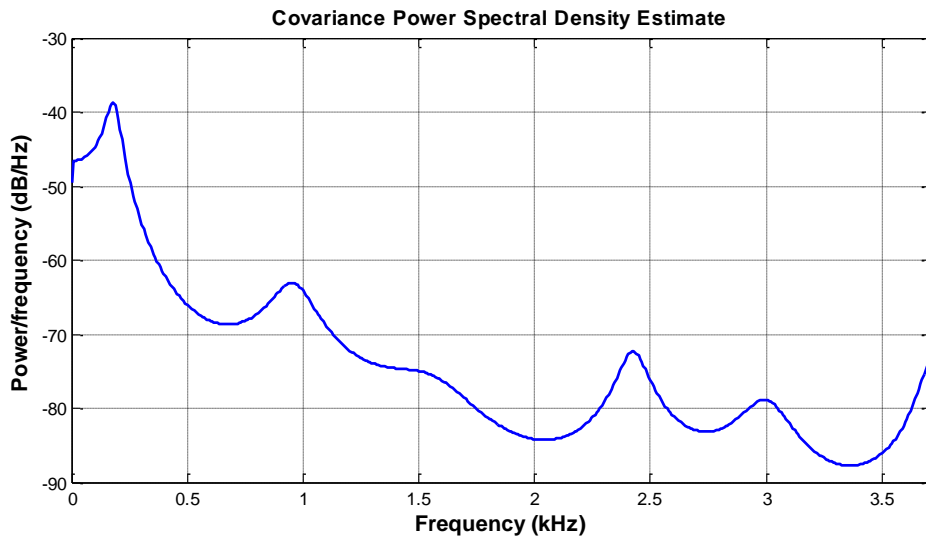


Chapitre 03 : Résultats et Discussions

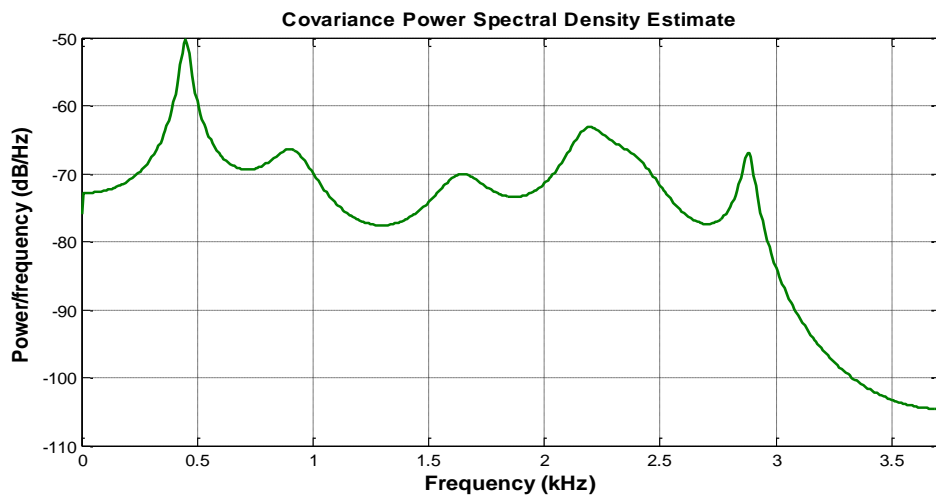
Modèle AR de Burg pour voix vocal `sp01_train_sn0.wav` avec des bruits de train.



2.3 Méthode AR de Covariance : exemple avec voix vocal mtlb sans bruit



Modèle AR de Burg pour voix vocal `sp01_train_sn0.wav` avec des bruits de train.



2.4 Quelques Exemples appliqués sur le modèle AR :

Le but de cet exemple est d'identifier un processus AR et de retrouver les paramètres du modèle AR(2) donc a_1 et a_2 .

On suppose que l'ordre du modèle est connu est égale $p=2$

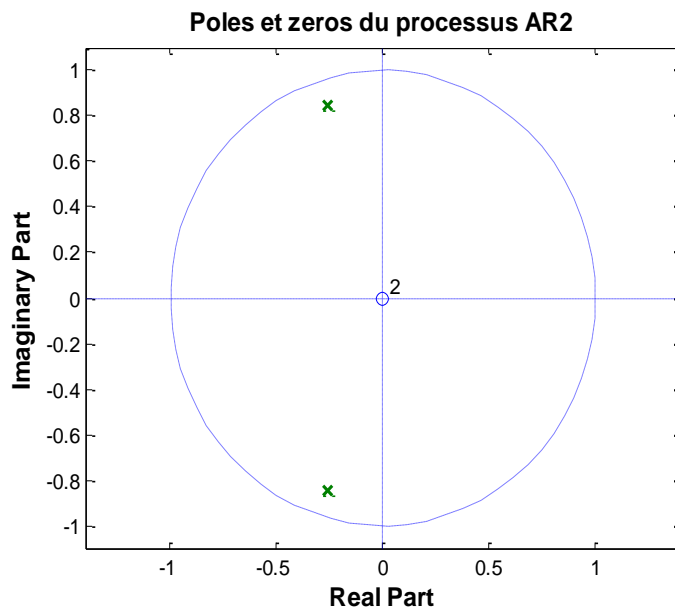
On cherche à prouver que le spectre du signal filtre est proportionnel à la fonction transfert du filtre généré par AR(2)

On génère un signal à partir du modèle AR(2) selon

$$H(Z) = 1/(1 + 0.5Z^{-1} + 0.75Z^{-2})$$

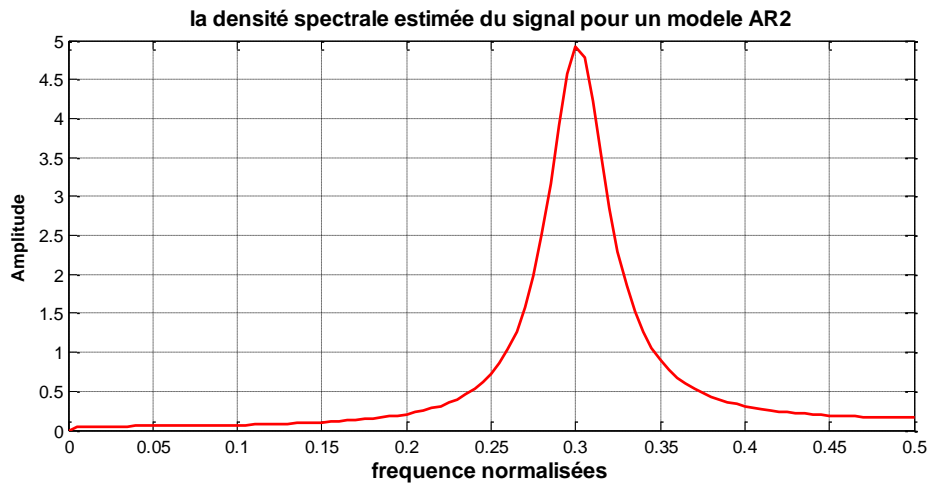
On trace ces pôles et ces zéros pour vérifier sa stabilité et puis on trace la densité spectrale du signal généré qui confirme sa proportionnalité avec la réponse spectrale du modèle pour un bruit blanc centré de variance 0.25

La figure ci-dessous représente les 2 pôles et le zéro du modèle AR2



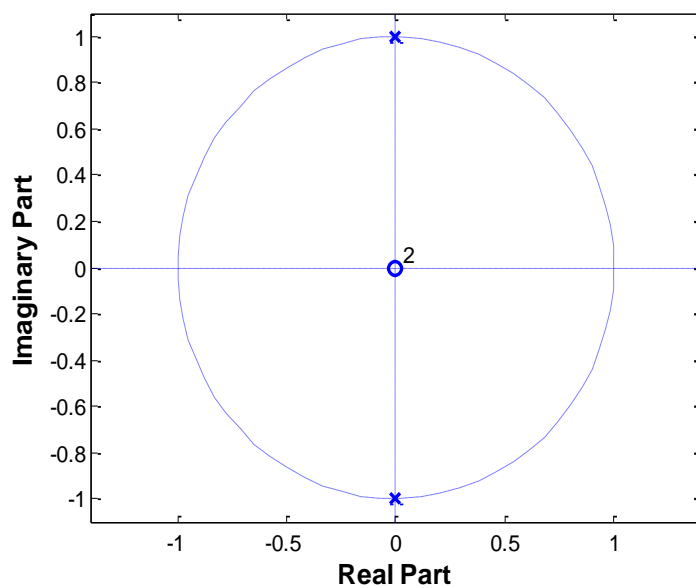
La figure ci-dessous exprime la densité spectrale du signal à partir du modèle AR2

Chapitre 03 : Résultats et Discussions



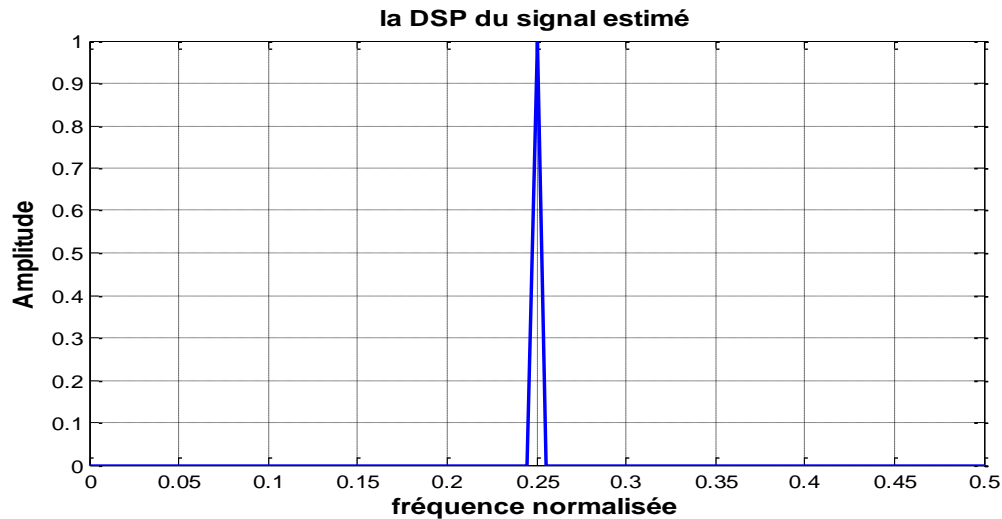
Le second exemple consiste à déterminer l'ordre p du modèle AR selon le critère AIC afin de générer un signal sinusoïdal de fréquence 50Hz, de longueur 4096 échantillonné à une fréquence de 200 Hz. Les résultats de simulation donnent :

Les pôles et le zéro du modèle avec le paramètre calculé qui est dans ce cas $p=2$ sont dans la figure suivante.



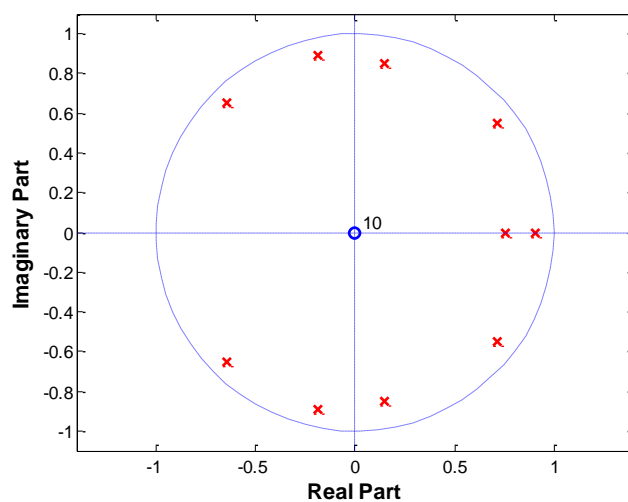
La fréquence normalisée du signal sinusoïdal est parfaitement détectée selon la figure qui représente la dsp du signal estimé selon l'ordre sélectionné par le critère AIC.

Chapitre 03 : Résultats et Discussions



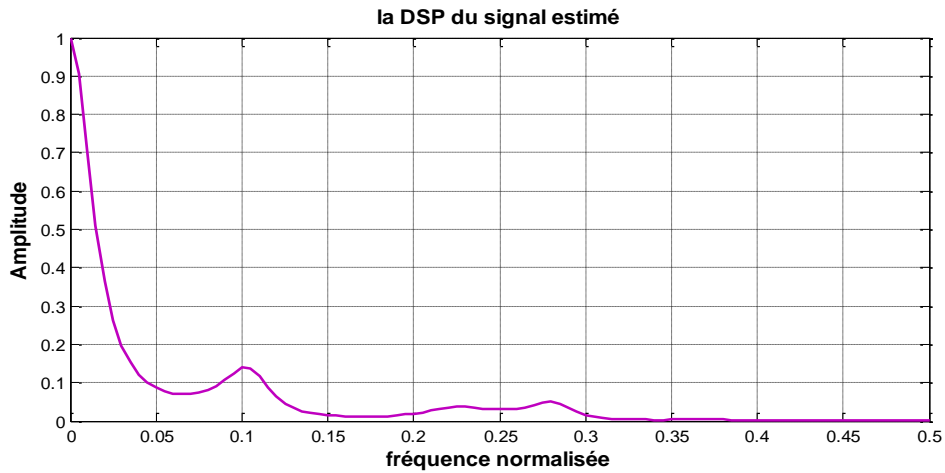
On peut appliquer d'autres techniques pour un signal multi-composantes spectrales. Soit le signal suivant qui se compose d'amplitudes unitaires et des fréquences 100Hz, 150Hz, 200Hz 375Hz et 400Hz. Dans une durée de 15ms. On lui rajoute une composante continue de 1V et un bruit gaussien. On échantillonne ce signal avec une fréquence de 1KHz

En applique cette Méthode pour un signal vocal exemple voix vocal Matlab sans bruits. La figure ci-dessous représente les 10 pôles et le zéro du modèle AR(10)



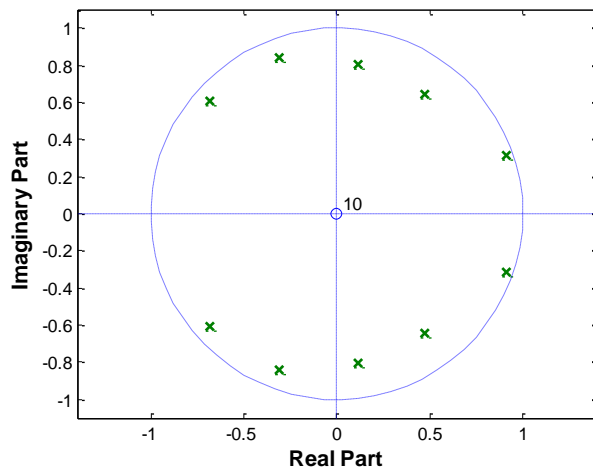
La figure ci-dessous exprime la densité spectrale du signal à partir du modèle AR pour voix vocal Matlab :

Chapitre 03 : Résultats et Discussions

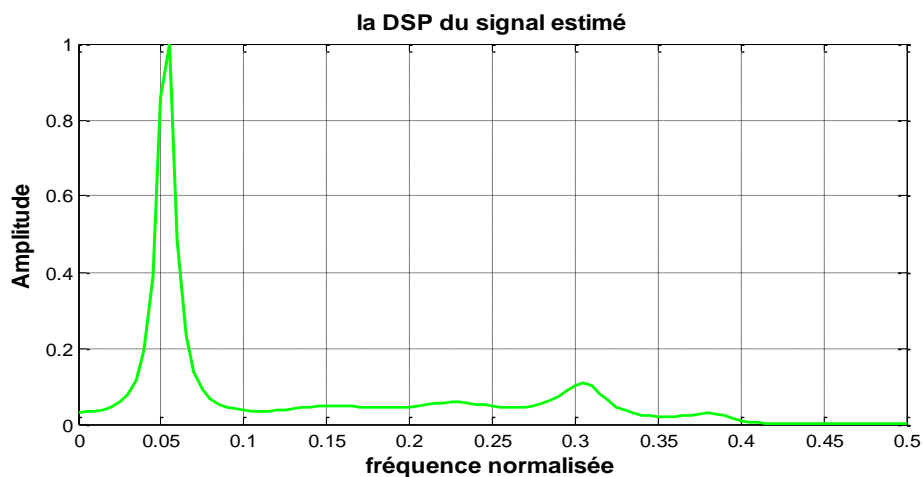


En applique la Méthode AR pour un signal vocal exemple voix vocal `sp01_train_sn0.wav` avec des bruits de train.

La figure ci-dessous représente les 10 pôles et le zéro du modèle AR(10)

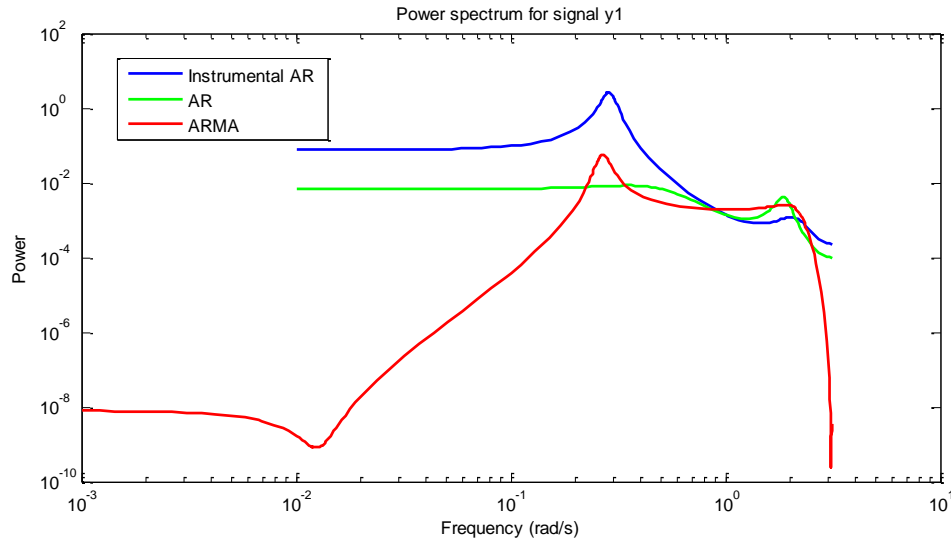


La figure ci-dessous exprime la densité spectrale du signal à partir du modèle AR pour voix vocal `sp01_train_sn0.wav`



3. Méthode ARMA

Ce résultat de comparaison entre la Méthode ARMA et AR appliqué sur la voix vocal `sp01_train_sn0.wav` avec bruits de trains



On calcule le nombre des échantillons et la résolution spectrale pour cette durée observée.

On procède à l'analyse spectrale par transformée de Fourier et par l'algorithme de MUSIC en utilisant 100 fois plus le nombre de points de calcul par rapport au nombre des échantillons et pour un rapport RSB supérieur (exemple=100). Pour la transformée de Fourier on utilise les fenêtres de rectangulaire, Bartlett et Blackman.

On considère le même signal contenant cinq composantes spectrales de fréquences : 100Hz, 150Hz, 200Hz, 350Hz et 400Hz. Appliquer l'analyse spectrale de Fourier, MUSIC, ROOT-MUSIC et ESPRIT pour deux RSB=100dB et RSB=30dB.

on fait une étude statistique sur l'estimation d'une seule composante spectrale du signal pour la fréquence 250Hz avec les différentes méthodes étudiées précédemment en considérant que le RSB varie de 0dB à 30 dB et on va tracer la variation de la variance de chaque estimée obtenue sur 1000 échantillons.

La solution de ces problèmes se résume comme suit :

Le nombre d'échantillons et résolution spectrale qui correspondent à la durée observée sont donc :

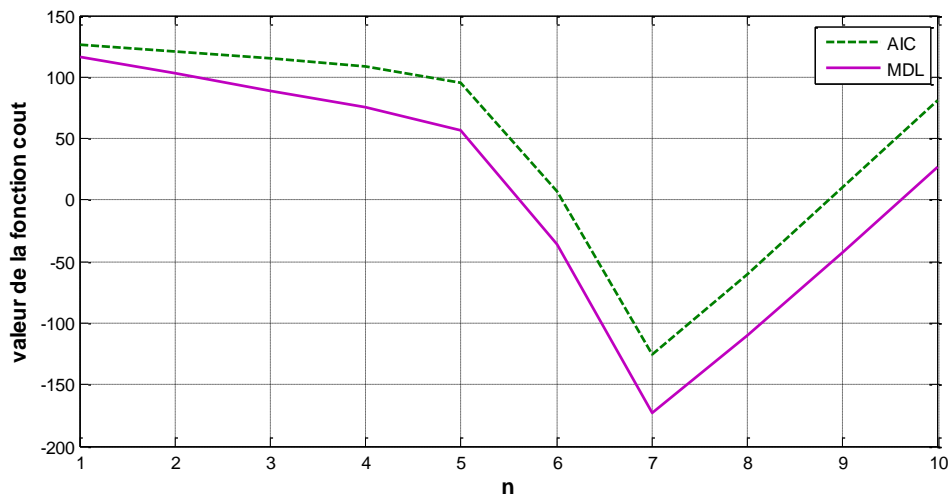
$$N_s = 1 + [T_{obs} * F_s] = 1 + [0.015 * 1000] = 16$$

$$\Delta F = 1 / T_{obs} = 1 / 0.015 = 66.66 \text{ Hz}$$

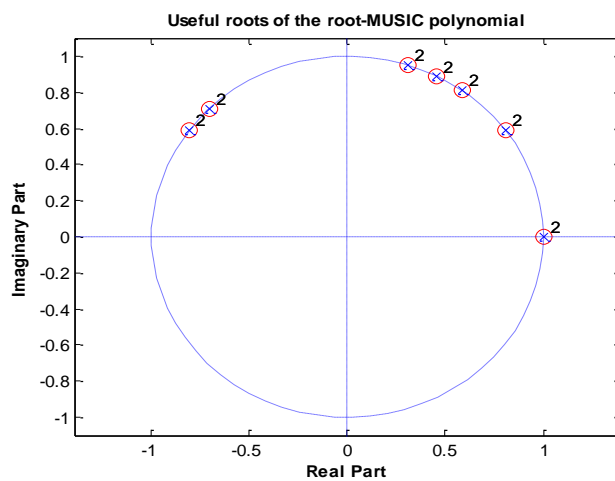
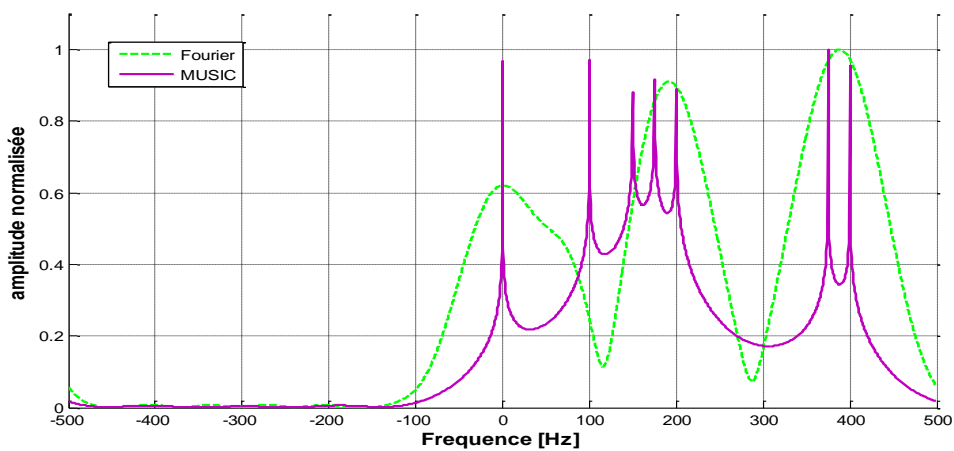
Chapitre 03 : Résultats et Discussions

Par conséquent, la plupart des écarts de fréquence entre les composantes spectrales du signal sont moins de ΔF

Les résultats présentent la variation des fonctions couts AIC et MDL somme suit



La deuxième figure présente l'apport de la méthode MUSIC par rapport à la transformée de Fourier dans l'estimation des composantes spectrales.



Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons étudié estimation paramétrique d'un signal vocal, et nous avons effectué une étude comparative entre les techniques. Les résultats obtenus par ces méthodes sont acceptable pour estimer une voix vocale. Dans ce contexte on a aussi étudié les méthodes existant les paramètres d'un model AR (p, q).

En perspectives, nous proposons d'utiliser deux filtres Kalman interactif fonctionnement en parallèle pour développer les paramètres AR d'estimation.

D'autre part, d'étude future dans le contexte d'analyse de signaux biomédical par exemple, plus généralement d'utilisation de telles méthodes dans le contexte de modélisation stochastique reste un sujet ouvert qui pourrais conduire à des approche de traitement signal plus fidèles.

Références bibliographiques

- [1] D. Labarre, " Du filtrage de Kalman aux technique H_∞ et particulaires application au traitement du signal de parole et à l'analyse de signaux biomédicaux ", thèse de doctorat, Université de Bordaux I, 09 décembre 2005.
- [2] Sondes abdelmouleh, généralités sur les signaux ,cours traitement de signal
- [3] T.Dumartin, Rappels Traitement du Signal, Licence Professionnel Optronique,2004-2005.
- [4] Christian juttén, Théorie du signal, Université Joseph Fourier - Polytech' Grenoble, 2009.
- [5] F. DE COULOUN, théorie et traitement des signaux, école polytechnique fédérale de lausanne, volume 7, 1996.
- [6] M. KUNT, Traitement Numérique des Signaux, Presse Polytechniques Romandes, 1984. A. Oppenheim and R. Shafer, Digital Signal Processing, Prentice Hall, 1975
- [7] H. MEYR, M. MOENECLAY and SA.Fechtel, Digital Communication Receiver: Synchronization, channel estimation and Signal Processing, Wiley, 1998.
- [8] U. MENGALI and AN .d' ANREA, Synchronization Techniques for Digital Receivers, Plenum Press, 1997.
- [9] René Boite,Hervé Bourlard,Thierry Dutoit ,Joel Hancq et Henri Leich , traitement de la parole ,edition 2000.
- [10] R.S. Bucy, "Identification and filtering", Math. Systems Theory, Vol. 16, 1983, pp. 307-317.
- [11] G. Alengrin and J. Zerubia, "A method to estimate the parameters of an ARMA model", IEEE Trans. Automat. Control, Vol. 32, No. 12, December 1987, pp. 1113-1117.
- [12] G. Alengrin, R.S. Bucy, J. Moura, J. Pages and I. Ribeiro, "ARMA identification", J. Opt. Theory Appl., Vol. 55, No. 3, December 1987, pp. 345-357.
- [13] G. Alengrin and J. Zerubia, "'Estimation of ARMA parameters and Kalman filtering". IFAC Identification '88 Symposium, Beijing, P.R. China, 27-31 August 1988.
- [14] G. Favier and G. Alengrin, "Algorithmes de filtrage rapide. Application l'identification des paramètres statistiques d'un module ARMA", Proc. GRETSI Conf., Nice, France, 28 May-2 June 1979, pp. 72/1-72/9.

- [15] Y. GRENIER, Estimation simultanée AR et MA d'un modèle non stationnaire, Colloque GRETSI sur le Traitement du signal et ses Applications, Nice, 1985-a, p. 41-45.
- [16] Welch, P.D. "The Use of Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra: A Method Based on Time Averaging Over Short, Modified Periodograms." IEEE Trans. Audio Electroacoust. Vol. AU-15 (June 1967). Pgs.70-73.
- [17] Kay, S.M. Modern Spectral Estimation. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1988.
- [18] Proakis, J.G., and D.G. Manolakis. Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1996.
- [19] Marple, S.L. Digital Spectral Analysis. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1987.
- [20] Ljung, L. System Identification: Theory for the User, Upper Saddle River, NJ, Prentice-Hal PTR, 1999.
- [21] J. Cadzow, "Spectral estimation: An overdetermined rational model equation approach", Proc. IEEE, Vol. 70, September 1982, pp. 907-939.
- [22] D. Gingras, "Asymptotic properties of high order Yule-Walker estimates of the AR parameters of an ARMA time series", IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., Vol. 33, No. 4, October 1985, pp. 1095-1101.
- [23] S. Li, and B.W. Dickinson, "An efficient method to compute consistent estimates of the AR parameters of an ARMA model", IEEE Trans. Automat. Control, Vol. 31, No. 3, March 1986, pp. 275-278.
- [24] J. Moura and I. Ribeiro, "Linear estimation of ARMA processes", IEEE 4th Workshop on Spectrum Estimation and Modeling, Minneapolis, USA, 3-5 August 1988.
- [25] R. A . GABEL, R . A . ROBERTS, Signais and linear systems, New York, John Wiley, 1980.
- [26] J. Zerubia, G. Alengrin and H. Rix, "Performance evaluation of an ARMA estimator", Proc. Internat. Conf. Acoust. Speech Signal Process., New York, USA, 11-14 April 1988.
- [27] Proakis, J.G., and D.G. Manolakis. Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1996.

- [28] J. P. Burg, A new analysis technique for time-series data, NATO Adv. Study Inst. on Sig. Proc. with emphasis on Underwater Acoustics, 1968.