

■13.3068 ■13.3168

■4.472 ■4.572

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Khider-Biskra
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la vie
Département : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques

N° d'ordre :

THESE

Présentée Pour l'obtention du Diplôme de Doctorat en Mathématique

Recherche de l'opérateur de Green pour quelques problèmes de physique mathématiques par la méthode des perturbations

Par

Brahim Benali

devant le jury composé de :

- | | | |
|----------------|------------|------------------------------|
| - A. Necir | Président | Pr. (Université de Biskra) |
| - A. Zerarka | Examineur | Pr. (Université de Biskra) |
| - A. Mansour | Examineur | MCA. (Université de El-Oued) |
| - D. Meraghni | Examineur | Pr. (Université de Biskra) |
| - D. A. Chacha | Examineur | Pr. (Université de Ouargla) |
| - M.T. Meftah, | Rapporteur | Pr. (Université de Ouargla) |

–2015–

Remerciements et Dédicace

J'exprime toute ma gratitude au Professeur Med Tayeb Meftah, pour m'avoir proposé ce sujet, en me permettant d'aller à terme de cette thèse dans d'excellentes conditions et pour avoir patiemment dirigé mes travaux ; ainsi, son expérience, ses connaissances et son savoir-faire m'ont été d'une très grande utilité.

Je remercie également tous les membres du jury d'avoir accepté de lire et d'évaluer ce travail à savoir : Mr.A. Mansour, Mc à l'université de *El-Oued*, Mr.D. A. Chacha, Professeur à l'université de *Ouargla*, et Mrs : D. Meraghni, A. Necir et A. Zerarka Professeurs à l'université de *Biskra*.

Je remercie chaleureusement mes enseignants et mes collègues qui m'ont aidé et conseillé à un moment ou à un autre pour finir ce travail.

Enfin, je remercie ma famille, pour leurs soutien et leurs encouragements.

Table des matières

I	METHODE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES	5
1	FONCTION DE GREEN DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINAIRES	8
1.1	Théorie des équations différentielles d'ordre n :	9
1.1.1	Construction de la fonction de Green :	11
1.2	Equations différentielles linéaires du 2^{eme} ordre	12
1.2.1	Construction de la fonction de Green pour les équations différentielles du second ordre	23
2	APPLICATIONS AU CALCUL DE LA FONCTION DE GREEN	25
2.1	Potentiel saut de Heaviside ($D=1$)	25
2.2	Potentiel sur le disque ($D=2$)	30
2.2.1	Le cas $0 < E < V_0$	34
2.2.2	Le puits de potentiel ($D=2$)	35
2.3	Potentiel sur une sphère molle ($D=3$)	38
2.3.1	Le cas $0 < V_0 < E$	38
2.3.2	Le cas $0 < E < V_0$	45
2.3.3	Le puits sphérique ($V_0 < 0$)	51
II	METHODE DES EQ. INTEG. ET PERTURBATIONS	55

3	LA METHODE DES PERTURBATIONS EN MECANIQUE QUANTIQUE	58
3.1	Développement des termes de la série de perturbation	59
3.2	Evaluation et interprétation des termes	60
3.3	Les équations intégrales	64
3.4	Développement de la fonction d'onde	65
3.5	Théorie des perturbations et diagrammes de Feynman	66
4	METHODE DE RESOLUTION UTILISANT LES FONCTIONS ANALYTIQUES ET LES FONCTIONS SECTIONNELLEMENT ANALYTIQUES	70
4.1	Les fonctions analytiques	71
4.2	Méthode de Wiener-Hopf	71
4.3	Les fonctions sectionnellement analytiques	80
4.3.1	Les fonctions sectionnellement analytiques (s.analytiques) : . . .	80
4.3.2	Problème de Hilbert	84
5	APPLICATIONS	97
5.1	La fonction de Green pour le potentiel de Heaviside	97
5.1.1	Solution par la méthode directe :	97
5.1.2	Méthode des perturbations :	102
5.2	Les problèmes à deux dimensions	110
5.2.1	Méthode directe du problème d'une barrière finie :	110
5.2.2	Méthode directe du problème d'un puits fini ($-V_0$ sur un disque) :	118
5.2.3	Problème d'un puits infini :	122
6	CONCLUSION ET PRESPECTIVES	125

Introduction générale

Georges Green (1793-1841), mathématicien anglais, né et mort à Sneinton (près de Nottingham). A travers une recherche effectuée sur la formulation mathématique de la théorie de l'électricité et du magnétisme, Green fut considéré comme l'initiateur à l'introduction de la théorie du potentiel. Boulanger de métier, il s'initia seul aux mathématiques, principalement en lisant les travaux de Poisson, ce qui explique l'originalité de son approche des phénomènes physiques. À l'âge de quarante ans, il entra à l'université de Cambridge, où il soutient sa thèse en 1837.

En 1828, Green publia un travail intitulé "An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism", qui passa inaperçu du monde mathématique jusqu'à sa réédition par Lord Kelvin en 1846 dans le "Journal für Mathematik". On y trouve la formule de Green, ainsi que la fonction de Green (ainsi dénommée par Riemann) qui est devenue un des concepts fondamentaux de la théorie des équations aux dérivées partielles. En 1832 et 1833, Green publia des articles sur les lois de l'équilibre des fluides, sur les lois de l'attraction dans un espace n -dimensionnel où il a introduit les fonctions appelées en nos jours les fonctions ultrasphériques et a utilisé pour la première fois le principe de Dirichlet.

On appelle fonction de Green en physique ce que les mathématiciens appellent aujourd'hui la solution élémentaire ou fondamentale d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, ou d'une équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants.

Ces « fonctions » de Green, qui sont le plus souvent des distributions, ont été introduites, comme on vient de le dire, par Green en 1828 pour les besoins de l'électromagnétisme. Elles ont été utilisées ensuite par Neumann en 1877 pour la théorie du potentiel Newtonien dans un espace à deux dimensions, puis en 1882 par Kirchhoff pour l'équation de propagation des ondes dans un espace à trois dimensions, et enfin par Helmholtz en acoustique.

Par la suite, elles sont devenues un outil puissant en théorie quantique des champs

après que Feynman les a popularisées en 1948 sous le nom de propagateur dans sa formulation en intégrale de chemin de l'électrodynamique quantique.

Les fonctions de Green jouent alors un rôle important dans la solution de nombreux problèmes dans la mécanique quantique et de la théorie de l'état du corps solide. La méthode de la fonction de Green se situe donc au cœur de nombreuses techniques analytiques et numériques telles que les méthodes singulières des équations intégrales, les méthodes des éléments finis, etc...

En général, le terme "fonction de Green" se réfère à une fonction, associée à un problème aux limites bien déterminé. Dans ce sens, des milliers d'articles ont été publiés dans un large éventail de revues utilisant la méthode de la fonction de Green : en physique théorique et en mathématiques appliquées. Cependant, parmi ces articles, peu ont fait l'objet d'un calcul analytique exact sans recours aux calculs numériques et aux approximations.

Puisque, la plupart des problèmes pratiques ne peuvent pas être traités exactement, il est nécessaire de développer des techniques d'approximations qui nous conduisent de s'approcher au mieux du résultat exact avec une préalable précision. La technique d'approximation la plus importante et habituelle pour résoudre les problèmes en mécanique quantique et la théorie des perturbations dans le formalisme de Schrödinger. Elle nous offre une méthode efficace pour calculer les solutions approximatives de nombreux problèmes qui ne peuvent pas être résolus en utilisant exactement l'équation de Schrödinger. Comme dans la mécanique quantique standard, la méthode des perturbations peut être développée aussi dans le cadre de l'intégrale du chemin de la mécanique quantique.

Depuis 1970, le développement perturbatif de l'intégrale de chemin a été utilisé pour donner les fonctions de Green exactes du potentiel fonction-delta, du potentiel de Coulomb non-relativiste et de quelques problèmes non relativistes avec conditions aux limites. Aussi l'approche de perturbation a été utilisée avec succès pour dériver la fonction de Green pour le potentiel du carré inverse.

Dans cette thèse, nous allons commencer d'abord par apporter quelques nouveaux

résultats relatifs au calcul des fonctions de Green construites directement à partir des équations différentielles décrivant quelques problèmes de mécanique quantique. Puis en deuxième lieu, nous allons ajouter quelques contributions de la technique des perturbations dans le formalisme de l'intégrale de chemin.

Au passage rappelons quelques travaux qui sont étroitement liés à notre sujet. Certains ont traité le problème de Kirchhoff-Poisson de la plaque circulaire mince. Le bord de la plaque étant supposée de telle sorte que les valeurs limites sont égales à zéro. La fonction de Green est également étudiée dans le problème du domaine annulaire circulaire. La fonction de Green a été également étudiée pour le domaine elliptique. Le problème quantique relatif à la dispersion en deux dimensions a été également traité.

Dans notre travail, nous avons reporté plusieurs résultats relatifs au calcul de la fonction de Green pour les problèmes des potentiels continus par morseaux, avec de nouvelles conditions aux limites, qu'on rencontre en physique quantique : le potentiel saut de Heaviside en $D=1$, le potentiel saut (et puits) sur un disque en $D=2$ puis le potentiel sur la sphère (états liés et de diffusion) en $D=3$. En mécanique quantique, si le potentiel est constant dans un domaine et est égale à zéro à l'extérieur (ou vice versa), la solution de l'équation de Schrödinger et la dérivée de la solution sont continues sur la frontière. Spécifions encore nos problèmes : l'équation de Schrödinger, prend deux formes différentes selon que l'on est à l'intérieur ou à l'extérieur du domaine. Ce type de problème correspond à la mécanique quantique pour l'étude d'une particule soumise à un potentiel qui est une constante à l'intérieur du domaine et est égale à zéro à l'extérieur.

Ainsi notre travail se compose de deux parties. Une première partie consacrée aux équations différentielles dans laquelle nous présentons : la théorie générale des équations différentielles ordinaires, la construction des fonctions de Green pour ce type d'équations différentielles, puis quelques applications aux potentiels de Heaviside, le potentiel sur un disque et le potentiel sphérique. En seconde partie, nous présentons la technique des perturbations avec la théorie des équations intégrales associées. Nous avons utilisé cette technique pour calculer la fonction de Green pour la sphère dure et le puits infini à deux

dimensions.

En explicitant : dans le premier chapitre nous présentons la théorie générale des équations différentielles ordinaires d'ordre n , la construction de la fonction de Green pour ce type d'équations, la construction de la fonction de Green pour les équations différentielles du second ordre puis on s'intéresse à la fonction de Green pour les cas importants en physique relative aux opérateurs auto-adjoints.

Au second chapitre, intitulé "application au calcul de la fonction de Green", nous présentons le calcul de la fonction de Green relative au problème du potentiel de Heaviside, du potentiel barrière finie à deux dimensions, du potentiel puits fini et enfin une application du potentiel sphérique.

Au troisième chapitre, nous avons présenté la méthode de la théorie des perturbations adaptée à la mécanique quantique en présentant une interprétation physique aux termes de la série de perturbation. Nous avons présenté également le rôle du propagateur de Feynmann et sa relation avec la fonction de Green ainsi qu'avec la fonction d'onde, solution de l'équation de Schrödinger, et nous avons terminé ce chapitre par l'élaboration de l'équation intégrale gouvernant la fonction de Green. Il s'avère que cette équation appartient au problème de Wiener-Hopf de deuxième espèce.

Au quatrième chapitre, nous avons développé la théorie des fonctions sectionnellement analytiques qui a été d'abord appliquée aux problèmes de Hilbert avec succès puis nous l'avons appliquée pour la résolution de notre problème de Wiener-Hopf.

Au cinquième chapitre, nous avons construit la série des perturbations et calculé ses termes moyennant la théorie développée au chapitre 3. Nous avons trouvé que les termes successifs de la série sont reliés par une formule intégrale que nous avons pu résoudre et sommer la série pour ainsi construire la solution de Green pour trois types de potentiels à deux dimensions : le problème d'une barrière finie, le problème d'un puits fini et le problème d'un puits infini.

Nous avons clôturé ce travail par une conclusion et des perspectives.

Première partie

**METHODE DES EQUATIONS
DIFFERENTIELLES**

Introduction

Les fonctions de Green fournissent une méthode générale pour résoudre les équations différentielles soumises à des conditions aux limites appropriées. Elles sont largement utilisées en mécanique quantique. Nous rencontrons souvent, dans divers domaines des mathématiques, de la physique et l'ingénierie, les termes utilisés : «résolutive», «noyau résolvant», "fonction de signal", "fonction de réponse du point", ou "fonction de transfert". Ce ne sont que les fonctions de Green dans la définition généralisée. Quand on se rappelle que de nombreux problèmes en physique théorique et physique appliquée en fin de compte réduire de trouver la sortie pour une entrée donnée, on peut comprendre pourquoi les fonctions de Green sont aujourd'hui très populaires dans de nombreux domaines - l'hydrodynamique, l'électrodynamique, l'acoustique, l'élasticité, la mécanique quantique, à l'état solide de la physique, la physique des particules élémentaires, et ainsi de suite. Leur utilité est encore en croissance progressive aujourd'hui, comme diverses techniques numériques continuent à se développer pour les calculs impliquant des fonctions de Green. Aussi, nous avons remarqué qu'il ya généralement plusieurs fonctions de Green associées à la même équation. Ces différentes fonctions sont distinguées l'une de l'autre par les conditions aux limites. Il est donc important, lors du calcul de la fonction de Green de l'équation différentielle linéaire de spécifier les conditions aux limites. Avant d'attaquer notre problème concernant le calcul de la fonction de Green, inclure des travaux qui sont étroitement liés à notre problème. Dans l'article [48], l'auteur traite le problème à deux dimensions d'une mince circulaire Kirchhoff Poisson-plaque. La fonction de Green est également étudié dans [1, 6] en deux dimensions pour un potentiel continu par morceaux. Dans les articles [16],[40],[47],[49],[37],[38],[60] la fonction de Green a été étudié pour le domaine elliptique. Le problème quantique par rapport à la diffusion en deux dimensions a également été traitée dans les articles [2],[5],[19],[54], mais dans ce travail, le problème dû traiter le comportement asymptotique des solutions. Les articles [36],[39],[42] [51],[59],[64] ont traité le problème de la fonction de Green[49, 35], mais dans le contexte de rapprochement. Aucun de ces ouvrages cités, et aucun de nos

connaissances, La fonction de Green pour un potentiel continu par morceaux ont été calculés en trois dimensions.

Dans le premier chapitre nous présentons la théorie générale [62] des équations différentielles ordinaires d'ordre n , la construction de la fonction de Green [35] pour ce type d'équations, la construction de la fonction de Green pour les équations différentielles du second ordre, quelque notion sur les fonctions de Bessel [61], puis on s'intéresse à la fonction de Green pour les cas importants en physique relative aux opérateurs auto-adjoints [52].

Au second chapitre, intitulé "application au calcul de la fonction de Green", nous présentons le calcul de la fonction de Green relative au problème du potentiel de Heaviside, du potentiel barrière finie à deux dimensions, du potentiel puits fini et enfin une application du potentiel sphérique. Les conditions aux limites choisies sont utiles en mécanique quantique dans les problèmes de diffusion et aussi pour les états liés. En mécanique quantique, si le potentiel est constant à l'intérieur d'un domaine et est égal à zéro à l'extérieur (ou vice versa), la solution de l'équation de Schrödinger et la dérivée de la solution sont continues sur la frontière du domaine. Ce type de problème correspond à la mécanique quantique pour l'étude d'une particule est soumise à un potentiel qui est une constante positive à l'intérieur du domaine et est égal à zéro à l'extérieur.

Chapitre 1

FONCTION DE GREEN DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINAIRES

Dans de nombreuses applications, la dynamique d'un système peut être modélisée par des équations différentielles ordinaires [8, 32]. Par exemple, on rencontre ces applications en mécanique [17] (en utilisant la loi de Newton), en astronomie (le mouvement des planètes ou celui des galaxies), en dynamique atomique et moléculaire, en chimie des réactions chimiques, en électronique des circuits intégrés, en biologie, au développement de populations, etc.... Il est bien connu que la théorie des équations différentielles est intimement liée à la théorie des opérateurs [65]. Dans ce chapitre nous allons présenter quelques rappels sur la théorie générale [62] des équations différentielles ordinaires d'ordre n , puis la théorie des équations différentielles ordinaires du second ordre. Nous avons mis également l'accent sur la construction des fonctions de Green associées à ces équations différentielles. Ce chapitre constitue alors la base des applications que nous allons présenter au deuxième chapitre. Avant d'entamer ce chapitre rappelons que l'ensemble des définitions et théorèmes sont inspirés de [8, 32].

1.1 Théorie des équations différentielles d'ordre n :

Une équation différentielle ordinaire est donnée par une relation de la forme :

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(m)}) = 0 \quad (1.1)$$

où $x \in \mathfrak{R}$ et $y, y', y'', \dots, y^{(m)} \in \mathfrak{R}^n$. La fonction F est définie dans un ouvert de $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^{n(m+1)}$. On dit que l'équation différentielle est d'ordre m , ou m est l'ordre de dérivations la plus élevée qui apparaît dans l'équation. Une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathfrak{R}^n$ (où I est un intervalle dans \mathfrak{R}) est une solution de (1.1), si elle est de classe C^m et si

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(m)}(x)) = 0, \quad \text{pour tout } x \in I \quad (1.2)$$

Pour une équation différentielle de la forme (1.1), il est en général très difficile d'obtenir des résultats sur l'existence ou l'unicité de la solution. Nous allons donc nous restreindre à la situation où l'équation peut être résolue par rapport à la dérivée d'ordre m , $y^{(m)}$. Nous écrivons alors

$$y^{(m)} = g(x, y, y', y'', \dots, y^{(m-1)}) \quad (1.3)$$

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases} \quad (1.4)$$

et l'ensemble

$$A = \{(x, y) \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^m, |x - x_0| \leq a, \|y - y_0\| \leq b\} \quad (1.5)$$

Theorem 1 : *Soit*

$$f : A \rightarrow \mathfrak{R}^m$$

si f est une fonction continue et Lipchitzienne, alors le problème de Cauchy admet une solution unique sur

$$I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \quad \text{où } \alpha = \min(a, b/M) \quad \text{et} \quad M = \max_{(x,y) \in A} \|f(x, y)\| \quad (1.6)$$

L'équation différentielle linéaire :

Definition 2 : Une équation différentielle d'ordre m est dite linéaire si elle est de la forme

$$p_0(x) \frac{d^m y}{dx^m} + p_1(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + p_{m-1}(x) \frac{dy}{dx} + p_m(x) y = g(x) \quad (1.7)$$

où les fonctions réelles p_0 ($p_0 \neq 0$), p_1, \dots, p_{m-1}, p_m et g sont continues sur l'intervalle ouvert I .

D'autre par l'équation (1.7) s'écrit

$$L[y] \equiv p_0(x) \frac{d^m y}{dx^m} + p_1(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + p_{m-1}(x) \frac{dy}{dx} + p_m(x) y = g(x) \quad (1.8)$$

où L est l'opérateur linéaire d'ordre m défini par l'équation (1.8). Pour obtenir une solution unique de (1.8), il est nécessaire de donner m conditions initiales

$$y_0 = y(x_0), y'_0 = y'(x_0), y''_0 = y''(x_0), \dots, y_0^{(m-1)} = y^{(m-1)}(x_0) \quad \text{ou } x_0 \in I \quad (1.9)$$

Theorem 3 : Si les fonctions $p_0, p_1, \dots, p_{m-1}, p_m$ et g sont continues sur l'intervalle ouvert I , l'équation (1.8) admet une solution unique $y = \phi(x)$ satisfaisant les conditions initiales (1.9).

Theorem 4 : Soit l'équation différentielle homogène

$$L[y] \equiv p_0(x) \frac{d^m y}{dx^m} + p_1(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + p_{m-1}(x) \frac{dy}{dx} + p_m(x) y = 0 \quad (1.10)$$

si les fonctions $p_0, p_1, \dots, p_{m-1}, p_m$ sont continues sur l'intervalle ouvert I , si les fonctions $y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_m$ sont des solutions de l'équation (1.10) et si la Wronskien $W(y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_m) \neq$

0 pour au moins un point de I , alors toute solution de l'équation (1.10) peut être exprimée comme une combinaison linéaire des solutions $y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_m$.

1.1.1 Construction de la fonction de Green :

Les fonctions de Green interviennent dans la résolution de certaines équations différentielles. On considère ici le cas particulièrement important pour la physique, d'équations différentielles du second ordre et on commence par des équations différentielles aux dérivées ordinaires.

La forme générale : Soit l'équation différentielle d'ordre m

$$L(y) = p_0(x)y^{(m)} + p_1(x)y^{(m-1)} + \dots + p_{m-1}(x)y' + p_m(x)y = 0 \quad (1.11)$$

où les fonctions $p_0(x), p_1(x), \dots, p_m(x)$ sont continues sur $[a, b]$, $p_0(x) \neq 0$, sur $[a, b]$ avec les conditions aux limites

$$V_k(y) = \alpha y(a) + \alpha^{(1)}y'(a) + \dots + \alpha^{(m-1)}y^{(m-1)}(a) + \beta y(b) +$$

$$\beta^{(1)}y'(b) + \dots + \beta^{(m-1)}y^{(m-1)}(b) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (1.12)$$

Les formes linéaires V_1, \dots, V_{m-1} , en fonction de $y(a), y'(a), \dots, y^{(m-1)}(a), y(b), y'(b), \dots, y^{(m-1)}(b)$ étant linéairement indépendantes. Supposons que le problème aux limites homogène (1.11) - (1.12) admet la seule solution triviale $y(x) \equiv 0$.

Definition 5 : On appelle fonction de Green (ou fonction d'influence) du problème aux limites (1.11) - (1.12) la fonction $G(x, \zeta)$ construite pour tout point ζ , $a < \zeta < b$

Les propriétés de la fonction de Green : Cette fonction jouit des quatre propriétés suivantes :

1/ $G(x, \zeta)$ est continue et possède des dérivées continues par rapport à x jusqu'à l'ordre $(m - 2)$ inclu pour $a \leq x \leq b$.

2/ Sa $(m - 1)$ -ième dérivée par rapport à x présente au point $x = \zeta$ une discontinuité de première espèce, le saut ayant la valeur $\frac{1}{p_0(x)}$, i.e

$$\frac{\partial^{m-1}G}{\partial x^{m-1}}(\zeta_+, \zeta) - \frac{\partial^{m-1}G}{\partial x^{m-1}}(\zeta_-, \zeta) = \frac{1}{p_0(\zeta)} \quad (1.13)$$

3/ Dans chacun des intervalles $[a, \zeta)$ et $(\zeta, b]$ la fonction $G(x, \zeta)$ considérée comme une fonction de x est solution de l'équation (1.11)

$$L(G) = 0 \quad (1.14)$$

4/ $G(x, \zeta)$ vérifie les conditions aux limites (1.12) :

$$V_k(G) = 0, k = 0, 1, 2, \dots, m \quad (1.15)$$

Theorem 6 : *Si le problème aux limites (1.11) – (1.12), n'a pas de solution autre que la solution triviale $y(x) \equiv 0$, l'opérateur L a une fonction de Green $G(x, \zeta)$ et une seule.*

1.2 Equations différentielles linéaires du 2^{eme} ordre

Les équations linéaires du second ordre jouent un rôle fondamental en mécanique et en physique. On les rencontre soit directement, soit comme intermédiaire dans la résolution des équations aux dérivées partielles linéaire du second ordre. Elles ont dans certains cas, pour solutions particulières, des fonctions élémentaires (polynômes ou autres), mais leur solution générale est rarement simple, et ces équations conduisent à introduire et à étudier de nouvelles fonctions, appelées quelquefois fonctions spéciales. Nous verrons en outre que, à ces équations, on associe souvent des conditions aux limites d'un type différent des conditions de Cauchy, qui établissent un lien entre les problèmes posés et

ceux de la théorie des fonctions orthogonales.

Les équations différentielles linéaires du second ordre sont d'une importance cruciale dans l'étude des équations différentielles pour deux raisons principales : la première est que les équations linéaires ont une structure théorique riche qui sous-tend un certain nombre de méthodes systématiques de solution. En outre, une partie importante de cette structure, et ces méthodes sont compréhensibles à un niveau mathématique assez élémentaire.

Afin de présenter les idées clés dans le contexte le plus simple possible, nous décrivons dans ce chapitre les équations du second ordre. Une autre raison d'étudier ces équations linéaires de second ordre, c'est qu'elles sont très importantes dans le domaine de la physique mathématique. D'ailleurs, on ne peut pas aller plus loin dans le développement de la mécanique des fluides, de la conduction de la chaleur, du mouvement des vagues et des phénomènes électromagnétiques sans savoir résoudre les équations différentielles linéaires de deuxième ordre.

Problème des valeurs propres attachées à une équation différentielle linéaire du second ordre : Considérons l'équation différentielle ordinaire du second ordre

$$\frac{d}{dx} \left(a \frac{dy}{dx} \right) + (b - \lambda c) y = 0 \quad (1.16)$$

où a, b, c ($c \geq 0$) sont des fonctions continues de x et λ un paramètre. Nous allons supposer que ce problème admet des solutions pour certaines valeurs du paramètre λ , et nous allons présenter en revue leurs plus remarquables propriétés. Dans l'espace E , nous définissons un opérateur A par

$$Ay = \frac{d}{dx} \left(a \frac{dy}{dx} \right) + by \quad (1.17)$$

Si a, b , sont réels, l'opérateur A est réel. Mais nous ne savons pas d'avance si les valeurs de λ telles que

$$Ay = \lambda cy, \quad y \neq 0, \quad c \in \mathfrak{R}, \quad \text{et} \quad y \in E \quad (1.18)$$

sont réelles. Si elles ne le sont pas, les solutions $y(x)$ sont complexes. Nous allons donc considérer E comme un espace vectoriel sur le corps des complexes. Dans cet espace, nous définissons deux produits scalaires

$$(y_1, y_2) = \int_0^1 y_1(x) \overline{y_2(x)} dx, \quad \langle y_1, y_2 \rangle = \int_0^1 c(x) y_1(x) \overline{y_2(x)} dx \quad (1.19)$$

Le second est bien un produit scalaire, parce que $c(x)$ est une fonction continue réelle positive. Ils sont tels que

$$\langle y_1, y_2 \rangle = (cy_1, y_2) = (y_1, cy_2). \quad (1.20)$$

Voici les propriétés fondamentales des solutions de l'équation (1.16)

Theorem 7 : *Dans l'espace E , l'opérateur A tel que*

$$Ay = \frac{d}{dx} \left(a \frac{dy}{dx} \right) + by$$

est hermitien relativement au produit scalaire $(.,.)$.

Theorem 8 : *Si λ est tel que l'équation $Ay = \lambda cy$ ait une solution non nulle dans E , alors λ est réel.*

Theorem 9 : *Si y_1, y_2 sont deux solutions de l'équation $Ay = \lambda cy$, correspondant aux valeurs propres distinctes λ_1, λ_2 alors y_1 et y_2 sont orthogonales pour le produit scalaire $\langle ., . \rangle$.*

Equations homogènes à coefficients constants : Une équation différentielle ordinaire du second ordre est de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \quad (1.21)$$

L'équation (1.21) est dite linéaire si la fonction f est de la forme

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = g(x) + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x) y \quad (1.22)$$

Les fonctions g , p et q sont dépendantes de x et ne dépendent pas de y . Dans ce cas, nous réécrivons généralement l'équation (1.21) sous la forme

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = g(x) \quad (1.23)$$

Theorem 10 : *Considérons le problème de la valeur initiale :*

$$\begin{cases} y'' + p(x) y' + q(x) y = g(x) \\ y_0 = y(x_0), \quad y_0' = y'(x_0) \end{cases} \quad (1.24)$$

où p, q , et g sont continues sur un intervalle ouvert I . Ensuite, il y a exactement une solution $y = \phi(x)$ de ce problème, et la solution existe sur tout l'intervalle I .

Theorem 11 : *(Principe de superposition) si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation différentielle*

$$L[y] \equiv y'' + p(x) y' + q(x) y = 0 \quad (1.25)$$

alors la combinaison linéaire

$$c_1 y_1 + c_2 y_2$$

est aussi une solution pour toutes les valeurs des constantes c_1, c_2 .

Theorem 12 : *Supposons que y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation différentielle (1.25) et que le Wronskien $W(y_1, y_2)$ n'est pas nul au point x_0 où les conditions initiales*

$y_0 = y(x_0)$, $y'_0 = y'(x_0)$ sont définies, alors il existe un choix des constantes c_1, c_2 pour lesquelles la fonction $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ satisfait à (1.25) avec ces conditions initiales.

Theorem 13 : Si f et g sont des fonctions différentiables sur un intervalle ouvert I , et si $W(f, g)(x_0) \neq 0$ pour x_0 de I , alors f et g sont linéairement indépendantes sur I . De plus, si f et g sont linéairement dépendantes sur I , alors $W(f, g) = 0$ pour tout x de I

Theorem 14 d'Abel : si y_1 et y_2 sont des solutions de l'équation différentielle (1.25), le Wronskien $W(y_1, y_2)(x)$ est donné par

$$W(y_1, y_2)(x) = c \exp \left[- \int p(x) dx \right]$$

où c est une certaine constante qui dépend de y_1 et y_2 , mais pas de x . En outre, $W(y_1, y_2)(x)$ est nul pour tout x de I (si $c = 0$) et soit non nul sur I (si $c \neq 0$).

Theorem 15 : Soit

$$p(r) = ar^2 + br + c \tag{1.26}$$

le polynôme caractéristique de

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{1.27}$$

alors

a) si $p(r) = 0$ a des racines réelles distinctes r_1 et r_2 , alors la solution générale de (1.27) est

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

b) si $p(r) = 0$ a une racine double r_1 , alors la solution générale de (1.27) est

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{r_1 x}$$

c) si $p(r) = 0$ a des racines complexes conjuguées $r_1 = \lambda + i\omega$ et $r_2 = \lambda - i\omega$ (ou $\omega > 0$), alors la solution générale de (1.27) est

$$y = e^{\lambda x} (c_1 \cos \omega x + ic_2 \sin \omega x)$$

Equations non homogènes

Méthode des coefficients indéterminés : Revenons maintenant à l'équation non homogène

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \quad (1.28)$$

où p, q , et g sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert I . L'équation homogène correspondante est (1.25).

Theorem 16 : *Si Y_1 et Y_2 sont deux solutions de l'équation non homogène (1.28), alors leur différence $Y_1 - Y_2$ est une solution de l'équation homogène correspondante (1.25), et si en outre, y_1 et y_2 sont des solutions de l'équation. (1.25), alors*

$$Y_1 - Y_2 = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad \text{où } c_1 \text{ et } c_2 \text{ des constantes arbitraires}$$

Theorem 17 : *La solution générale de l'équation non homogène (1.28) peut être écrite sous la forme*

$$y(x) = \phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + Y(x) \quad (1.29)$$

où y_1 et y_2 sont de solutions des l'équation. (1.25), c_1 et c_2 des constantes arbitraires, et Y est une solution particulière de l'equation (1.28).

Fonctions de Bessel :

En mathématiques, et plus précisément en analyse, les fonctions de Bessel, découvertes par le mathématicien Suisse Daniel Bernouli, portent le nom du mathématicien Allemand Friedrich Bessel. Bessel développa l'analyse de ces fonctions en 1817 dans le

cadre de ses études du mouvement des planètes induit par l'interaction gravitationnelle, généralisant les découvertes antérieures de Bernoulli. Ces fonctions sont des solutions canoniques $Y(x)$ de l'équation différentielle de Bessel

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2) y = 0 \quad (1.30)$$

Modélisation dans un domaine circulaire : Divers phénomènes physiques portent sur le disque

$$D = \{ f(x; y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq a, a \in \mathbb{R}_+ \} \quad (1.31)$$

comme le déplacement vertical u d'une membrane circulaire ou la propagation de la chaleur u dans un disque, sont modélisés par une équation aux dérivées partielles portant sur la fonction $u(x; y; t); (x; y) \in D; t \in \mathbb{R}$ décrivant l'évolution temporelle de l'observable u

$$\frac{-1}{2} \Delta u(x, y, t) = i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} + C(x, y) u(x, y, t) \quad (1.32)$$

avec une condition sur le bord

$$\partial D = \{ f(x; y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = a \} \quad (1.33)$$

par exemple la condition dite de Dirichlet

$$u(x; y; t) = 0; \quad (x; y) \in \partial D \quad (1.34)$$

Dans l'équation (1.32), $C(x, y)$ est une constante indépendante de t et le laplacien Δ est l'opérateur différentiel $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ en coordonnées cartésiennes, soit

$$\Delta = r^{-1} \partial_r (r \partial_r) + r^{-2} \partial_\varphi^2 \quad (1.35)$$

en coordonnées polaires $(r; \varphi)$ avec $(x = r \cos \varphi; y = r \sin \varphi)$. Les solutions de l'équation (1.32) sont du type $R(r)\Phi(\varphi)T(t)$, telles que :

$$\begin{aligned} T(t) &= \exp(-iEt/\hbar) \\ \Phi(\varphi) &= \exp(i\varphi) \end{aligned}$$

vérifient

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} - C(r, \varphi) = -2 \frac{i\hbar \frac{dT}{dt}}{T} \quad (1.36)$$

Les variables r, φ, t étant indépendantes, les membres de l'équation précédente sont alors égaux à une même constante E , d'où les deux équations

$$\frac{i\hbar \frac{dT}{dt}}{T} = -2E \quad (1.37)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -2E \Leftrightarrow r^2 \left[\frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + 2E \right] = -\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \quad (1.38)$$

$$-\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = n^2$$

$$r^2 \left[\frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + 2ER \right] = n^2 R \quad (1.39)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + 2ER = \frac{n^2 R}{r^2} \quad (1.40)$$

L'équation (1.39) s'écrit

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + r^{-1} \frac{dR}{dr} + (2E - n^2 r^{-2}) R = 0 \quad (1.41)$$

soit pour la fonction $y(t) = R(t = r\sqrt{2E})$ l'équation différentielle (1.41) s'écrit

$$y'' + t^{-1}y' + (1 - n^2t^{-2})y = 0 \quad (1.42)$$

l'équation (1.42) est dite équation de Bessel d'ordre n . Pour n entier, la fonction de Bessel J_n est définie par une série et est solution de l'équation différentielle (1.42)

Definition 18 : Soit n entier, la série

$$J_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2k} \quad (1.43)$$

est absolument convergente pour $t \in \mathbb{C}$ et est solution de l'équation différentielle (1.42) pour $t \in \mathbb{R}$. La fonction J_n est appelée fonction de Bessel de première espèce d'ordre n .

Proposition 19 : Les fonctions de Bessel J_n ; $n \geq 1$ vérifient les relations de récurrence

$$J_{n-1}(t) + J_{n+1}(t) = \frac{2n}{t} J_n(t) \quad (1.44)$$

$$J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t) = 2J_n(t) \quad (1.45)$$

de plus, $J'_0 = -J_1$.

Theorem 20 : La famille des fonctions de Bessel (J_n) $n \geq 0$ est caractérisée par l'une des deux représentations suivantes

1) les J_n sont donnés par la fonction génératrice

$$J(x, t) = \exp((x - 1/x)/2) = J_0(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} J_n(t) [x + (-x^{-1})], \quad t > 0 \quad (1.46)$$

2) la fonction J_n est donnée par la série entière (1.43). De plus, la suite (J_n) $n \geq 0$ vérifie la relation de récurrence

$$tJ_{n-1}(t) = 2nJ_n(t) - tJ_{n+1}(t). \quad (1.47)$$

La fonction J_n a comme comportements asymptotiques aux bornes de l'intervalle $(0; +\infty)$

$$J_n(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^n}{2^n n!}, \quad J_n(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi t}\right)^{1/2} \cos\left(t - \frac{1}{2}n\pi - \frac{\pi}{4}\right) \quad (1.48)$$

Remark 21 : Pour $t \in \mathfrak{R}$ et en prenant la variable θ telle que $x = e^{i\theta}$, la relation (1.46) s'écrit comme un développement en série de Fourier

$$e^{it \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(t) e^{in\theta}, \quad \theta \in \mathfrak{R} \quad (1.49)$$

Ainsi

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it \sin \theta - in\theta} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(t \sin \theta - n\theta) d\theta \quad (1.50)$$

d'après (1.50) on a

$$J_{-n}(t) = J_n(-t), \quad \text{et} \quad J_n(-t) = (-1)^n J_n(t), \quad \forall t \in \mathfrak{R} \quad (1.51)$$

lorsque n non entier égal à ν , la fonction $J_{-\nu}$ est une solution de l'équation (1.42), et linéairement indépendante de J_ν .

Proposition 22 : Soit ν un réel, l'équation différentielle (1.42)

$$y'' + t^{-1}y' + (1 - \nu^2 t^{-2})y = 0 \quad (1.52)$$

a deux solutions linéairement indépendantes J_ν, Y_ν . Cette seconde est appelée la fonction de Bessel de deuxième espèce. Elles sont définies par :

$$J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu+2k} \quad (1.53)$$

$$Y_\nu(t) = \frac{J_\nu(t) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(t)}{\sin \nu\pi} \quad (1.54)$$

Les développements asymptotiques de J_ν, Y_ν sont

$$J_\nu(t) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \left(\cos \left(t - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4} \right) \right) \quad (1.55)$$

$$Y_\nu(t) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \left(\sin \left(t - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4} \right) \right), \quad t \rightarrow +\infty \quad (1.56)$$

Theorem 23 : Soit l'équation différentielle

$$y'' + t^{-1}y' - (1 + \nu^2 t^{-2})y = 0 \quad (1.57)$$

les solutions de l'équation (1.57) sont appelées fonctions de Bessel modifiées. Une est finie à l'origine est notée $I_\nu(t)$, et l'autre est infinie notée $K_\nu(t)$. Ces fonctions sont reliées par la relation

$$K_\nu(t) = \frac{\pi (I_{-\nu}(t) - I_\nu(t))}{2 \sin \nu\pi} \quad (1.58)$$

Propriétés :

- 1) Les fonctions $I_\nu(t)$ et $K_\nu(t)$ vérifient les relations de récurrence (1.44),(1.45), (1.51)
- 2) Dans le cas l'argument des fonctions de Bessel $J_\nu(t)$ et $H_\nu^{(1)}(t)$ est imaginaire, on obtient

$$J_\nu(it) = i^\nu I_\nu(t), \quad K_\nu(t) = \frac{\pi i}{2} (i)^\nu H_\nu^{(1)}(it) \quad (1.59)$$

où la fonction $H_\nu^{(i)}(t)$, ($i = 1, 2$) s'appellent fonctions de Hankel ou fonctions de Bessel de troisième espèce, elles sont définies par

$$H_\nu^{(1)}(t) = J_\nu(t) + iY_\nu(t), \quad H_\nu^{(2)}(t) = J_\nu(t) - iY_\nu(t) \quad (1.60)$$

- 3) Les Wronskiens des fonctions de Bessel précédentes

$$W(J_\nu(t), Y_\nu(t)) = 2/\pi t, \quad W(I_\nu(t), K_\nu(t)) = 2/t, \quad W(H_\nu^{(1)}(t), H_\nu^{(2)}(t)) = -4i/\pi t$$

- 4) Les développements asymptotiques (m entier positif) sont

$$\lim_{t \rightarrow 0} I_m(t) \rightarrow \frac{x^m}{2^m \Gamma(m+1)} \quad (1.61)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} K_m(t) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -[\ln(\frac{t}{2}) + \gamma], m = 0, \\ \frac{\Gamma(m)}{2} (\frac{2}{x})^m, m \neq 0, \end{array} \right\} \quad (1.62)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} I_m(t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^t \left[1 + o\left(\frac{1}{t}\right) \right], \quad (1.63)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} K_m(t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-t} \left[1 + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] \quad (1.64)$$

$$H_m^{(1)}(t) \rightarrow_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \exp \left[i \left(t - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (1.65)$$

$$H_m^{(2)}(t) \rightarrow_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \exp \left[-i \left(t - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (1.66)$$

1.2.1 Construction de la fonction de Green pour les équations différentielles du second ordre

Forme générale : Soient p_0, p_1, p_2 trois fonctions continues sur $[a, b]$ telles que :

$$p_0(x) y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0 \quad (1.67)$$

$$\begin{cases} a_0 y(a) + a_1 y'(a) + a_2 y(b) + a_3 y'(b) = 0 \\ b_0 y(a) + b_1 y'(a) + b_2 y(b) + b_3 y'(b) = 0 \end{cases} \quad (1.68)$$

Nous dirons que le problème est régulier si en plus des conditions précédentes

- 1) $[a, b]$ est un segment borné sur lequel $p_0(x)$ ne s'annule pas,
- 2) le problème homogène (1.67) – (1.68) admet pas d'autre solution que $y \equiv 0$.

Pour tout problème régulier (1.67) – (1.68) il existe une unique fonction $G(x, \xi)$ ap-

pelée fonction de Green qui est entièrement déterminée par les 4 propriétés précédentes.

Remark 24 : Si $a_2, a_3, b_0,$ et b_1 sont nuls, on dit que ces conditions sont séparées.

construction de la fonction de Green

On construit la fonction Green sur la base de deux solutions non proportionnelles y_1 et y_2 de (1.67) de la façon suivante :

$$G(x, \zeta) = \begin{cases} a(\zeta) y_1(x) + b(\zeta) y_2(x), & \text{pour } x \in [a, \zeta[\\ c(\zeta) y_1(x) + d(\zeta) y_2(x), & \text{pour } x \in]\zeta, b] \end{cases} \quad (1.69)$$

tels que les réels $a(\zeta), b(\zeta), c(\zeta)$ et $d(\zeta)$ sont des fonctions à déterminer à partir des conditions aux limites. La recherche de $G(x, y)$ se fait comme elle a été présentée dans le cas générale (équations différentielles d'ordre n) dans le sous-paragraphe (1.1.1).

Chapitre 2

APPLICATIONS AU CALCUL DE LA FONCTION DE GREEN

Dans ce chapitre nous allons traiter trois cas à savoir : le potentiel saut de Heaviside [1], le potentiel sur le disque [9] et le potentiel sur la sphère [10].

2.1 Potentiel saut de Heaviside (D=1)

Soit l'équation différentielle

$$\left(-\frac{\Delta}{2m} + V - E\right) \Psi(x) = 0 \quad (2.1)$$

telle que

$$V(x) = \begin{cases} 0; & \text{si } x < 0 \\ V_0; & \text{si } \geq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

qui est une fonction continue par morceaux. En mécanique quantique cette fonction est considérée comme un saut de potentiel. L'équation précédente dans le cas stationnaire s'écrit

$$\left(-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V - E\right) \Psi(x) = 0 \quad (2.3)$$

1) dans le cas ($x < 0, y < 0$), la dernière équation se transforme en l'équation

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + 2mE\Psi = 0 \quad (2.4)$$

qui admet deux solutions indépendantes

$$\Psi_1(x) = \exp(ikx) ; \Psi_2(x) = \exp(-ikx) ; \text{ où } k^2 = 2mE. \quad (2.5)$$

La fonction de Green correspondante et qui respecte les conditions aux limites du problème de mécanique quantique est construite à partir de ces solutions et est définie par

$$G_{1,1}(x, y) = \begin{cases} A(y) \exp(-ikx) + rA(y) \exp(ikx) ; & x < y \\ B(y) \exp(ikx) ; & 0 \geq x > y \end{cases} \quad (2.6)$$

La continuité de la fonction de Green au point ($x = y$)

$$\begin{aligned} G_{1,1}(y_+, y) - G_{1,1}(y_-, y) &= 0 \iff \\ (B(y) + rA(y)) \exp(iky) - A(y) \exp(-iky) &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

La discontinuité de la première dérivée de la fonction de Green au point ($x = y$) est définie par

$$\begin{aligned} \frac{dG_{1,1}(y_+, y)}{dx} - \frac{dG_{1,1}(y_-, y)}{dx} &= 1 \iff \\ (B(y) + rA(y)) \exp(iky) + A(y) \exp(-iky) &= \frac{1}{ik} \end{aligned} \quad (2.8)$$

De (2.7) et (2.8), on obtient

$$B(y) + rA(y) = \frac{1}{2ik} \exp(-iky) \quad (2.9)$$

et de (2.7) et (2.8) on obtient

$$A(y) = \frac{1}{2ik} \exp(iky). \quad (2.10a)$$

En remplaçant (2.10a) dans (2.9)

$$B(y) = \frac{1}{2ik} (\exp(-iky) - r \exp(iky)) \quad (2.11)$$

et dans le système (2.6) on obtient

$$G_{1,1}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2ik} \exp(iky) \exp(-ikx) - r \frac{1}{2ik} \exp(iky) \exp(ikx) ; x < y \\ \frac{1}{2ik} (\exp(-iky) - r \exp(iky)) \exp(ikx) ; 0 \geq x > y \end{cases} \quad (2.12)$$

$$G_{1,1}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2ik} \exp ik(y-x) - \frac{r}{2ik} \exp ik(x+y) ; x < y \\ \frac{1}{2ik} \exp ik(x-y) - \frac{r}{2ik} \exp ik(x+y) ; 0 \geq x > y \end{cases} \quad (2.13)$$

Enfin l'expression de la fonction de Green dans le cas $(x < 0, y < 0)$ est

$$G_{1,1}(x, y) = \frac{1}{2ik} [\exp ik|x-y| - r \exp ik(x+y)] \quad (2.14)$$

où r est une constante à déterminer par les conditions aux limites.

2) Dans le cas $(x > 0, y > 0)$, l'équation différentielle (2.3) s'écrit

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + 2m(E - V_0)\Psi = 0 \quad (2.15)$$

Elle admet deux solutions indépendantes

$$\Psi_1(x) = \exp(\mu x) ; \Psi_2(x) = \exp(-\mu x) ; \text{où } \mu^2 = 2m(E - V_0) \quad (2.16)$$

La fonction de Green correspondante à ces solutions et respectant les conditions dictées

par la mécanique quantique

$$G_{2,2}(x, y) = \begin{cases} A(y) \exp(\mu x) ; 0 \leq x < y \\ B(y) (\exp(-\mu x) + r \exp(\mu x)) ; x > y \end{cases} \quad (2.17)$$

La continuité de la fonction de Green au point ($x = y$)

$$\begin{aligned} G_{2,2}(y_+, y) - G_{2,2}(y_-, y) &= 0 \iff \\ B(y) \exp(-\mu y) - (A(y) - rB(y)) \exp(\mu y) &= 0 \end{aligned} \quad (2.18a)$$

La discontinuité de la dérivée première de la fonction de Green au point ($x = y$)

$$\begin{aligned} \frac{dG_{2,2}(y_+, y)}{dx} - \frac{dG_{2,2}(y_-, y)}{dx} &= 1 \iff \\ -B(y) \exp(-\mu y) - (A(y) - rB(y)) \exp(\mu y) &= \frac{1}{\mu} \end{aligned} \quad (2.19)$$

De (2.18a) et (2.19) on obtient

$$A(y) - rB(y) = -\frac{1}{2\mu} \exp(-\mu y) \quad (2.20)$$

et de(2.18a) et (2.19) on obtient

$$B(y) = -\frac{1}{2\mu} \exp(\mu y) \quad (2.21a)$$

donc

$$A(y) = \frac{-1}{2\mu} (\exp(-\mu y) + r \exp(\mu y)) \quad (2.22)$$

En remplaçant les résultats (2.21a), (2.22) dans le système (2.17) on trouve

$$G_{2,2}(x, y) = \begin{cases} \frac{-1}{2\mu} (\exp(-\mu y) + r \exp(\mu y)) \exp(\mu x) ; 0 \leq x < y \\ -\frac{1}{2\mu} \exp(\mu y) (\exp(-\mu x) + r \exp(\mu x)) ; x > y \end{cases} \quad (2.23)$$

$$G_{2,2}(x, y) = \begin{cases} \frac{-1}{2\mu} (\exp(-\mu(y-x) + r \exp \mu(x+y))); & 0 \leq x < y \\ -\frac{1}{2\mu} (\exp \mu(y-x) + r \exp \mu(x+y)); & x > y \end{cases} \quad (2.24)$$

Enfin l'expression de la fonction de Green dans le cas ($x > 0, y > 0$) est

$$G_{2,2}(x, y) = \frac{-1}{2\mu} [\exp(-\mu|x-y|) + r \exp \mu(x+y)] \quad (2.25)$$

où r est une constante à déterminer d'après la continuité de la fonction de Green au point $(0, 0)$

$$G_{1,1}(0, 0) = G_{2,2}(0, 0) \quad (2.26)$$

c-à-d

$$\frac{1}{2ik}(1-r) = \frac{-1}{2\mu}(1+r) \quad (2.27)$$

donc

$$r = \frac{\mu + ik}{\mu - ik} \quad (2.28)$$

et

$$G_{1,1}(x, y) = \frac{1}{2ik} \left[\exp ik|x-y| - \frac{\mu + ik}{\mu - ik} \exp ik(x+y) \right] \quad (2.29)$$

$$G_{2,2}(x, y) = \frac{-1}{2\mu} \left[\exp \mu|x-y| + \frac{\mu + ik}{\mu - ik} \exp \mu(x+y) \right] \quad (2.30)$$

3) Dans le cas ($x < 0; y > 0$) la fonction de Green s'écrit comme

$$G_{1,2}(x, y) = \alpha(k, \mu) h(y) z(x) \quad (2.31)$$

où

$$z(x) = \Psi_1(x) = \exp(ikx) \quad (2.32)$$

qui est solution de l'équation (2.4), et

$$h(y) = \Psi_2(y) = \exp(-\mu y) \quad (2.33)$$

qui est solution de l'équation (2.15). D'après la continuité de la fonction de Green au point $(0, 0)$ c-à-d

$$G_{1,1}(0, 0) = G_{1,2}(0, 0) \quad (2.34)$$

d'où

$$\alpha(k, \mu) = \frac{-2ik}{\mu - ik} \quad (2.35)$$

et

$$G_{1,2}(x, y) = \frac{-2ik}{\mu - ik} \exp(ikx - \mu y) \quad (2.36)$$

4) Dans le cas ($y < 0$; $x > 0$) la fonction de Green se détermine de la même manière du cas précédent

$$G_{2,1}(x, y) = \beta(k, \mu) g(y) d(x) \quad (2.37)$$

où

$$g(y) = \Psi_1(y) = \exp(iky), \quad \text{et} \quad d(x) = \Psi_2(x) = \exp(-\mu x) \quad (2.38)$$

sont les solutions des équations (2.15) et (2.4) respectivement. D'après la continuité de la fonction de Green au point $(0, 0)$ c-à-d

$$G_{2,2}(0, 0) = G_{2,1}(0, 0) \quad (2.39)$$

on a

$$\beta(k, \mu) = \frac{-2\mu}{\mu - ik} \quad (2.40)$$

d'où

$$G_{2,1}(x, y) = \frac{-2\mu}{\mu - ik} \exp(iky - \mu x) \quad (2.41)$$

2.2 Potentiel sur le disque (D=2)

Soit le problème aux valeurs propres

$$\hat{H}\Psi = E\Psi \quad (2.42)$$

où \hat{H} désigne l'opérateur hamiltonien, E l'énergie (valeur propre) et Ψ fonction de r et θ et la fonction propre de l'opérateur \hat{H} . Celui-ci est donné par

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\Delta + V(r, \theta) \quad (2.43)$$

et

$$V(r, \theta) = \begin{cases} V_0; & \text{si } 0 \leq r \leq a \\ 0; & \text{si } r > a \end{cases} \quad (2.44)$$

qui est une fonction indépendante de la variable angulaire θ . Géométriquement cette fonction peut être considérée, à l'instar du cas d'une seule dimension, comme une barrière de potentiel à deux dimensions. La fonction de Green associée à ce problème s'écrit comme

$$G(\vec{r}, \vec{r}'; E) = \sum_l G_l(r, r') e^{il(\theta - \theta')}$$

telle que $G_l(r, r')$ est la fonction de Green radiale que nous allons construire.

Le cas $0 < V_0 < E$

Dans ce cas, l'équation (2.42) s'écrit

$$\left(-\frac{1}{2}\Delta + V - E\right)\Psi = 0 \quad (2.45)$$

ou bien

$$\begin{cases} \left(\frac{\Delta}{2} + E\right)\Psi = 0; & \text{si } r > a \\ \left(\frac{\Delta}{2} - V_0 + E\right)\Psi = 0; & \text{si } 0 \leq r \leq a \end{cases} \quad (2.46)$$

comme

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (2.47)$$

Le premier cas ($r, r' > a$) (r et r' à l'extérieur du disque)

soit l'équation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2E \right) \Psi(r, \theta) = 0 \quad (2.48)$$

on utilise la méthode de séparation de variable et on pose la séparation

$$\Psi(r, \theta) = \Psi_1(r) \Psi_2(\theta) \quad (2.49)$$

En remplaçant dans l'équation (2.48) on obtient :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2E \right) \Psi_1(r) \Psi_2(\theta) = 0 \quad (2.50)$$

et en divisant l'équation précédente par ($\Psi_1(r) \Psi_2(\theta) \neq 0$) on obtient

$$\frac{\Psi_2(\theta) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \Psi_1(r) + \frac{\Psi_1(r)}{r^2} \Psi_2''(\theta) + 2E \Psi_1(r) \Psi_2(\theta)}{\Psi_1(r) \Psi_2(\theta)} = 0 \quad (2.51)$$

c-à-d :

$$\frac{\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \Psi_1(r)}{\Psi_1(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{\Psi_2''(\theta)}{\Psi_2(\theta)} + 2E = 0 \quad (2.52)$$

ou bien

$$\frac{r^2 \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \Psi_1(r)}{\Psi_1(r)} + 2Er^2 + \frac{\Psi_2''(\theta)}{\Psi_2(\theta)} = 0 \quad (2.53)$$

L'équation pour $\Psi_2(\theta)$:

$$\frac{\Psi_2''(\theta)}{\Psi_2(\theta)} = -l^2 \Leftrightarrow \Psi_2''(\theta) + l^2 \Psi_2(\theta) = 0 \quad (2.54)$$

(l réel) qui admet une solution générale de la forme

$$\Psi_2(\theta) = c_2 e^{il\theta} \quad (2.55)$$

et l'autre équation est

$$r^2 \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \Psi_1(r) = l^2 \Psi_1(r) - 2Er^2 \Psi_1(r) \quad (2.56)$$

ou bien

$$r^2 \frac{d^2 \Psi_1}{dr^2} + r \frac{d \Psi_1}{dr} + (2Er^2 - l^2) \Psi_1 = 0 \quad (2.57)$$

qu'est l'équation de Bessel, qu'on résoud par la méthode d'Abel. En divisant par (r^2) on obtient

$$\frac{d^2 \Psi_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \Psi_1}{dr} + \left(2E - \frac{l^2}{r^2} \right) \Psi_1 = 0 \quad (2.58)$$

avec les conditions aux limites

$$\Psi_1(a) = A_1; \text{ et } B_1 = \lim_{r \rightarrow +\infty} \Psi_1(r) \text{ bornée} \quad (2.59)$$

Le problème étant bien défini, la construction de la fonction de Green est immédiate [9]

$$G^{1,1,1}(r, r') = - \begin{cases} \frac{Y_l(\mu r') J_l(\mu r)}{Y_l(\mu r) J_l(\mu r')} + \left[\frac{2J_l(ka) - \pi a J_l(\mu a) [\mu J_l(ka) Y_l'(\mu a) - k Y_l(\mu a) J_l'(ka)]}{\pi a J_l(\mu a) [\mu J_l(ka) J_l'(\mu a) - k J_l(\mu a) J_l'(ka)]} J_l(\mu r') \right] J_l(\mu r), & 0 < r \leq r' \\ \frac{Y_l(\mu r) J_l(\mu r')}{Y_l(\mu r) J_l(\mu r')} + \left[\frac{2J_l(ka) - \pi a J_l(\mu a) [\mu J_l(ka) Y_l'(\mu a) - k Y_l(\mu a) J_l'(ka)]}{\pi a J_l(\mu a) [\mu J_l(ka) J_l'(\mu a) - k J_l(\mu a) J_l'(ka)]} J_l(\mu r) \right] J_l(\mu r'), & r' \leq r \leq a \end{cases} \quad (2.60)$$

le deuxième cas ($0 < r \leq r' \leq a$) (**r et r' à l'intérieur du disque**)

$$G^{1,2,2}(r, r') = \begin{cases} \frac{Y_l(kr) J_l(kr')}{Y_l(kr) J_l(kr')} + \left[\frac{2J_l(\mu a) - \pi a J_l(ka) [k J_l(\mu a) Y_l'(ka) - \mu Y_l(ka) J_l'(\mu a)]}{\pi a J_l(ka) [k J_l(\mu a) J_l'(ka) - \mu J_l(ka) J_l'(\mu a)]} J_l(kr) \right] J_l(kr'), & a \leq r \leq r' \\ \frac{Y_l(kr) J_l(kr')}{Y_l(kr) J_l(kr')} + \left[\frac{2J_l(\mu a) - \pi a J_l(ka) [k J_l(\mu a) Y_l'(ka) - \mu Y_l(ka) J_l'(\mu a)]}{\pi a J_l(ka) [k J_l(\mu a) J_l'(ka) - \mu J_l(ka) J_l'(\mu a)]} J_l(kr') \right] J_l(kr), & r' \leq r < \infty \end{cases} \quad (2.61)$$

le cas : $0 < r' \leq a \leq r < \infty$ (r' à l'intérieur et r à l'extérieur du disque)

$$G^{1,2,1}(r, r') = \left[Y_l(kr) - \frac{Y_l(ka)}{J_l(ka)} J_l(kr) \right] J_l(\mu r') + \frac{4}{\pi a [kJ_l(\mu a) J_l(ka) - \mu J_l(ka) J_l(\mu a)]} J_l(kr) J_l(\mu r') \quad (2.62)$$

le cas : $0 < r \leq a \leq r' < \infty$: (r à l'intérieur et r' à l'extérieur du disque)

$$G^{1,1,2}(r, r') = Y_l(kr') J_l(\mu r) - \left[\frac{Y_l(ka)}{J_l(ka)} + \frac{4}{\pi a [kJ_l(\mu a) J_l(ka) - \mu J_l(ka) J_l(\mu a)]} \right] J_l(\mu r) \quad (2.63)$$

2.2.1 Le cas $0 < E < V_0$

Dans ce cas μ' devient un nombre imaginaire pure $\mu' = i\mu$

$$\mu' = i\sqrt{2(E - V_0)} = i\mu \quad (2.64)$$

alors les fonctions de Bessel se transforment en

$$J_l(\mu' r) \rightarrow I_l(\mu r) \quad (2.65)$$

$$Y_l(\mu' r) \rightarrow K_l(\mu r) \quad (2.66)$$

En résumant tous les résultats dans les différentes régions maintenant, on trouve

$0 \leq r \leq r' \leq a$ (r et r' à l'intérieur du disque)

$$G^{1,1}(l : r, r') = - \begin{cases} K_l(\mu r') I_l(\mu r) - \\ \frac{-2J_l(ka) + \pi a I_l(\mu a) [kK_l(\mu a) J_l'(ka) - i\mu J_l(ka) K_l'(\mu a)]}{\pi a I_l(\mu a) [kI_l(\mu a) J_l'(ka) - i\mu J_l(ka) I_l'(\mu a)]} I_l(\mu r') I_l(\mu r), & 0 < r \leq r' \\ K_l(\mu r) I_l(\mu r') - \\ \frac{-2J_l(ka) + \pi a I_l(\mu a) [kK_l(\mu a) J_l'(ka) - i\mu J_l(ka) K_l'(\mu a)]}{\pi a I_l(\mu a) [kI_l(\mu a) J_l'(ka) - i\mu J_l(ka) I_l'(\mu a)]} I_l(\mu r) I_l(\mu r'), & r' \leq r \leq a \end{cases} \quad (2.67)$$

$0 < r' \leq a \leq r < \infty$ (**r' à l'intérieur et r à l'extérieur du disque**)

$$G^{2,1}(l : r, r') = \left[Y_l(kr) - \left(\frac{Y_l(ka)}{J_l(ka)} - \frac{4}{\pi a [kI_l(\mu a) J_l'(ka) - i\mu J_l(ka) I_l'(\mu a)]} \right) J_l(kr) \right] I_l(\mu r') \quad (2.68)$$

$0 < r \leq a \leq r' < \infty$ (**r à l'intérieur et r' à l'extérieur du disque**)

$$G^{1,2}(l : r, r') = \left[Y_l(kr') - \left(\frac{Y_l(ka)}{J_l(ka)} - \frac{4}{\pi a [kI_l(\mu a) J_l'(ka) - i\mu J_l(ka) I_l'(\mu a)]} \right) J_l(kr') \right] I_l(\mu r) \quad (2.69)$$

$a \leq r \leq r' < \infty$ (**r et r' à l'extérieur du disque**)

$$G^{2,2}(l : r, r') = \begin{cases} Y_l(kr) J_l(kr') - \\ \frac{2I_l(\mu a) + \pi a J_l(ka) [kI_l(\mu a) Y_l'(ka) - i\mu Y_l(ka) I_l'(\mu a)]}{\pi a J_l(ka) [kI_l(\mu a) J_l'(ka) - i\mu J_l(ka) I_l'(\mu a)]} J_l(kr) J_l(kr'), & a \leq r \leq r' \\ Y_l(kr') J_l(kr) - \\ \frac{2I_l(\mu a) + \pi a J_l(ka) [kI_l(\mu a) Y_l'(ka) - i\mu Y_l(ka) I_l'(\mu a)]}{\pi a J_l(ka) [kI_l(\mu a) J_l'(ka) - i\mu J_l(ka) I_l'(\mu a)]} J_l(kr') J_l(kr), & r' \leq r < \infty \end{cases} \quad (2.70)$$

2.2.2 Le puits de potentiel (D=2)

Considérons le potentiel défini par

$$V(r) = \begin{cases} 0; & \text{si } , 0 \leq r \leq a \\ V_0; & \text{si } , r > a \end{cases} \quad (2.71)$$

Pour calculer la fonction de Green pour ce problème, il suffit de reconsidérer les solutions obtenues dans la première section et de faire le changement entre les constantes $\mu \leftrightarrow k$. Dans ce cas E devient inférieure à V_0 ($E < V_0$) et μ devient égal à $\sqrt{2(V_0 - E)}$. Par exemple dans le cas $0 \leq r \leq r' \leq a$ le potentiel $V(r)$ égal V_0 à l'extérieur du disque, la fonction de Green devient le coefficient

$$G^{1,1}(l : r, r') = \begin{cases} Y_l(kr') J_l(kr) - \\ \left[\frac{2J_l(\mu a) + \pi a J_l(ka) [kJ_l(\mu a) Y_l'(ka) - \mu Y_l(ka) J_l(\mu a)]}{\pi a J_l(ka) [kJ_l(\mu a) J_l'(ka) - \mu J_l(ka) J_l(\mu a)]} J_l(kr') \right] J_l(kr), & 0 < r \leq r' \\ Y_l(kr) J_l(kr') - \\ \left[\frac{2J_l(\mu a) + \pi a J_l(ka) [kJ_l(\mu a) Y_l'(ka) - \mu Y_l(ka) J_l(\mu a)]}{\pi a J_l(ka) [kJ_l(\mu a) J_l'(ka) - \mu J_l(ka) J_l(\mu a)]} J_l(kr) \right] J_l(kr'), & r' \leq r \leq a \end{cases} \quad (2.72)$$

et r et r' à l'extérieur du disque ($r \geq r' \geq a$) :

$$G^{2,2}(l : r, r') = - \begin{cases} Y_l(\mu r) J_l(\mu r') - \\ \left[\frac{-2J_l(ka) + \pi a J_l(\mu a) [\mu J_l(ka) Y_l'(\mu a) - k Y_l(\mu a) J_l(ka)]}{\pi a J_l(\mu a) [kJ_l(\mu a) J_l'(ka) - \mu J_l(ka) J_l(\mu a)]} J_l(\mu r) \right] J_l(\mu r'), & a \leq r \leq r' \\ Y_l(\mu r') J_l(\mu r) - \\ \left[\frac{-2J_l(ka) + \pi a J_l(\mu a) [\mu J_l(ka) Y_l'(\mu a) - k Y_l(\mu a) J_l(ka)]}{\pi a J_l(\mu a) [kJ_l(\mu a) J_l'(ka) - \mu J_l(ka) J_l(\mu a)]} J_l(\mu r') \right] J_l(\mu r), & r' \leq r < \infty \end{cases} \quad (2.73)$$

remarque : Le spectre est donné par les pôles de $G^{1,1}(l : r, r')$.

r à l'intérieur et r' à l'extérieur du disque

$$G^{2,1}(l : r, r') = \left[Y_l(\mu r) - \left(\frac{Y_l(\mu a)}{J_l(\mu a)} - \frac{4}{\pi a [kJ_l(\mu a) J_l(ka) - \mu J_l(ka) J_l(\mu a)]} \right) J_l(\mu r) \right] J_l(kr') \quad (2.74)$$

r' à l'intérieur et r à l'extérieur du disque

$$G^{1,2}(l : r, r') = \left[Y_l(\mu r') - \left(\frac{Y_l(\mu a)}{J_l(\mu a)} - \frac{4}{\pi a [kJ_l(\mu a) J_l(ka) - \mu J_l(ka) J_l(\mu a)]} \right) J_l(\mu r') \right] J_l(kr) \quad (2.75)$$

posons

$$\alpha_1 = \frac{2J_l(\mu a) + \pi a J_l(ka) [kJ_l(\mu a) Y_l'(ka) - \mu Y_l'(ka) J_l(\mu a)]}{\pi a J_l(ka) [kJ_l(\mu a) J_l(ka) - \mu J_l(ka) J_l(\mu a)]} \quad (2.76)$$

$$= \frac{\frac{2J_l(\mu a)}{\pi a J_l(ka) \mu J_{l-1}(\mu a)} + k \frac{J_l(\mu a)}{\mu J_{l-1}(\mu a)} (Y_{l-1}(ka) - \frac{l}{ka} Y_l(ka)) - Y_l(ka) \left(1 - \frac{l}{a} \frac{J_l(\mu a)}{\mu J_{l-1}(\mu a)}\right)}{k \frac{J_l(\mu a)}{\mu J_{l-1}(\mu a)} (J_{l-1}(ka) - \frac{l}{ka} J_l(ka)) - J_l(ka) \left(1 - \frac{l}{a} \frac{J_l(\mu a)}{\mu J_{l-1}(\mu a)}\right)} \quad (2.77)$$

Si nous faisons μ tendre vers $+\infty$ c-à-d quand V_0 tend vers $+\infty$ (infinite well), nous obtenons

$$\frac{J_l(\mu a)}{\mu J_{l-1}(\mu a)} \rightarrow 0 \quad (2.78)$$

puis :

$$\alpha_1 = \frac{Y_l(ka)}{J_l(ka)} \quad (2.79)$$

et la fonction de Green, à l'infini devient :

$$G^{1,1}(l : r, r') = \begin{cases} \left[Y_l(kr') - \frac{Y_l(ka)}{J_l(ka)} J_l(kr') \right] J_l(kr), & 0 < r \leq r' \\ \left[Y_l(kr) - \frac{Y_l(ka)}{J_l(ka)} J_l(kr) \right] J_l(kr'), & r' \leq r \leq a \end{cases} \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned}
G^{2,1}(l : r, r') &= 0 & 0 < r' < a < r \\
G^{1,2}(l : r, r') &= 0 & 0 < r < a < r' \\
G^{2,2}(l : r, r') &= 0 & r, r' > a
\end{aligned} \tag{2.81}$$

Ce resultat est un problème bien connu dans la mécanique quantique, d'une particule se déplaçant dans un puit infini à deux dimensions. Le spectre, est alors donné par les racines de l'équation $J_l(ka) = 0$.

2.3 Potentiel sur une sphère molle (D=3)

soit le problème aux valeurs propres

$$\hat{H}\Psi = E\Psi \tag{2.82}$$

où \hat{H} désigne l'opérateur hamiltonien, E l'énergie (valeur propre) et Ψ la fonction propre, fonction de r et θ et φ

$$H(r, \theta, \varphi) G = \frac{1}{r^2} \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi') \delta(r - r')$$

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\Delta + V(r, \theta, \varphi)$$

et

$$V(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} V_0; & \text{si } , 0 \leq r \leq a \\ 0; & \text{si } , r > a \end{cases} \tag{2.83}$$

2.3.1 Le cas $0 < V_0 < E$

donc l'équation (2.82) s'écrit

$$\left(-\frac{1}{2}\Delta + V - E\right) G = \frac{1}{r^2}\delta(r - r') \quad (2.84)$$

ou bien

$$\begin{cases} \left(\frac{\Delta}{2} + E\right) G(r, r') = -\frac{1}{r^2}\delta(r - r'); & \text{si } r > a \\ \left(\frac{\Delta}{2} - V_0 + E\right) G(r, r') = -\frac{1}{r^2}\delta(r - r'); & \text{si } 0 \leq r \leq a \end{cases} \quad (2.85)$$

comme

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \quad (2.86)$$

Le premier cas ($r, r' > a$) (r et r' à l'extérieur de la sphère) :

soit l'équation

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + 2E\right) G^{1,2,2}(r, r') = -\frac{2}{r^2}\delta(r - r') \quad (2.87)$$

ou bien

$$r^2 \frac{d^2 G^{1,2,2}(r, r')}{dr^2} + 2r \frac{dG^{1,2,2}(r, r')}{dr} + (2Er^2 - l(l+1)) G^{1,2,2}(r, r') = -2\delta(r - r') \quad (2.88)$$

qu'est l'équation de Bessel. La fonction de Green G est construite à partir des solutions de cette équation

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dy}{dr} \right) + (2Er^2 - l(l+1)) y = 0$$

qui sont $J_{l+\frac{1}{2}}$ et $Y_{l+\frac{1}{2}}$, donc

$$G^{1,2,2}(r, r') = \begin{cases} C(r') \left[Y_{l+\frac{1}{2}}(kr) - \beta J_{l+\frac{1}{2}}(kr) \right] & a \leq r \leq r' \\ D(r') J_{l+\frac{1}{2}}(kr) & r' \leq r < \infty \end{cases}$$

d'après la continuité de la fonction de Green au point $r = r'$

$$G^{1,2,2}(r'_+, r') - G^{1,2,2}(r'_-, r') = 0 \iff C(r') Y_{l+\frac{1}{2}}(kr')$$

$$- [D(r') + \beta C(r')] J_{l+\frac{1}{2}}(kr') = 0 \quad (2.89)$$

et la discontinuité de la dérivée première par rapport r de la fonction de Green au point $r = r'$ on trouve

$$\frac{d}{dr} G^{1,2,2}(r'_+, r') - \frac{d}{dr} G^{1,2,2}(r'_-, r') = \frac{2}{r'^2} \iff C(r') Y'_{l+\frac{1}{2}}(kr')$$

$$- [D(r') + \beta C(r')] J_{l+\frac{1}{2}}(kr') = \frac{-2}{kr'^2} \quad (2.90)$$

$$C(r') = \frac{\pi J_{l+\frac{1}{2}}(kr')}{r'} \quad (2.91)$$

$$D(r') = \frac{\pi [Y_{l+\frac{1}{2}}(kr') + \beta J_{l+\frac{1}{2}}(kr')]}{r'} \quad (2.92)$$

$$G^{1,2,2}(r, r') = \frac{\pi}{r'} \begin{cases} [Y_{l+\frac{1}{2}}(kr) - \beta J_{l+\frac{1}{2}}(kr)] J_{l+\frac{1}{2}}(kr') & a \leq r \leq r' \\ [Y_{l+\frac{1}{2}}(kr') + \beta J_{l+\frac{1}{2}}(kr')] J_{l+\frac{1}{2}}(kr) & r' \leq r < \infty \end{cases} \quad (2.93)$$

le cas : $0 \leq r' \leq r \leq a$ (r et r' à l'intérieur de la sphère)

$$(r^2 \Psi_1)' + (2r^2(E - V_0) - l(l+1)) \Psi_1 = 0 \quad (2.94)$$

L'équation (2.94) admet deux solutions indépendantes $J_{l+\frac{1}{2}}$ et $Y_{l+\frac{1}{2}}$ et la fonction de Green correspondante est

$$G^{l,1,1}(r, r') = \begin{cases} A(r') J_{l+\frac{1}{2}}(\mu r) & 0 \leq r \leq r' \\ B(r') \left[Y_{l+\frac{1}{2}}(\mu r) - \alpha J_{l+\frac{1}{2}}(\mu r) \right] & r' \leq r \leq a \end{cases} \quad (2.95)$$

d'après la continuité de la fonction de Green au point $r = r'$

$$G^{l,1,1}(r'_+, r') - G^{l,1,1}(r'_-, r') = 0 \iff B(r') Y_{l+\frac{1}{2}}(\mu r') \\ - [A(r') + \alpha B(r')] J_{l+\frac{1}{2}}(\mu r') = 0 \quad (2.96)$$

et la discontinuité de la dérivée première par rapport r de la fonction de Green au point $r = r'$ on a

$$\frac{d}{dr} G^{l,1,1}(r'_+, r') - \frac{d}{dr} G^{l,1,1}(r'_-, r') = \frac{2}{r'^2} \iff B(r') Y'_{l+\frac{1}{2}}(\mu r') \\ - [A(r') + \alpha B(r')] J'_{l+\frac{1}{2}}(\mu r') = \frac{2}{\mu r'^2} \quad (2.97)$$

$$B(r') = \frac{-\pi J_{l+\frac{1}{2}}(\mu r')}{r'} \quad (2.98)$$

$$A(r') = \frac{-\pi \left[Y_{l+\frac{1}{2}}(\mu r') + \alpha J_{l+\frac{1}{2}}(\mu r') \right]}{r'} \quad (2.99)$$

Donc

$$G^{l,1,1}(r, r') = -\frac{\pi}{r'} \begin{cases} \left[Y_{l+\frac{1}{2}}(\mu r') + \alpha J_{l+\frac{1}{2}}(\mu r') \right] J_{l+\frac{1}{2}}(\mu r) & 0 \leq r \leq r' \\ \left[Y_{l+\frac{1}{2}}(\mu r) - \alpha J_{l+\frac{1}{2}}(\mu r) \right] J_{l+\frac{1}{2}}(\mu r') & r' \leq r \leq a \end{cases} \quad (2.100)$$

Pour déterminer les coefficients α et β , nous utilisons la continuité de la fonction de Green et la discontinuité de sa dérivée au point $r' = r = a$ c-à-d on résoud le système :

$$\begin{aligned}
G^{l,1,1}(a_-, a) &= G^{l,2,2}(a_+, a) \Leftrightarrow - \left[Y_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) - \alpha J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right] J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \\
&= \left[Y_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \beta J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right] J_{l+\frac{1}{2}}(ka)
\end{aligned} \tag{2.101}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr} G^{l,2,2}(a_+, a) - \frac{d}{dr} G^{l,1,1}(a_-, a) &= \frac{2}{a^2} \Leftrightarrow k \left[Y'_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \beta J'_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right] J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \\
&+ \mu \left[Y'_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) - \alpha J'_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right] J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) = \frac{2}{\pi a}
\end{aligned} \tag{2.102}$$

Après quelques simplifications nous obtenons le coefficient α :

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{2J_{l+\frac{1}{2}}(ka) + \pi a J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \left[kY_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \mu J_{l+\frac{1}{2}}(ka) Y'_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]}{\pi a J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \left[kJ_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \mu J_{l+\frac{1}{2}}(ka) J'_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]} + \\
&\frac{kJ_{l+\frac{1}{2}}(ka) \left[Y_{l+\frac{1}{2}}(ka) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) - J_{l+\frac{1}{2}}(ka) Y'_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right]}{J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \left[kJ_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \mu J_{l+\frac{1}{2}}(ka) J'_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]}
\end{aligned}$$

la forme la plus simple est

$$\alpha = \frac{4J_{l+\frac{1}{2}}(ka) + \pi a J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \left[kY_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \mu J_{l+\frac{1}{2}}(ka) Y'_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]}{\pi a J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \left[kJ_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \mu J_{l+\frac{1}{2}}(ka) J'_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]} \tag{2.103}$$

de la même manière, nous trouvons le coefficient

$$\beta = \frac{4J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) + \pi a J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \left[\mu Y_{l+\frac{1}{2}}(ka) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) - kJ_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) Y'_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right]}{\pi a J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \left[\mu J_{l+\frac{1}{2}}(ka) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) - kJ_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J'_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right]} \tag{2.104}$$

Enfin, la fonction de Green à l'intérieur de la sphère et en dehors de la sphère sont données

par

$$G^{l,1,1}(r, r') = -\frac{\pi}{r'} Y_{l+\frac{1}{2}}(\mu r') J_{l+\frac{1}{2}}(\mu r) + \frac{\pi}{r'} \left[\frac{4J_{l+\frac{1}{2}}(ka) + \pi a J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \left[kY_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J'_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \mu J_{l+\frac{1}{2}}(ka) Y'_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]}{\pi a J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \left[kJ_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J'_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \mu J_{l+\frac{1}{2}}(ka) J'_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]} \right] J_{l+\frac{1}{2}}(\mu r') J_{l+\frac{1}{2}}(\mu r), \quad 0 \leq r \leq r' \quad (2.105)$$

$$G^{l,1,1}(r, r') = -\frac{\pi}{r'} Y_{l+\frac{1}{2}}(\mu r) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu r') + \frac{\pi}{r'} \left[\frac{4J_{l+\frac{1}{2}}(ka) + \pi a J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \left[kY_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J'_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \mu J_{l+\frac{1}{2}}(ka) Y'_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]}{\pi a J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \left[kJ_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J'_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \mu J_{l+\frac{1}{2}}(ka) J'_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]} \right] J_{l+\frac{1}{2}}(\mu r) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu r'), \quad r' \leq r \leq a \quad (2.106)$$

$$G^{l,2,2}(r, r') = \frac{\pi}{r'} Y_{l+\frac{1}{2}}(kr) J_{l+\frac{1}{2}}(kr') - \frac{\pi}{r'} \left[\frac{4J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) + \pi a J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \left[\mu Y_{l+\frac{1}{2}}(ka) J'_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) - kJ_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) Y'_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right]}{\pi a J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \left[\mu J_{l+\frac{1}{2}}(ka) J'_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) - kJ_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J'_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right]} \right] J_{l+\frac{1}{2}}(kr) J_{l+\frac{1}{2}}(kr'), \quad a \leq r \leq r' \quad (2.107)$$

$$G^{l,2,2}(r, r') = \frac{\pi}{r'} Y_{l+\frac{1}{2}}(kr') J_{l+\frac{1}{2}}(kr) - \frac{\pi}{r'} \left[\frac{4J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) + \pi a J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \left[\mu Y_{l+\frac{1}{2}}(ka) J'_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) - kJ_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) Y'_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right]}{\pi a J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \left[\mu J_{l+\frac{1}{2}}(ka) J'_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) - kJ_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J'_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right]} \right] J_{l+\frac{1}{2}}(kr') J_{l+\frac{1}{2}}(kr), \quad r' \leq r < \infty \quad (2.108)$$

Le cas $0 < r' \leq a \leq r < \infty$ (**r** à l'intérieur et **r'** à l'extérieur de la sphère)

Dans ce cas, la fonction de Green s'écrit comme

$$G^{l,2,1}(r, r') = -\frac{\pi}{r'} \left[Y_{l+\frac{1}{2}}(kr) - \lambda J_{l+\frac{1}{2}}(kr) \right] J_{l+\frac{1}{2}}(\mu r') \quad (2.109)$$

où λ est une constante déterminée à l'aide de la continuité de la fonction de Green à $r = a$:

$$G^{l,2,1}(r, a) \Big|_{r=a} = G^{l,2,2}(r, a) \Big|_{r=a} \quad (2.110)$$

puis

$$\begin{aligned} & - \left[Y_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \lambda J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right] J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) = Y_{l+\frac{1}{2}}(ka) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \\ & - \frac{4J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) + \pi a J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \left[\mu Y_{l+\frac{1}{2}}(ka) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) - k J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) Y'_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right]}{\pi a \left[\mu J_{l+\frac{1}{2}}(ka) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) - k J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right]} J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \end{aligned} \quad (2.111)$$

où

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{Y_{l+\frac{1}{2}}(ka)}{J_{l+\frac{1}{2}}(ka)} + \frac{Y_{l+\frac{1}{2}}(ka)}{J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a)} - \\ & \frac{4J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) + \pi a J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \left[\mu Y_{l+\frac{1}{2}}(ka) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) - k J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) Y'_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right]}{\pi a J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \left[\mu J_{l+\frac{1}{2}}(ka) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) - k J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right]} \\ &= \frac{Y_{l+\frac{1}{2}}(ka)}{J_{l+\frac{1}{2}}(ka)} - \frac{\pi a k J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \left(J_{l+\frac{1}{2}}(ka) Y_{l+\frac{1}{2}}(ka) - Y'_{l+\frac{1}{2}}(ka) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right) + 4J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a)}{\pi a J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \left[\mu J_{l+\frac{1}{2}}(ka) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) - k J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right]} \\ \lambda &= \frac{Y_{l+\frac{1}{2}}(ka)}{J_{l+\frac{1}{2}}(ka)} - \frac{6}{\pi a \left[\mu J_{l+\frac{1}{2}}(ka) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) - k J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right]} \end{aligned} \quad (2.112)$$

alors la fonction de Green mixte devient

$$G^{l,2,1}(r, r') = -\frac{\pi}{r'} Y_{l+\frac{1}{2}}(kr) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu r')$$

$$+ \frac{\pi}{r'} \left(\frac{Y_{l+\frac{1}{2}}(ka)}{J_{l+\frac{1}{2}}(ka)} - \frac{6}{\pi a \left[\mu J_{l+\frac{1}{2}}(ka) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) - k J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right]} \right) J_{l+\frac{1}{2}}(kr) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu r')$$
(2.113)

Le cas $0 < r \leq a \leq r' < \infty$ (**r à l'intérieur et r' à l'extérieur de la sphère**)

Dans ce cas, la fonction de Green s'écrit comme

$$G^{l,1,2}(r, r') = \frac{\pi}{r'} J_{l+\frac{1}{2}}(\mu r) \left[Y_{l+\frac{1}{2}}(kr') - \eta J_{l+\frac{1}{2}}(kr') \right]$$

où η est une constante déterminée à l'aide de la continuité de la fonction de Green à $r = a$:

$$G^{l,1,2}(r, a) \Big|_{r=a} = G^{l,1,1}(r, a) \Big|_{r=a}$$
(2.114)

$$J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \left[Y_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \eta J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right] = -Y_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a)$$

$$+ \left[\frac{4J_{l+\frac{1}{2}}(ka) + \pi a J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \left[k Y_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \mu J_{l+\frac{1}{2}}(ka) Y'_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]}{\pi a \left[k J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \mu J_{l+\frac{1}{2}}(ka) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]} \right] J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a)$$
(2.115)

puis

$$\eta = \frac{Y_{l+\frac{1}{2}}(ka)}{J_{l+\frac{1}{2}}(ka)} + \frac{Y_{l+\frac{1}{2}}(\mu a)}{J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a)} - \frac{4J_{l+\frac{1}{2}}(ka) + \pi a J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \left[k Y_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \mu J_{l+\frac{1}{2}}(ka) Y'_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]}{\pi a J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \left[k J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \mu J_{l+\frac{1}{2}}(ka) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]}$$

ainsi après quelques simplifications on a

$$\eta = \frac{Y_{l+\frac{1}{2}}(ka)}{J_{l+\frac{1}{2}}(ka)} - \frac{6}{\pi a \left[k J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \mu J_{l+\frac{1}{2}}(ka) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]} \quad (2.116)$$

alors la fonction de Green mixte devient

$$G^{l,1,2}(r, r') = \frac{\pi}{r'} Y_{l+\frac{1}{2}}(kr') J_{l+\frac{1}{2}}(\mu r)$$

$$- \frac{\pi}{r'} \left(\frac{Y_{l+\frac{1}{2}}(ka)}{J_{l+\frac{1}{2}}(ka)} - \frac{6}{\pi a \left[k J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \mu J_{l+\frac{1}{2}}(ka) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]} \right) J_{l+\frac{1}{2}}(kr') J_{l+\frac{1}{2}}(\mu r) \quad (2.117)$$

2.3.2 Le cas $0 < \mathbf{E} < \mathbf{V}_0$

Dans ce cas μ' devient nombre imaginaire pur $\mu' = i\mu$:

$$\mu' = i\sqrt{2(E - V_0)} = i\mu \quad (2.118)$$

$0 \leq r \leq r' \leq a$: (**r et r' à l'intérieur du sphère**)

$$(r^2 \Psi_1)' + (2r^2(E - V_0) + l(l+1)) \Psi_1 = 0 \quad (2.119)$$

L'équation (2.119) admet deux solutions independantes $I_{l+\frac{1}{2}}$ et $K_{l+\frac{1}{2}}$ et la fonction de Green correspondante est

$$G^{l,3,3}(r, r') = \begin{cases} A(r') I_{l+\frac{1}{2}}(\mu r) & 0 \leq r \leq r' \\ B(r) \left[K_{l+\frac{1}{2}}(\mu r) - \gamma I_{l+\frac{1}{2}}(\mu r) \right] & r' \leq r \leq a \end{cases} \quad (2.120)$$

d'après la continuité de la fonction de Green au point $r = r'$

$$G^{1,3,3}(r'_+, r') - G^{1,3,3}(r'_-, r') = 0 \iff B(r') K_{l+\frac{1}{2}}(\mu r')$$

$$- [A(r') + \gamma B(r')] I_{l+\frac{1}{2}}(\mu r') = 0 \quad (2.121)$$

et la discontinuité de la dérivée première par rapport r de la fonction de Green au point $r = r'$ on a

$$\frac{d}{dr} G^{1,3,3}(r'_+, r') - \frac{d}{dr} G^{1,3,3}(r'_-, r') = \frac{2}{r'^2} \iff B(r') K'_{l+\frac{1}{2}}(\mu r')$$

$$- [A(r') + \gamma B(r')] I'_{l+\frac{1}{2}}(\mu r') = \frac{2}{\mu r'^2} \quad (2.122)$$

$$B(r') = -\frac{2I_{l+\frac{1}{2}}(\mu r')}{r'} \quad (2.123)$$

$$A(r') = -2\frac{K_{l+\frac{1}{2}}(\mu r') - \gamma I_{l+\frac{1}{2}}(\mu r')}{r'} \quad (2.124)$$

Donc

$$G^{1,3,3}(r, r') = -\frac{2}{r'} \begin{cases} \left[K_{l+\frac{1}{2}}(\mu r') - \gamma I_{l+\frac{1}{2}}(\mu r') \right] I_{l+\frac{1}{2}}(\mu r) & 0 \leq r \leq r' \\ \left[K_{l+\frac{1}{2}}(\mu r) - \gamma I_{l+\frac{1}{2}}(\mu r) \right] I_{l+\frac{1}{2}}(\mu r') & r' \leq r \leq a \end{cases} \quad (2.125)$$

le cas $a \leq r \leq r' < \infty$: (r et r' à l'extérieur de la sphère)

de même manière de la construction du premier cas on obtient

$$G^{1,2,2}(r, r') \equiv G^{1,3,2}(r, r') = \frac{\pi}{r'} \begin{cases} \left[Y_{l+\frac{1}{2}}(kr) - \beta_1 J_{l+\frac{1}{2}}(kr) \right] J_{l+\frac{1}{2}}(kr) & a \leq r \leq r' \\ \left[Y_{l+\frac{1}{2}}(kr') + \beta_1 J_{l+\frac{1}{2}}(kr') \right] J_{l+\frac{1}{2}}(kr) & r' \leq r < \infty \end{cases} \quad (2.126)$$

Pour déterminer les coefficients γ et β_1 , nous utilisons la continuité de la fonction de Green et la discontinuité de sa dérivée au point $r' = r = a$ c-à-d on résoud le système :

$$\begin{aligned} G^{1,3,3}(a_-, a) = G^{1,3,2}(a_+, a) &\Leftrightarrow -2 \left[K_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) - \gamma I_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right] I_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \\ &= \pi \left[Y_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \beta_1 J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right] J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \end{aligned} \quad (2.127)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} G^{1,3,2}(a_+, a) - \frac{d}{dr} G^{1,3,3}(a_-, a) &= \frac{2}{a^2} \Leftrightarrow \pi k \left[Y'_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \beta_1 J'_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right] J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \\ &+ 2\mu \left[K'_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) - \gamma I'_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right] I_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) = \frac{2}{a} \end{aligned} \quad (2.128)$$

après quelques simplifications nous obtenons le coefficient γ :

$$\gamma = \frac{4J_{l+\frac{1}{2}}(ka) + 2aI_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \left[kK_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \mu J_{l+\frac{1}{2}}(ka) K_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]}{2aI_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \left[kI_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \mu J_{l+\frac{1}{2}}(ka) I_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]} \quad (2.129)$$

et

$$\beta_1 = \frac{4I_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) + \pi a J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \left[\mu I'_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) Y_{l+\frac{1}{2}}(ka) - k Y'_{l+\frac{1}{2}}(ka) I_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]}{\pi a J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \left[\mu I'_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) - k J'_{l+\frac{1}{2}}(ka) I_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]} \quad (2.130)$$

Enfin, la fonction Green à l'intérieur de la sphère est donnée par

$$\begin{aligned}
G^{1,3,3}(r, r') &= \frac{2}{r'} K_{l+\frac{1}{2}}(\mu r') I_{l+\frac{1}{2}}(\mu r) - \frac{2}{r'} \\
&\frac{4J_{l+\frac{1}{2}}(ka) + 2aI_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \left[kK_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J'_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \mu J_{l+\frac{1}{2}}(ka) K_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]}{2aI_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \left[kI_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J'_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \mu J_{l+\frac{1}{2}}(ka) I_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]} \\
&I_{l+\frac{1}{2}}(\mu r) I_{l+\frac{1}{2}}(\mu r') \quad 0 \leq r \leq r' \tag{2.131}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^{1,3,3}(r, r') &= \frac{2}{r'} K_{l+\frac{1}{2}}(\mu r) I_{l+\frac{1}{2}}(\mu r') - \frac{2}{r'} \\
&\frac{4J_{l+\frac{1}{2}}(ka) + 2aI_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \left[kK_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J'_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \mu J_{l+\frac{1}{2}}(ka) K_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]}{2aI_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \left[kI_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J'_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \mu J_{l+\frac{1}{2}}(ka) I_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]} \\
&I_{l+\frac{1}{2}}(\mu r) I_{l+\frac{1}{2}}(\mu r') \quad r' \leq r \leq a \tag{2.132}
\end{aligned}$$

$$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} G^{1,3,3}(r, r') = 0$$

avec

$$\frac{I_{l+\frac{1}{2}}(\mu a)}{\mu I_{l+\frac{3}{2}}(\mu a)} \rightarrow 0, \frac{K_{l+\frac{1}{2}}(\mu a)}{\mu I_{l+\frac{3}{2}}(\mu a)} \rightarrow 0, \text{ et } K_{l+\frac{1}{2}}(\mu r) I_{l+\frac{1}{2}}(\mu r') \rightarrow 0, \text{ quand } \mu \rightarrow +\infty$$

$$\begin{aligned}
G^{1,3,2}(r, r') &= \frac{\pi}{r'} Y_{l+\frac{1}{2}}(kr) J_{l+\frac{1}{2}}(kr') - \frac{\pi}{r'} \\
&\frac{4I_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) + \pi a J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \left[\mu I'_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) Y_{l+\frac{1}{2}}(ka) - k Y'_{l+\frac{1}{2}}(ka) I_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]}{\pi a J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \left[\mu I'_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) - k J'_{l+\frac{1}{2}}(ka) I_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]} \\
&J_{l+\frac{1}{2}}(kr) J_{l+\frac{1}{2}}(kr') \quad a \leq r \leq r' \tag{2.133}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^{1,3,2}(r, r') &= \frac{\pi}{r'} Y_{l+\frac{1}{2}}(kr') J_{l+\frac{1}{2}}(kr) - \frac{\pi}{r'} \\
&\frac{4I_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) + \pi a J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \left[\mu I'_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) Y_{l+\frac{1}{2}}(ka) - k Y'_{l+\frac{1}{2}}(ka) I_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]}{\pi a J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \left[\mu I'_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) - k J'_{l+\frac{1}{2}}(ka) I_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]}
\end{aligned}$$

$$J_{l+\frac{1}{2}}(kr) J_{l+\frac{1}{2}}(kr) \quad r' \leq r < \infty \quad (2.134)$$

Le cas $0 < r' \leq a \leq r < \infty$ (r' à l'intérieur et r à l'extérieur de la sphère)

Dans ce cas la fonction de Green s'écrit comme

$$G^{l,3,1}(r, r') = -\frac{\pi}{r'} \left[Y_{l+\frac{1}{2}}(kr) - \lambda_1 J_{l+\frac{1}{2}}(kr) \right] I_{l+\frac{1}{2}}(\mu r') \quad (2.135)$$

où λ_1 est une constante à déterminer par la continuité de la fonction de Green au point $r = a$:

$$G^{l,3,1}(r, a) \Big|_{r=a} = G^{l,3,2}(r, a) \Big|_{r=a} \Leftrightarrow \quad (2.136)$$

$$\begin{aligned} & - \left[Y_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \lambda_1 J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right] I_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \quad (2.137) \\ = & y_{l+\frac{1}{2}}(ka) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \\ & \left[\frac{4I_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) + \pi a J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \left[\mu I_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) Y_{l+\frac{1}{2}}(ka) - k Y'_{l+\frac{1}{2}}(ka) I_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]}{\pi a \left[\mu I_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) - k J_{l+\frac{1}{2}}(ka) I_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]} \right] J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \end{aligned}$$

après quelques simplifications

$$\lambda_1 = \frac{Y_{l+\frac{1}{2}}(ka)}{J_{l+\frac{1}{2}}(ka)} - \frac{6}{\pi a \left[\mu I_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) - k J_{l+\frac{1}{2}}(ka) I_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]} \quad (2.138)$$

alors la fonction de Green mixte devient

$$\begin{aligned} G^{l,3,1}(r, r') &= -\frac{\pi}{r'} Y_{l+\frac{1}{2}}(kr) I_{l+\frac{1}{2}}(\mu r') \\ &+ \frac{\pi}{r'} \left[\frac{Y_{l+\frac{1}{2}}(ka)}{J_{l+\frac{1}{2}}(ka)} - \frac{6}{\pi a \left[\mu I_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) - k J_{l+\frac{1}{2}}(ka) I_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]} \right] J_{l+\frac{1}{2}}(kr) I_{l+\frac{1}{2}}(\mu r') \quad (2.139) \end{aligned}$$

$$\lim_{v_0 \rightarrow +\infty} G^{l,3,1}(r, r') = -\infty$$

avec

$$\frac{I_{l+\frac{1}{2}}(\mu r')}{\mu I_{l+\frac{3}{2}}(\mu a)} \rightarrow 0, \text{ si } r' < a, \text{ quand } \mu \rightarrow +\infty$$

le cas $0 < r \leq a \leq r' < \infty$ (**r à l'intérieur et r' à l'extérieur de la sphère**)

Dans ce cas la fonction de Green s'écrit comme

$$G^{l,1,3}(r, r') = \frac{\pi}{r'} I_{l+\frac{1}{2}}(\mu r) \left[Y_{l+\frac{1}{2}}(kr') - \eta_1 J_{l+\frac{1}{2}}(kr') \right] \quad (2.140)$$

où η_1 est une constante à déterminer par la continuité de la fonction de Green au point $r = a$:

$$G^{l,1,3}(r, a) \Big|_{r=a} = G^{l,3,3}(r, a) \Big|_{r=a} \quad (2.141)$$

$$\begin{aligned} -\pi \left[Y_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \eta_1 J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right] &= 2K_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \\ \frac{4J_{l+\frac{1}{2}}(ka) + 2aI_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \left[\mu K'_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) - kJ'_{l+\frac{1}{2}}(ka) K_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]}{a \left[\mu I'_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) - kJ'_{l+\frac{1}{2}}(ka) I_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]} \\ \eta_1 &= \frac{Y_{l+\frac{1}{2}}(ka)}{J_{l+\frac{1}{2}}(ka)} - \frac{6}{\pi a \left[\mu I'_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) - kJ'_{l+\frac{1}{2}}(ka) I_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]} \end{aligned} \quad (2.142)$$

alors la fonction de Green mixte devient :

$$\begin{aligned} G^{l,1,3}(r, r') &= \frac{\pi}{r'} Y_{l+\frac{1}{2}}(kr') I_{l+\frac{1}{2}}(\mu r) \\ &- \left[\frac{Y_{l+\frac{1}{2}}(ka)}{J_{l+\frac{1}{2}}(ka)} - \frac{6}{\pi a \left[\mu I'_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) - kJ'_{l+\frac{1}{2}}(ka) I_{l+\frac{1}{2}}(\mu a) \right]} \right] J_{l+\frac{1}{2}}(kr') I_{l+\frac{1}{2}}(\mu r) \end{aligned} \quad (2.143)$$

$$\lim_{V_0 \rightarrow +\infty} G^{l,1,3}(r, r') = +\infty$$

avec

$$\frac{I_{l+\frac{1}{2}}(\mu r)}{\mu I_{l+\frac{3}{2}}(\mu a)} \rightarrow 0, \text{ si } r < a, \text{ et } \frac{I_{l+\frac{1}{2}}(\mu a)}{\mu I_{l+\frac{3}{2}}(\mu a)} \rightarrow 0, \quad \text{quand } \mu \rightarrow +\infty$$

d'où

$$\lim_{V_0 \rightarrow +\infty} G^{l,3,2}(r, r') = \frac{\pi}{r'} \begin{cases} \left[Y_{l+\frac{1}{2}}(kr) - \frac{Y_{l+\frac{1}{2}}(ka)}{J_{l+\frac{1}{2}}(ka)} J_{l+\frac{1}{2}}(kr) \right] J_{l+\frac{1}{2}}(kr'), & a \leq r \leq r' \\ \left[Y_{l+\frac{1}{2}}(kr') - \frac{Y_{l+\frac{1}{2}}(ka)}{J_{l+\frac{1}{2}}(ka)} J_{l+\frac{1}{2}}(kr') \right] J_{l+\frac{1}{2}}(kr), & r' \leq r < +\infty \end{cases} \quad (2.144)$$

2.3.3 Le puits sphérique ($V_0 < 0$)

Dans ce cas le potentiel est

$$V(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} -V_0; & \text{si } , 0 \leq r \leq a \\ 0; & \text{si } , r > a \end{cases} \quad (2.145)$$

le cas $0 \leq r \leq r' \leq a$ (r et r' à l'intérieur de la sphère) :

$$(r^2 \Psi_1')' + (2r^2(V_0 + E) + l(l+1)) \Psi_1 = 0 \quad (2.146)$$

$$\text{notons,} \quad \mu_1 = \sqrt{2(V_0 + E)} \quad (2.147)$$

De même manière, on construit la fonction de Green, donc, nous obtenons

$$G^{l,4,1}(r, r') = -\frac{\pi}{r'} \begin{cases} \left[Y_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 r') - \alpha_4 J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 r') \right] J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 r) & 0 \leq r \leq r' \\ \left[Y_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 r) - \alpha_4 J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 r) \right] J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 r') & r' \leq r \leq a \end{cases} \quad (2.148)$$

le cas $a \leq r \leq r' < \infty$:(r et r' à l'extérieur de la sphère)

$$G^{1,2,2}(r, r') \equiv G^{1,4,3}(r, r') = \frac{\pi}{r'} \begin{cases} \left[Y_{l+\frac{1}{2}}(kr) - \beta_4 J_{l+\frac{1}{2}}(kr) \right] J_{l+\frac{1}{2}}(kr') & a \leq r \leq r' \\ \left[Y_{l+\frac{1}{2}}(kr') - \beta_4 J_{l+\frac{1}{2}}(kr') \right] J_{l+\frac{1}{2}}(kr) & r' \leq r < \infty \end{cases} \quad (2.149)$$

De même procédure nous déterminons les coefficients α_4 et β_4

$$\alpha_4 = \frac{4J_{l+\frac{1}{2}}(ka) + \pi a J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) \left[kY_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \mu_1 J_{l+\frac{1}{2}}(ka) Y'_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) \right]}{\pi a J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) \left[kJ_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \mu_1 J_{l+\frac{1}{2}}(ka) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) \right]} \quad (2.150)$$

$$\text{et } \beta_4 = \frac{4J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) + \pi a J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \left[\mu_1 Y_{l+\frac{1}{2}}(ka) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) - kJ_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) Y'_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right]}{\pi a J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \left[\mu_1 J_{l+\frac{1}{2}}(ka) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) - kJ_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right]} \quad (2.151)$$

donc les fonctions de Green à l'intérieur et à l'extérieur sont données par

$$G^{1,4,1}(r, r') = -\frac{\pi}{r'} Y_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 r') J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 r) + \frac{\pi}{r'}$$

$$\left[\frac{4J_{l+\frac{1}{2}}(ka) + \pi a J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) \left[kY_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \mu_1 J_{l+\frac{1}{2}}(ka) Y'_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) \right]}{\pi a J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) \left[kJ_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \mu_1 J_{l+\frac{1}{2}}(ka) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) \right]} \right] J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 r') J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 r) \quad 0 \leq r \leq r' \quad (2.152)$$

$$G^{1,4,1}(r, r') = -\frac{\pi}{r'} Y_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 r) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 r') + \frac{\pi}{r'}$$

$$\left[\frac{4J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) + \pi a J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \left[\mu_1 Y_{l+\frac{1}{2}}(ka) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) - kJ_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) Y'_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right]}{\pi a J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \left[\mu_1 J_{l+\frac{1}{2}}(ka) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) - kJ_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right]} \right] J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 r) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 r') \quad r' \leq r \leq a \quad (2.153)$$

$$\text{et } G^{1,4,3}(r, r') = \frac{\pi}{r'} Y_{l+\frac{1}{2}}(kr) J_{l+\frac{1}{2}}(kr') - \frac{\pi}{r'}$$

$$\left[\frac{4J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) + \pi a J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \left[\mu_1 Y_{l+\frac{1}{2}}(ka) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) - k J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) Y'_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right]}{\pi a J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \left[\mu_1 J_{l+\frac{1}{2}}(ka) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) - k J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right]} \right] J_{l+\frac{1}{2}}(kr) J_{l+\frac{1}{2}}(kr') \quad a \leq r \leq r' \quad (2.154)$$

$$G^{l,4,3}(r, r') = \frac{\pi}{r'} Y_{l+\frac{1}{2}}(kr') J_{l+\frac{1}{2}}(kr) - \frac{\pi}{r'}$$

$$\left[\frac{4J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) + \pi a J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \left[\mu_1 Y_{l+\frac{1}{2}}(ka) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) - k J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) Y'_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right]}{\pi a J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \left[\mu_1 J_{l+\frac{1}{2}}(ka) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) - k J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right]} \right] J_{l+\frac{1}{2}}(kr') J_{l+\frac{1}{2}}(kr), \quad r' \leq r < \infty \quad (2.155)$$

Le cas $0 < r' \leq a \leq r < \infty$ (**r' à l'intérieur et r à l'extérieur de la sphère**)

dans ce cas la fonction de Green s'écrit

$$G^{l,2,4}(r, r') = -\frac{\pi}{r'} \left[Y_{l+\frac{1}{2}}(kr) - \lambda_4 J_{l+\frac{1}{2}}(kr) \right] J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 r') \quad (2.156)$$

$$\text{où, } \lambda_4 = \frac{Y_{l+\frac{1}{2}}(ka)}{J_{l+\frac{1}{2}}(ka)} + \frac{-6}{\pi a \left[\mu_1 J_{l+\frac{1}{2}}(ka) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) - k J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right]} \quad (2.157)$$

$$\text{donc } G^{l,2,4}(r, r') = -\frac{\pi}{r'} Y_{l+\frac{1}{2}}(kr) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 r')$$

$$+ \frac{\pi}{r'} \left[\frac{Y_{l+\frac{1}{2}}(ka)}{J_{l+\frac{1}{2}}(ka)} + \frac{-6}{\pi a \left[\mu_1 J_{l+\frac{1}{2}}(ka) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) - k J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \right]} \right] J_{l+\frac{1}{2}}(kr) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 r') \quad (2.158)$$

le cas $0 < r \leq a \leq r' < \infty$ (**r à l'intérieur et r' à l'extérieur de la sphère**) :

dans ce cas la fonction de Green s'écrit

$$G^{l,4,2}(r, r') = \frac{\pi}{r'} J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 r') \left[Y_{l+\frac{1}{2}}(kr') - \eta_4 J_{l+\frac{1}{2}}(kr') \right] \quad (2.159)$$

où η_4 est donné par

$$\eta_4 = \frac{Y_{l+\frac{1}{2}}(ka)}{J_{l+\frac{1}{2}}(ka)} - \frac{6}{\pi a \left[kJ_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) \mathcal{J}_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \mu_1 J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \mathcal{J}_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) \right]} \quad (2.160)$$

donc la fonction de Green dans cette région est donnée par

$$G^{l,4,2}(r, r') = \frac{\pi}{r'} Y_{l+\frac{1}{2}}(kr) J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 r) - \frac{\pi}{r'} \left[\frac{Y_{l+\frac{1}{2}}(ka)}{J_{l+\frac{1}{2}}(ka)} - \frac{6}{\pi a \left[kJ_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) \mathcal{J}_{l+\frac{1}{2}}(ka) - \mu_1 J_{l+\frac{1}{2}}(ka) \mathcal{J}_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 a) \right]} \right] J_{l+\frac{1}{2}}(\mu_1 r) J_{l+\frac{1}{2}}(kr) \quad (2.161)$$

Deuxième partie

**METHODE DES EQ. INTEG. ET
PERTURBATIONS**

Introduction

Dans cette partie nous proposons de résoudre quelques problèmes de physique mathématique en faisant usage des équations intégrales [1, 15]. Tout d'abord on construit l'équation intégrale relative au problème aux limites posé, puis on calcule la fonction de Green [4],[11],[12],[18],[30],[31],[44] associée au problème moyennant la théorie des perturbations indépendantes du temps [3],[14],[26],[27],[28],[43],[34],[53],[56]. Concrètement ce problème entre dans le cadre de la théorie du potentiel très fréquentée par les physiciens de la mécanique quantique. Les potentiels à traiter sont bien étudiés dans la première partie et nous souhaitons retrouver, par le biais de la théorie des perturbations, les noyaux de Green associés à ces différents potentiels [58]. Nous avons trouvé que les termes successifs de la série sont reliés par une formule intégrale que nous avons pu résoudre puis sommer la série pour ainsi construire la solution de Green.

Au troisième chapitre, nous avons présenté la méthode de la théorie des perturbations adaptée à la mécanique quantique en interprétant physiquement les termes de la série de perturbation. Nous avons présenté également le rôle du propagateur de Feynmann [19], [22],[23],[24],[25],[29],[41],[45] et sa relation avec la fonction de Green ainsi qu'avec la fonction d'onde, solution de l'équation de Schrödinger. Et nous avons fini ce chapitre par l'élaboration de l'équation intégrale gouvernant la fonction de Green. Il s'avère que cette équation appartient au problème de Wiener-Hopf de deuxième espèce.

Au quatrième chapitre, nous avons développé la théorie des fonctions sectionnellement analytiques qui a été d'abord appliquée aux problèmes de Hilbert avec succès puis nous l'avons appliquée pour la résolution de notre problème de Wiener-Hopf.

Au cinquième chapitre, nous avons construit la série de perturbations et calculé ses termes moyennant la théorie développée au chapitre 3. Nous avons trouvé que les termes successifs de la série sont reliés par une formule intégrale que nous avons pu résoudre et sommer la série pour ainsi construire la solution de Green. Nous avons aussi, dans ce chapitre, vérifié dans chaque étape de calcul de la série de perturbation, la justesse de notre procédure et ceci en se référant à la méthode directe, pour trois types de potentiels

à deux dimensions : le problème d'une barrière finie, le problème d'un puits fini et le problème d'un puits infini.

Nous avons cloturé ce travail par une conclusion et des perspectives.

Chapitre 3

LA METHODE DES PERTURBATIONS EN MECANIQUE QUANTIQUE

Dans ce chapitre nous allons développer une méthode de traitement des potentiels [11],[12],[30],[23],[41] appelée le développement en séries [7],[13],[40],[63] de perturbation utilisée généralement quand le potentiel est comparativement faible (comparé, par exemple, à l'énergie cinétique du système) [33]. De nos jours, et dans plusieurs travaux (voir références sus-mentionnées), la sommation des séries pour des potentiels non nécessairement faibles converge et reproduit exactement le résultat. Dans notre travail, nous nous proposons aussi une telle tâche pour les potentiels particulier à savoir le potentiel de Heaviside, le potentiel sur le disque et le potentiel sur la sphère. Bien que le développement de perturbation puisse être développé dans un sens strictement mathématique, il s'apprête aussi une interprétation physique intéressante que nous présentons également. Cette méthode mène à une compréhension plus profonde de la mécanique quantique.

3.1 Développement des termes de la série de perturbation

Supposons qu'une particule se déplace dans un potentiel $V(x, t)$. Pour le moment le mouvement sera restreint à une dimension entre les points \mathbf{a} et \mathbf{b} et le noyau de Feynman (souvent dénomé propagateur de Feynmann) est :

$$K_V(b, a) = \int_a^b (\exp\{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} [\frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x, t)] dt\}) Dx(t) \quad (3.1)$$

L'indice V est employé pour nous rappeler que la particule est soumise à l'action du potentiel V . Dorénavant la notation K_0 dénotera le noyau pour le mouvement d'une particule libre sans contraintes physiques. Dans certains cas de potentiels, le noyau K_V peut être déterminé par différentes méthodes se trouvant dans la littérature standard. Par exemple, dans le chapitre 3[23] nous allons déterminer le noyau pour l'oscillateur harmonique soumis à l'action d'une force extérieure $f(t)$. Dans ce cas le potentiel est de la forme :

$$V(x, t) = \frac{m}{2} \omega x^2 - x f(t) \quad (3.2)$$

En général, nous avons constaté que si le potentiel est quadratique en x , le noyau peut être déterminé exactement. Cependant il y a quelques d'autres types de potentiels qui peuvent être traités avec succès à l'aide de l'équation des Schrödinger. Ici nous étudions une technique qui est très utilisée si l'effet du potentiel est petit. Supposons que le potentiel est petit ou bien avec plus de précision supposons que l'intégrale sur le temps du potentiel le long d'un chemin est petit comparativement à la constante de planck \hbar . Puisque l'intégrale de l'exponentiel dans (3.1) dépend de $V(x, t)$, alors :

$$\exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} V(x, t) dt \right] = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} V(x, t) dt + \frac{1}{2!} \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^2 \left[\int_{t_a}^{t_b} V(x, t) dt \right]^2 + \dots \quad (3.3)$$

qui est défini le long de n'importe quel chemin particulier $x(t)$. En utilisant ce développement dans (3.1) on trouve :

$$K_V(b, a) = K_0(b, a) + K^{(1)}(b, a) + K^{(2)}(b, a) + \dots \quad (3.4)$$

où

$$K_0(b, a) = \int_a^b \left[\exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} \frac{m\dot{x}^2}{2} dt\right) \right] Dx(t) \quad (3.5)$$

$$K^{(1)}(b, a) = -\frac{i}{\hbar} \int_a^b Dx(t) \left[\exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} \frac{m\dot{x}^2}{2} dt\right) \right] \int_{t_a}^{t_b} V[x(s), s] ds \quad (3.6)$$

$$K^{(2)}(b, a) = -\frac{1}{2\hbar^2} \int_a^b \left[\exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} \frac{m\dot{x}^2}{2} dt\right) \right] * \int_{t_a}^{t_b} Dx(t) V[x(s), s] ds \int_{t_a}^{t_b} V[x(\dot{s}), \dot{s}] d\dot{s} \quad (3.7)$$

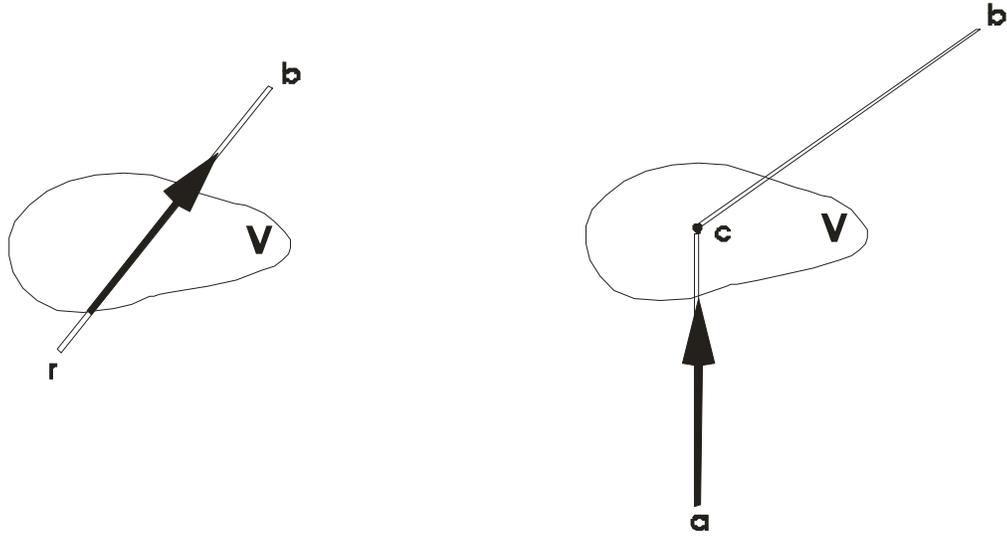
et ainsi de suite...

3.2 Evaluation et interprétation des termes

Considérons d'abord le noyau K , nous souhaitons échanger l'ordre de l'intégration par rapport à la variable \mathbf{x} et le chemin $x(t)$ que nous écrivons :

$$K^{(1)}(b, a) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} F(s) ds \quad (3.8)$$

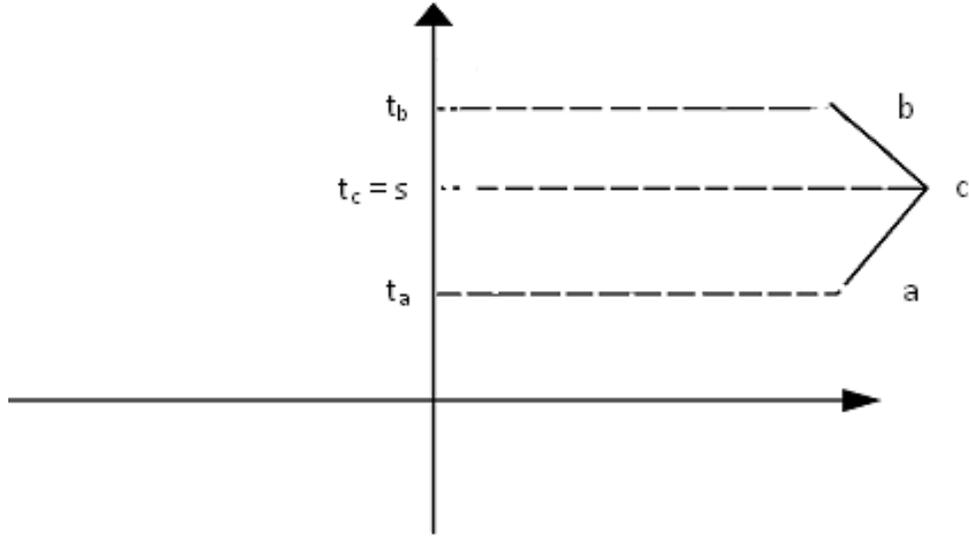
$$\text{où } F(s) = \int_a^b Dx(t) \left[\exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} \frac{m\dot{x}^2}{2} dt\right) \right] V[x(s), s] \quad (3.9)$$



L'intégrale de chemin $F(s)$ peut être décrite comme suit. Elle est la somme sur tous les chemins des amplitudes de la particule libre. Ponderée par le potentiel $V[x(s), s]$ évalué alors au temps s . La seule caractéristique du chemin $x(t)$ qui est impliquée dans ce potentiel particulier V est la position du chemin $x(t)$ au moment particulier $t = s$. Ce que signifie que avant et après le temps s les chemins impliqués dans le calcul de $F(s)$ sont les chemins d'une particule libre. Ce schéma qu'on vient de décrire est représenté sur la figure ci-contre.

En utilisant les mêmes arguments qui ont mené à Eq.(2-31) [23], nous divisons chaque chemin en deux parties, une avant le temps $t = s$ et l'autre après ce temps. Explicitement, nous supposons que chaque chemin passe par le point \mathbf{x}_c à cet instant s (voir fig.3.1). Nous intégrerons sur toutes les valeurs que peut prendre \mathbf{x}_c et ceci dépend du potentiel en question. Si nous dénotons le point $x_c(s)$ par c (c'est-à-dire, $s = t_c$), donc la somme sur tous des tels chemins peut être écrite comme $K_0(b, c)K_0(c, a)$. Ceci signifie que $F(s) = F(t_c)$ peut être écrite comme suit :

$$F(t_c) = \int_{-\infty}^{\infty} K_0(b, c)K_0(c, a)dx_c \quad (3.10)$$



la substitution de ceci dans Eq (3.8) donne (avec $V(x_c, t_c) \equiv V(c)$, voir fig.3.2)

$$K^{(1)}(b, a) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(b, c) V(c) K_0(c, a) dx_c dt_c \quad (3.11)$$

L'équation (3.11) est très importante très utile, et possède une interprétation physique. Nous appelons diffusion l'interaction entre le potentiel et la particule; ainsi nous disons que le potentiel disperse ou diffuse la particule et que l'amplitude de diffusion par un potentiel est $-(\frac{i}{\hbar})V$ par unité de volume et par unité de temps.

Avec cette interprétation nous pouvons décrire K_V de la façon suivante. Evidemment K_V est la somme sur différents groupes de chemins commençant tous par le point **a** et finissant par le point **b** :

1. La particule n'est pas dispersée du tout [$K_0(b, a)$].
2. La particule peut être dispersée une seule fois [$K^{(1)}(b, a)$].
3. La particule peut être dispersée deux fois [$K^{(2)}(b, a)$] etc.....

Chaque groupe de chemins est lui même une somme sur différents groupes.

Considérons par exemple le noyau à une seule dispersion $K^{(1)}(b; a)$. La particule commence à partir de \mathbf{a} , se déplace en tant qu'une particule libre au point $\mathbf{x}_c, \mathbf{t}_c = \mathbf{c}$, où elle est dispersée par le potentiel $V(c)$, après quoi elle se déplace comme une particule libre du point c à la position finale. L'amplitude pour un tel chemin est :

$$K_0(b, c) \left[-\frac{i}{\hbar} V(c) dx_c dt_c \right] K_0(c, a) \quad (3.12)$$

(on doit se rappeler que dans la convention que nous employons le mouvement de la particule est tracé en lisant les formules vers l'avant, c.-à-d., de droite à gauche)

La construction de cette amplitude suit la règle indiquée dans la section.2-5[23], à savoir, que les événements d'amplitudes se produisant en succession à temps se multiplient. La forme finale pour le noyau $K^{(1)}$ est obtenu en ajoutant toutes les amplitudes élémentaires en intégrant sur x_c et t_c comme indiqué dans l'équation (3.11). En utilisant ce raisonnement, nous pouvons noter le noyau $K^{(2)}$ pour la double dispersion immédiatement comme :

$$K^{(2)}(b, a) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int \int K_0(b, c) V(c) K_0(c, d) V(d) K_0(d, a) d\tau_c d\tau_d \quad (3.13)$$

où $d\tau = dx \cdot dt$

Ici, la particule se déplace comme une particule libre de \mathbf{a} à \mathbf{d} . En \mathbf{d} la particule est dispersée par le potentiel $V(d)$ puis elle se déplace alors comme particule libre jusqu'à \mathbf{c} , où elle est dispersée par le potentiel $V(c)$. Ensuite elle se déplace de \mathbf{c} à \mathbf{b} , encore comme particule libre.

Ici nous avons supposé que $t_c > t_d$ et donc :

$$K(b, a) = 0 \quad \text{pour } t_b < t_a. \quad (3.14)$$

Alors (3.13) est correcte sans aucune restriction sur l'intervalle de l'intégration sur t_c et t_d .

3.3 Les équations intégrales

Avant d'appliquer les résultats des paragraphes précédents sur un exemple nous développerons quelques relations mathématiques impliquant les noyaux et les fonctions d'onde des systèmes se déplaçant dans un potentiel. En utilisant les résultats jusqu'ici obtenus, nous pouvons écrire (3.4) comme suit :

$$K_V(b, a) = K_0(b, a) - \frac{i}{\hbar} \int K_0(b, c)V(c)K_0(c, a)d\tau_c \\ \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int \int K_0(b, c)V(c)K_0(c, d)V(d)K_0(d, a)d\tau_c d\tau_d + \dots \quad (3.15)$$

Alternativement, cette expression peut être écrite comme :

$$K_V(b, a) = K_0(b, a) - \frac{i}{\hbar} \int K_0(b, c)V(c) \left[K_0(c, a) - \frac{i}{\hbar} \int K_0(c, d)V(d)K_0(d, a)d\tau_d + \dots \right] d\tau_c \quad (3.16)$$

L'expression entre les crochets a la même forme que (3.15). Ceci signifie que K_V peut être écrit comme :

$$K_V(b, a) = K_0(b, a) - \frac{i}{\hbar} \int K_0(b, c)V(c)K_V(c, a)d\tau_c \quad (3.17)$$

qui est une expression exacte. C'est une équation intégrale déterminant K_V si K_0 est connu. Ainsi le problème de l'intégrale de chemin a été transformé en une équation intégrale.

Ce dernier résultat peut être compris physiquement de la façon suivante : Toute amplitude de transition du système de **a** vers **b**, peut être exprimée comme somme de deux alternatives. La première alternative est l'amplitude que la transition a lieu sans la dispersion, exprimée par K_0 . La deuxième alternative est l'amplitude que la transition a

lieu avec une ou une infinité de dispersions données par le dernier terme de (3.17).

3.4 Développement de la fonction d'onde

[23] a présenté l'idée d'une fonction d'onde et discuté quelques relations entre la fonction d'onde et les noyaux. L'équation (3.42) [23] montre comment la fonction d'onde à l'instant t_b peut être obtenue à partir de la fonction d'onde à un temps plus tôt t_a à l'aide du noyau décrivant le mouvement du système entre les deux instants :

$$\psi(b) = \int K_V(b, a)\psi(a)dx_a \quad (3.18)$$

Si le développement en série de [Eq.(3.12)] pour K_V est substituée dans cette équation, le résultat sera ainsi un développement en série pour $\psi(b)$:

$$\psi(b) = \int K_0(b, a)\psi(a)dx_a - \frac{i}{\hbar} \int \int K_0(b, c)V(c)K_0(c, a)d\tau_c\psi(a)dx_a + \dots \quad (3.19)$$

Le premier terme de la série donne la fonction d'onde à l'instant t_b en supposant que le système est libre entre les moments t_a et t_b . Dénotons ce terme par ϕ :

Ainsi

$$\phi(b) = \int K_0(b, a)\psi(a)dx_a \quad (3.20)$$

En utilisant cette définition, la série de (3.19) peut être réécrite comme :

$$\begin{aligned}\psi(b) &= \phi(b) - \frac{i}{\hbar} \int K_0(b, c) V(c) \phi(c) d\tau_c \\ &\quad + \frac{i}{\hbar^2} \int \int K_0(b, c) V(c) K_0(c, d) V(d) \phi(d) d\tau_c d\tau_d + \dots\end{aligned}\quad (3.21)$$

Exemple En utilisant des arguments semblables à ceux qui mènent à (3.17), on peut prouver que la fonction d'onde $\psi(b)$ satisfait l'équation intégrale :

$$\psi(b) = \phi(b) - \frac{i}{\hbar} \int K_0(b, c) V(c) \psi(c) d\tau_c \quad (3.22)$$

Cette équation intégrale est équivalente à l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = 0 \quad (3.23)$$

En travaillant dans une dimension seulement, on a donc montré comment l'équation de Schrödinger peut être déduite de l'équation intégrale.

3.5 Théorie des perturbations et diagrammes de Feynman

Les " diagrammes de Feynman " ont prouvé d'une manière graphique intuitive pour exprimer la théorie de perturbation. Ces diagrammes émergent naturellement de l'expression de l'intégrale de chemin pour le propagateur par des techniques semblables à celles employées par Kac dans sa preuve que l'espérance conditionnelle satisfait à l'équation de diffusion.

Les outils mathématiques à employer pour obtenir les diagrammes de Feynman

sont presque identiques à celles utilisées dans la section précédente, sauf que maintenant nous travaillons dans l'image intégrale de chemin plutôt que l'image -mesure de Wiener-. comme dans (9.17) et (9,18) [23] et nous développons alors le noyau de Green :

$$\begin{aligned} K(x, t; y, 0) &= \int_{y,0}^{x,t} dx(\tau) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right) d\tau \right] \\ &= \int_{y,0}^{x,t} dx(\tau) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right] \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^j \left(\int V(x(\tau)) d\tau \right)^j \end{aligned} \quad (3.24)$$

dans (3.24) $\exp[i \int_0^t (m\dot{x}^2/2\hbar) d\tau]$ apparaît en tant que facteur de la fonction à intégrer.

Dans la notation de la section 9[55] (qui est la notation habituelle dans la littérature mathématique) le facteur $\rho(x, t) = (4\pi Dt)^{-1/2} \exp(-x^2/4Dt)$ a été absorbé dans la mesure et n'est pas explicitement apparu dans l'écriture de l'espérance.

Le premier terme ($j = 0$) dans le développement (3.24) :

$$\begin{aligned} K_0(x, t; y, 0) &\equiv \int_{y,0}^{x,t} dx(\tau) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t \frac{1}{2} m \dot{x}^2 d\tau \right] \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} \exp \left[\frac{im}{2\hbar t} (x - y)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

est le propagateur de la particule libre. Le terme pour $j = 1$ s'exprime comme

$$K_1(x, t; y, 0) \equiv \int_{y,0}^{x,t} dx(\tau) \exp \left[\frac{im}{2\hbar} \int_0^t \dot{x}^2 d\tau \right] \int_0^t V(x(\tau)) d\tau \quad (3.26)$$

Comme dans la preuve de Kac nous échangeons l'ordre de l'intégration et faisons l'intégration de chemin avant l'intégration de τ . À ce stade dans la preuve de Kac nous avons discuté la probabilité pour obtenir (9.21) [55], mais maintenant nous employons le raisonnement légèrement différent. Nous faisons appel à la définition de l'intégrale de chemin comme limite d'une intégrale multiple; notons τ par t_j , et notons $x(\tau)$ par x_j .

Ceci donne

$$\begin{aligned}
K_j(x, t; y, 0) &= \sum_j (\Delta t) \int \prod_{l=1}^N dx_l \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{(N+1)/2} \\
&\quad \times \exp \left[\frac{im}{2\hbar \Delta t} \sum_{k=0}^N (x_{k+1} - x_k)^2 \right] V(x_j)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Les intégrales pour $k = 1, \dots, j-1$ et $k = j+1, \dots, N$ sont justes des intégrales de la particule libre. Pour $j = 1$, il à noter :

$$K_1(x, t; y, 0) = \int_0^t d\tau \int d\xi K_0(x - \xi, t - \tau) V(\xi) K_0(\xi - y, \tau) \tag{3.28}$$

définissons donc :

$$K_k(x, t; y, 0) \equiv \frac{1}{k!} \int_{y,0}^{x,t} dx(\tau) \exp \left[\frac{im}{2\hbar} \int_0^t \dot{x}^2 d\tau \right] \left[\int_0^t V(x(\tau)) d\tau \right]^k \tag{3.29}$$

et comme dans la section 9 [55], il suit

$$\begin{aligned}
K_k(x, t; y, 0) &= \int_{y,0}^{x,t} dx(\tau) \exp \left[\frac{im}{2\hbar} \int_0^t \dot{x}^2 d\tau \right] \\
&\quad \times \int_0^t d\tau_1 \int_0^t d\tau_2 \dots \int_0^t d\tau_k V(x(\tau_1)) \dots V(x(\tau_k)) \\
&= \int_0^t d\tau \int d\xi K_0(x, t; \xi, \tau) V(\xi) K_{k-1}(\xi, \tau; y, 0)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

et

$$K(x, t; y, 0) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^j K_j(x, t; y, 0) \tag{3.31}$$

Comme avant, nous pouvons immédiatement établir ce qui suit :

$$K(x, t : y, 0) = K_0(x, t; y, 0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau \int d\xi K_0(x, t; \xi, \tau) V(\xi) K(\xi, \tau; y, 0) \quad (3.32)$$

La transformation de Fourier sur le temps de $K(x, t : y, 0)$ est

$$G(x, E : y, 0) = \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dT K(x, T : y, 0) \quad (3.33)$$

Donc la transformation de Fourier d'équation (3.32) est

$$G(x, E : y, 0) = G_0(x, E : y, 0) - \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta G_0(x, E : \zeta, 0) V(\xi) G(\zeta, E, y, 0) \quad (3.34)$$

Dans certains problèmes, $V(x)$ est continu par morceaux. Il est alors nécessaire d'énoncer la théorie des fonctions sectionnellement analytiques [46].

Chapitre 4

METHODE DE RESOLUTION UTILISANT LES FONCTIONS ANALYTIQUES ET LES FONCTIONS SECTIONNELLEMENT ANALYTIQUES

Ce chapitre présente un ensemble de méthodes diverses de résolution des équations intégrales. Ces méthodes ont toutes pour outil commun, l'utilisation des fonctions analytiques de la variable complexe dans le plan complexe \mathbb{C} [20],[21],[35],[46],[57],[61]. Elles permettent la résolution, explicite dans beaucoup de cas, d'équations intégrales d'une seule variable (réelle ou complexe). Nous obtenons aussi à l'aide de la théorie du problème de Hilbert, des résultats concernant l'existence et l'unicité des solutions de certaines de ces équations intégrales.

4.1 Les fonctions analytiques

La méthode de Wiener-Hopf

Introduction : Equation de Wiener-Hopf On considère le problème suivant :

Problème(1) :

cherchez f , nulle pour $t < 0$ vérifiant :

$$\int_0^{+\infty} k(t-t_0)f(t_0)dt_0 = g(t), \quad t \in]0, +\infty[\quad (4.1)$$

où $k(t)$ est une fonction donnée définie sur \mathfrak{R} , appelée noyau et $g(t)$ est une fonction donnée définie pour $t > 0$. (4.1) est appelée équation intégrale de Wiener-Hopf de première espèce.

Problème(2) :

On cherche une fonction f , définie pour tout $t \in \mathfrak{R}$, vérifiant :

$$f(t) = \int_0^{+\infty} k(t-t_0)f(t_0)dt_0 + g(t) \quad (4.2)$$

où le noyau $k(t)$ et la fonction $g(t)$ sont définis pour tout $t \in \mathfrak{R}$. (4.2) est appelée équation intégrale de Wiener-Hopf de deuxième espèce.

4.2 Méthode de Wiener-Hopf

L'équation (4.1) est une équation de convolution, l'utilisation de la transformation bilatérale de Laplace (ou transformation de Fourier selon [46]) est la base de la méthode Wiener-Hopf que nous allons expliciter pour résoudre l'équation (4.1). Pour cela, nous allons faire les hypothèses suivantes :

Le noyau est borné et vérifie :

$$k(t) = O(\exp(-b|t|)), \quad t \rightarrow \pm\infty, \quad b > 0 \quad (4.3)$$

La fonction donnée $g(t)$ est localement bornée et telle que,

$$g(t) = O(\exp(ct)), \quad t \rightarrow +\infty, \quad 0 < c < b \quad (4.4)$$

Alors on cherche $f(t)$ localement bornée et telle que :

$$f(t) = O(\exp(at)), \quad t \rightarrow +\infty, \quad 0 < a < b \quad (4.5)$$

Introduisons

$$g_+(t) = \begin{cases} 0 & t > 0 \\ g(t), & t < 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

$$g_-(t) = \begin{cases} -\int_0^{+\infty} K(t-t_0) f(t_0) dt_0 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

$$f_-(t) = \begin{cases} -f(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

On vérifie alors que :

$$g_+(t) = O(\exp(bt)), \text{ pour } t \rightarrow -\infty \quad (4.9)$$

Considérons formellement les transformées bilatérales de Laplace :

$$F_-(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_-(t) e^{-st} dt \quad (4.10)$$

$$G_+(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_+(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 g(t) e^{-st} dt \quad (4.11)$$

$$G_-(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_-(t) e^{-st} dt \quad (4.12)$$

$$K(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(t)e^{-st} dt \quad (4.13)$$

Le comportement de type exponentiel décroissant du noyau $k(t)$ montre que sa transformée bilatérale de Laplace K est définie pour tout $s \in \mathfrak{R}$. Elle se prolonge en outre dans le plan complexe en une fonction analytique pour tout s telle que $-b < \text{Re}(s) < b$. De même la fonction $G_+(s)$ se prolonge en une fonction analytique dans le plan complexe définie pour $\text{Re}(s) < b$. Les transformées bilatérales de Laplace $F_-(s)$ et $G_-(s)$ ne sont pas à priori définies pour s réel, on peut les définir pour s complexe vérifiant respectivement, $\text{Re}(s) > a$, $\text{Re}(s) > c$.

La transformtion bilatérale de Laplace formelle appliquée à (4.1) permet de trouver $F_-(s)$ et $G_+(s)$ vérifiant :

$$K(s)F_-(s) = G_+(s) + G_-(s) \quad (4.14)$$

relation qui vaut pour tout s appartenant à la bande commune d'analyticité des fonctions K, F_-, G_+, G_- , i.e pour s vérifiant :

$$\{s \in \mathbb{C}; \max(a, c) < \text{Re}(s) < b\} \quad (4.15)$$

Alors le type d'équation (4.14) rentre dans le cadre général suivant :

Problème(3) :-

Trouver F_- et F_+ telles que :

$s \rightarrow F_-(s)$ soit analytique pour $\text{Re}(s) > a$, et $s \rightarrow F_+(s)$ soit analytique pour $\text{Re}(s) < b$, $a, b \in \mathfrak{R}$, $a < b$, vérifiant :

$$A(s)F_-(s) + B(s)F_+(s) = C(s) \quad (4.16)$$

où les fonctions A, B, C données de la variable complexe s sont pour $a < \text{Re}(s) < b$; la résolution du problème(3) est alors basée sur deux idées qui sont la factorisation et la

décomposition d'une fonction analytique définie dans une bande du plan complexe plus précisément si nous pouvons factoriser A/B sous la forme :

$$\frac{A(s)}{B(s)} = \frac{H_-(s)}{H_+(s)} \quad (4.17)$$

avec $H_-(s)$ analytique dans $Re(s) > a$, $H_-(s) \neq 0$, pour tout s (avec $Re(s) > a$), et $H_+(s)$ analytique dans $Re(s) < b$, $H_+(s) \neq 0$ pour toute s (avec $Re(s) < b$) alors l'équation (4.16) est équivalente à :

$$H_+(s)F_+(s) + H_-(s)F_-(s) = \frac{C(s)H_+(s)}{B(s)} \quad (4.18)$$

De (4.17) on déduit que :

$$\frac{H_+(s)}{B(s)} = \frac{H_-(s)}{A(s)} \quad (4.19)$$

donc l'équation(4.18) s'écrit :

$$H_+(s)F_+(s) + H_-(s)F_-(s) = \frac{C(s)H_-(s)}{A(s)} \quad (4.20)$$

Si nous pouvons alors décomposer $\frac{C(s)H_-(s)}{A(s)}$ sous la forme :

$$\frac{C(s)H_-(s)}{A(s)} = S_+(s) - S_-(s) \quad (4.21)$$

avec $S_-(s)$ analytique dans $Re(s) > a$, et $S_+(s)$ analytique dans $Re(s) < b$, alors l'équation (4.20) s'écrit

$$H_+(s)F_+(s) - S_+(s) = -H_-(s)F_-(s) - S_-(s) \quad (4.22)$$

Les deux membres de l'équation (4.22) sont deux fonctions analytiques sur la bande $a < Re(s) < b$, où elles sont égales. Elle sont donc toutes les deux égales à une fonction entière $E(s)$, nous en déduisons finalement toutes les solutions de l'équation

(4.16),

$$F_+(s) = \frac{E(s) + S_+(s)}{H_+(s)}, \text{ et } F_-(s) = \frac{-E(s) - S_-(s)}{H_-(s)} \quad (4.23)$$

Décomposition d'une fonction analytique définie dans une bande du plan complexe

Théorème(1)[46] :

Soit $s \rightarrow G(s)$ une fonction analytique dans la bande $\alpha < \text{Re}(s) < \beta$, soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < a < b < \beta$. Si G vérifie l'hypothèse du comportement à l'infini :

$$|G(s)| \leq \frac{c}{|s|^{\gamma+1}} \quad , \quad \gamma > 0 \quad , \quad c > 0 \quad , \quad \forall s, \quad a \leq \text{Re}(s) \leq b \quad (4.24)$$

elle admet une décomposition de la forme :

$$G(s) = G_+(s) - G_-(s) \quad (4.25)$$

avec G_- est analytique pour $\text{Re}(s) > a$, et G_+ est analytique pour $\text{Re}(s) < b$.

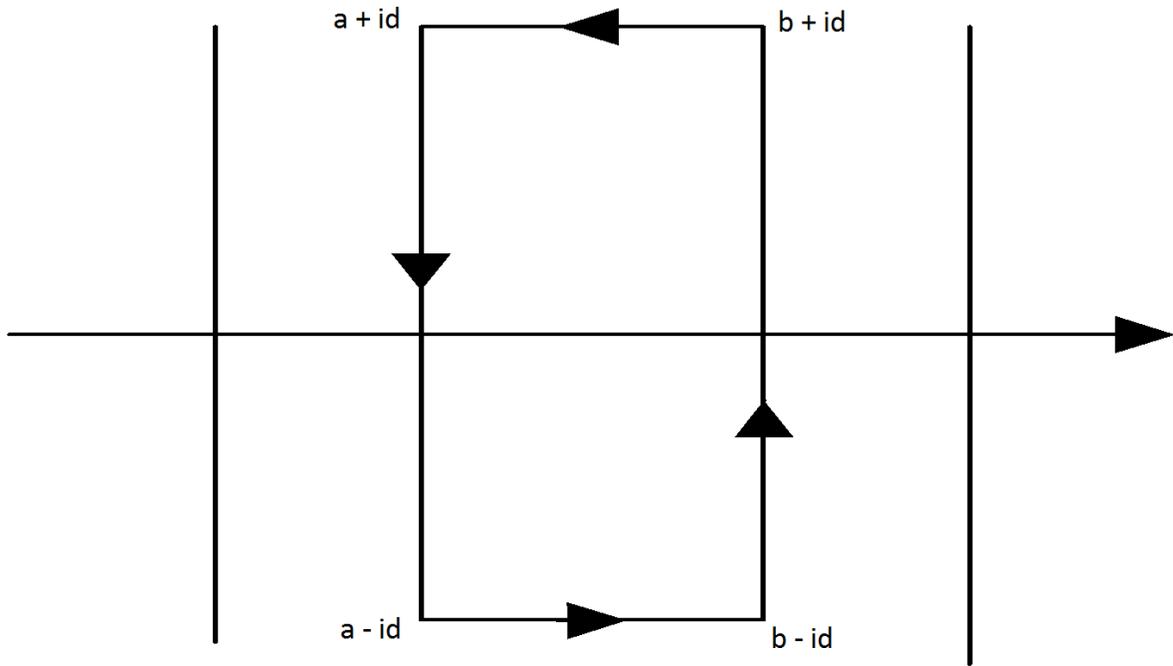
Preuve

Considérons le contour c_{\nearrow} suivant du plan complexe : d'après la formule de Cauchy, pour tout s appartenant à l'intérieur du domaine du contour c_{\nearrow} , on a :

$$G(s) = \int_{c_{\nearrow}} \frac{G(u)}{u-s} du \quad (4.26)$$

D'après (fig.4.1) :

$$G(s) = \int_{c_{\nearrow}} \frac{G(u)}{u-s} du = \frac{1}{2i\pi} \left[\int_{a-id}^{b-id} \frac{G(u)}{u-s} du + \int_{b-id}^{b+id} \frac{G(u)}{u-s} du + \int_{b+id}^{a+id} \frac{G(u)}{u-s} du + \int_{a+id}^{a-id} \frac{G(u)}{u-s} du \right]$$



Puisque G vérifie (4.24), alors pour $d \rightarrow +\infty$ on obtient :

$$G(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{b-i\infty} \frac{G(u)}{u-s} du - \frac{1}{2i\pi} \int_{b+i\infty}^{a+i\infty} \frac{G(u)}{u-s} du \quad (4.27)$$

En posant

$$G_+(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{b-i\infty} \frac{G(u)}{u-s} du \quad (4.28)$$

et

$$G_-(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{a+i\infty}^{b+i\infty} \frac{G(u)}{u-s} du \quad (4.29)$$

où G_- et G_+ sont analytiques d'après (4.24) pour $Re(s) > a$ et $Re(s) < b$ respectivement.

Remarque(1) : La décomposition obtenue au théorème précédent n'est pas unique, en particulier on peut ajouter à G_+ et G_- une même fonction entière.

Factorisation d'une fonction analytique dans une bande du plan complexe

Théorème(2)[46] : Si H est une fonction analytique dans la bande $\alpha < \operatorname{Re}(s) < \beta$, qui vérifie ;

(i)

$$H(s) \neq 0 \quad , \quad \alpha < \operatorname{Re}(s) < \beta \quad (4.30)$$

(ii) Il existe une constante non nulle notée $H(\infty)$ telle que :

$$|H(s) - H(\infty)| \leq \frac{C}{|s|^\gamma}, \quad C > 0, \gamma > 0, \quad \alpha < \operatorname{Re}(s) < \beta \quad (4.31)$$

alors H se factorise sous la forme :

$$H(s) = \frac{H_+(s)}{H_-(s)} \quad (4.32)$$

où H_- et H_+ sont des fonctions analytiques respectivement pour $\operatorname{Re}(s) > a > \alpha$, et $\operatorname{Re}(s) < b < \beta$ donnée par :

$$H_+(s) = e^{G_+(s)} \quad , \quad H_-(s) = e^{G_-(s)} \quad (4.33)$$

et ne s'annulent pas dans leurs domaines respectivement d'analyticité (G_- et G_+ sont des fonctions analytiques respectivement dans $\operatorname{Re}(s) > a$ et $\operatorname{Re}(s) < b$).

Preuve

Nous voulons ainsi factoriser $H(s)$ sous la forme (4.32) avec H_- analytique pour $\operatorname{Re}(s) > a$ et H_+ analytique pour $\operatorname{Re}(s) < b$, où $\alpha < a < b < \beta$.

Lorsque $H(s)$ est telle que $\log H(s)$ est bien défini dans la bande $\alpha < \operatorname{Re}(s) < \beta$ et vérifie l'hypothèse (4.31), il suffit d'appliquer le théorème(1) à $\log H(s)$ pour obtenir :

$$\log H(s) = G_+(s) - G_-(s) \quad (4.34)$$

d'où

$$H(s) = e^{G_+(s)-G_-(s)} = \frac{e^{G_+(s)}}{e^{G_-(s)}}. \quad (4.35)$$

Or sous les conditions (i) et (ii), il existe un entier relatif p tel que pour

$$\hat{H}(s) = \frac{H(s)}{H(\infty)} \left(\frac{s-\alpha}{s-\beta} \right)^p \quad (4.36)$$

les fonctions $\log \hat{H}(s)$ soient définies de manière unique et vérifient (4.24).

Remarque(2) : Si la fonction H ne vérifie pas (i) mais vérifie (ii), la méthode du théorème(2) ne s'applique pas directement. Supposons que H présente des zéros de multiplicité finie dans la bande $\alpha < Re(s) < \beta$ et notons a_1, a_2, \dots, a_m les zéros distincts ou non de H . Introduisons une fonction L telle que :

$$L(s) = \frac{H(s)(s-\beta)^m}{(s-a_1)(s-a_2)\dots(s-a_m)} \quad (4.37)$$

cette fonction vérifie les hypothèses (i), (ii) de théorème(2) elle se factorise donc sous la forme :

$$L(s) = \frac{L_+(s)}{L_-(s)} \quad (4.38)$$

avec L_- (resp L_+) étant analytique pour $Re(s) > a$ (resp $Re(s) < b$), on en déduit de (4.37) et (4.38) que :

$$H(s) = \prod_{i=1}^m (s-a_i) \frac{L_+(s)}{(s-\beta)^m L_-(s)} \quad (4.39)$$

Remarque(3) : La décomposition d'une fonction n'est pas unique, il en est de même de la factorisation, car on peut multiplier le numérateur et le dénominateur par une même fonction entière n'ayant pas de zéro dans \mathbb{C} . (Avec les notations du théorème (2) pour $\hat{H}(s) = \frac{\hat{H}_+(s)}{\hat{H}_-(s)}$ on peut prendre $\hat{H}_\pm(s) = e^{G_\pm(s)}$ avec $G_\pm(s)$ la même notation du théorème (2) et le comportement de $\hat{H}_\pm(s)$ (donc de $H_\pm(s)$ à l'infini).

Application à l'équation intégrale de Wiener-Hopf de deuxième espèce : généralités Considérons maintenant le problème(2) qui consiste à trouver f vérifiant (4.2). On suppose que le noyau k vérifie (4.3) et on définit cette fois g_+ et g_- par :

$$g_-(t) = \begin{cases} g(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}, \quad g_+(t) = \begin{cases} 0 & t > 0 \\ g(t) & t < 0 \end{cases} \quad (4.40)$$

On suppose que g_- et g_+ vérifient

$$\begin{cases} g_-(t) = O(\exp ct) & t \rightarrow +\infty, \quad 0 < c < b \\ g_+(t) = O(\exp bt) & t \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (4.41)$$

Il résulte de (4.16) et (4.41) que l'on a :

$$f_+(t) = O(\exp bt), \quad t \rightarrow -\infty \quad (4.42)$$

où

$$f_+(t) = \begin{cases} 0 & t > 0 \\ f(t) & t < 0 \end{cases} \quad (4.43)$$

et

$$f_-(t) = \begin{cases} -f(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (4.44)$$

On propose donc de chercher f bornée sur tout bornée de \Re et telle que :

$$f(t) = O(\exp at), \quad t \rightarrow +\infty, \quad 0 < a < b$$

Désignons par F_-, G_-, K, F_+, G_+ les transformées bilatérales de Laplace de f_-, g_-, k, f_+, g_+ on a :

$$F_- \text{ est analytique dans } \operatorname{Re}(s) > a$$

G_- est analytique dans $Re(s) > c$

F_+ est analytique dans $Re(s) < b$

G_+ est analytique dans $Re(s) < b$

K est analytique dans $-b < Re(s) < b$

Les fonctions F_+, G_+, F_-, G_-, K ont en commun la bande d'analyticité $max(a, c) < Re(s) < b$ et y vérifient (d'après (4.2) par la transformation de Laplace :

$$F_+(s) = [1 - K(s)]F_-(s) + G_+(s) + G_-(s) \quad (4.45)$$

qui est une équation de type (4.16) qui peut se résoudre par la méthode de la factorisation et la décomposition.

4.3 Les fonctions sectionnellement analytiques

4.3.1 Les fonctions sectionnellement analytiques (s.analytiques) :

Définition(1) : Un arc de courbe différentiable est l'ensemble des points de coordonnées (x,y) ,

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t_a \leq t \leq t_b \quad (4.46)$$

(t_a et t_b finis, si bien que par la suite, un arc de courbe différentiable sera une partie compacte de R^2), où les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont différentiables et telles que :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \neq 0; \quad \forall t; \quad t_a \leq t \leq t_b \quad (4.47)$$

les extrémités, notées \mathbf{a} et \mathbf{b} , sont des images de t_a et t_b . Nous supposons qu'il n'y a pas de point double, ce qui se traduit par la propriété :

$$\begin{cases} x(t_a) = x(t_b) \\ y(t_a) = y(t_b) \end{cases} \Leftrightarrow t_a = t_b, \quad (4.48)$$

Définition(2) : On appelle contour différentiable un arc différentiable fermé, c'est-à-dire tel que les extrémités \mathbf{a} et \mathbf{b} coïncident ainsi que la tangente en ces deux points. Nous traduirons cette dernière propriété par :

$$\begin{cases} \frac{dx(t_a+0)}{dt} = \frac{dx(t_b-0)}{dt} \\ \frac{dy(t_a+0)}{dt} = \frac{dy(t_b-0)}{dt} \end{cases}. \quad (4.49)$$

Définition(3) : On appelle courbe différentiable une union finie d'arcs ou de contours différentiables, d'intersection vide. Une courbe différentiable par morceaux est une union d'arcs différentiables dont les extrémités peuvent coïncider. Dans ce cas, les tangentes sont en général différentes en ces points.

Définition(4) : Une fonction Φ du plan \mathfrak{R}^2 est dite sectionnellement continue, (s.continue) relativement à un arc ou à un contour L , si elle est continue en tout point \mathbf{z} , $z \in \mathfrak{R}^2 - L$, et si elle est continue jusqu'au bord de part et d'autre de l'arc ou du contour L (à l'exception éventuelle de deux extrémités de l'arc).

Remarque(4) : Une fonction s.continue admet donc des limites éventuellement différentes de part et d'autre du contour L . Nous noterons Φ_e et Φ_i ces limites dans le cas d'un contour, Φ_i étant la limite à l'intérieur du contour et Φ_e la limite à l'extérieur. Les fonctions $\Phi_i(t)$ et $\Phi_e(t)$ sont donc des fonctions continues en l'abscisse \mathbf{t} .

Définition(5) : Une fonction $\Phi(s)$ du plan complexe est dite sectionnellement analytique (ou s.analytique) relativement à une courbe différentiable L si :

- 1) elle est analytique en tout point non situé sur la courbe L ,
- 2) elle est s.continue relativement à la courbe L ,
- 3) elle vérifie au voisinage de toute extrémité a des arcs de la courbe L

$$|\Phi(s)| \leq \frac{c}{|s-a|^\alpha}; s \notin L \quad 0 \leq \alpha < 1, \text{ où } c \text{ est une consante.} \quad (4.50)$$

Intégrales de Cauchy et formules de Plemelj

Soit L un contour ou un arc. Nous allons examiner les propriétés des intégrales de Cauchy de la forme :

$$\Phi(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{f(z)}{z-s} dz, \quad s \in C - L \quad (4.51)$$

où $f(z)$ est une fonction définie sur la courbe L .

Lorsque la fonction $f(z)$ est intégrable, la fonction $\Phi(s)$ est définie et analytique en tout point s non situé sur la courbe L . Mais elle n'a pas de sens lorsque le point s est sur la courbe L , car alors la fonction $f(z)/(z-s)$ n'est pas intégrable lorsque z parcourt la courbe L .

Sous certaines hypothèses concernant la fonction f , nous allons définir, lorsque s est sur la courbe L , une fonction liée à l'intégrale (4.51) que nous appellerons valeur principale de Cauchy.

Définition(6) : Nous appellerons valeur principale de Cauchy que nous noterons :

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_L \frac{f(z)}{z-s} dz \quad (4.52)$$

la limite suivante, quand elle existe :

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_L \frac{f(z)}{z-s} dz \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{L-(L \cap B(s,\varepsilon))} \frac{f(z)}{z-s} dz, z \in L. \quad (4.53)$$

où $B(s, \varepsilon)$ est la boule du plan complexe de centre s et de rayon ε .

Proposition(1)[46] : Soit L un contour ou un arc de classe $C^{1,\beta}$. Supposons que la fonction $f(z)$ soit holderienne sur la courbe L , i.e vérifie :

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq |z_1 - z_2|^\beta \quad , 0 < \beta \leq 1 \quad , z_1, z_2 \in L . \quad (4.54)$$

Alors la valeur principale de Cauchy donnée par (4.53) existe en tout point s de la courbe L et elle est une fonction continue de s .

Preuve :

considérons d'abord le cas où L est un contour. Nous avons :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{L-(L \cap B(s,\varepsilon))} \frac{f(z)}{z-s} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{L-(L \cap B(s,\varepsilon))} \frac{f(z) - f(s)}{z-s} dz + \frac{f(s)}{2i\pi} \int_{L-(L \cap B(s,\varepsilon))} \frac{dz}{z-s} \quad (4.55)$$

L'hypothèse (4.54) montre que le premier terme du second membre admet pour limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$, l'intégrale suivante :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{f(z) - f(s)}{z-s} dz \quad (4.56)$$

La limite du second terme du second membre est $f(s)/2$ (ici intervient l'orientation positive de parcours du contour). Nous avons donc :

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_L \frac{f(z)}{z-s} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{f(z) - f(s)}{z-s} dz + \frac{f(s)}{2} \quad (4.57)$$

La continuité de cette expression de s résulte alors d'après le théorème de Lebesgue .

Théorème(3)[46] : Soit L un contour ou un arc de classe $C^{1,\beta}$; alors la fonction :

$$\Phi(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{f(z)}{z-s} dz \quad , s \notin L \quad (4.58)$$

est s.analytique lorsque la fonction f est holderienne. Dans ce cas les limites non tangentielles Φ_i et Φ_e de cette fonction, de part et d'autre de la courbe L , vérifient les formules

de Plemelj suivantes :

$$\begin{cases} \Phi_i(s) - \Phi_e(s) = f(s) & s \in L \\ \Phi_i(s) + \Phi_e(s) = \frac{1}{i\pi} \oint_L \frac{f(z)}{z-s} dz & s \in L \end{cases} \quad (4.59)$$

(si L est un arc, s différent des extrémités de L) où la valeur principale de Cauchy est donnée par (4.53).

4.3.2 Problème de Hilbert

Introduction :

Nous étudions dans ce paragraphe un problème général concernant les fonctions s -analytiques et appelé généralement problème de Hilbert (ou également problème de Riemann-Hilbert) [46].

Nous en donnons, sous certaines hypothèses concernant les données, la solution générale dans le cas d'un contour, puis d'un arc et enfin dans le cas d'une droite infinie.

Soit L un contour ou une droite infinie. Le problème de Hilbert consiste en la recherche d'une fonction φ s -analytique relativement à la courbe L (voir définitions (1) à (5), §1). Nous lui imposons en outre d'avoir une croissance au plus polynomiale à l'infini et de vérifier l'équation :

$$\varphi_i(z) = A(z)\varphi_e(z) + B(z), \quad z \in L, \quad (4.60)$$

où $A(z)$ et $B(z)$ sont des fonctions données sur la courbe L . Rappelons que $\varphi_i(z)$ et $\varphi_e(z)$ sont définies de même manière au paragraphe §1. Le problème de Hilbert est dit homogène si $B \equiv 0$. Nous supposerons dans tout ce paragraphe que A n'a pas de zéros sur la courbe L .

Le problème de Hilbert dans le cas où L est un contour Nous supposerons par commodité que l'origine des coordonnées est intérieure au contour L . Examinons d'abord

la résolution du problème homogène. Dans le cas où la fonction $A(z)$ est telle que $\log A(z)$ admet une définition univoque sur le contour L . L'équation homogène de Hilbert :

$$\Phi_i(z) = A(z) \Phi_e(z) \quad (4.61)$$

est équivalente à

$$\log \Phi_i(z) - \log \Phi_e(z) = \log A(z) \quad (4.62)$$

Donc une solution est donnée dans ce cas utilisant les formules de Plemelj (si $\log A(s)$ est holdérienne, et si L est de classe $C^{1,\beta}$), pour les fonctions $\log \Phi_e(z)$ (resp $\log \Phi_i(z)$) on obtient :

$$\log \Phi_e(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{\log A(s) - \log A(z)}{s - z} ds, \quad z \in L \quad (4.63)$$

$$\log \Phi_i(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{\log A(s) - \log A(z)}{s - z} ds + \log A(z), \quad z \in L \quad (4.64)$$

de (4.63) et (4.64) on en déduit les formule de Plemelj :

$$\begin{cases} \log \Phi_i(z) - \log \Phi_e(z) = \log A(z), & z \in L \\ \log \Phi_i(z) + \log \Phi_e(z) = \frac{1}{i\pi} \oint_L \frac{\log A(s)}{s - z} ds, & z \notin L. \end{cases} \quad (4.65)$$

d'où

$$\Phi(z) = \exp\left(\frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{\log A(s)}{s - z} ds\right), \quad z \in C, \quad z \notin L \text{ (théo(1), §2)}. \quad (4.66)$$

Dans le cas général, nous allons suivre la même idée pour trouver toutes les solutions du problème de Hilbert homogène.

Définition(7) : L'indice p est un entier relatif égal au rapport à 2π de l'accroissement de l'argument de $A(z)$ lorsque le point z parcourt le contour L :

$$p = \frac{1}{2\pi} [\arg A(z)]_L \quad (4.67)$$

Proposition(2)[46] : Soit $A(z)$ une fonction définie et holdérienne sur un contour L (L de classe $C^{1,\beta}$) et ne s'annulant pas sur ce contour : si p désigne l'index donnée par la définition précédente, le problème de Hilbert homogène (4.61) admet comme solution particulière la fonction $\Phi(z)$ s.analytique suivante :

$$\Phi(z) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{2i\pi} \int_L ds \log(s^{-p}A(s)) / s - z\right), & \text{si } z \text{ est intérieur au contour} \\ z^{-p} \exp\left(\frac{1}{2i\pi} \int_L ds \log(s^{-p}A(s)) / s - z\right), & \text{si } z \text{ est extérieur au contour} \end{cases} \quad (4.68)$$

Toutes les autres solutions du problème de Hilbert homogène sont de la forme :

$$\Theta(z) = \Phi(z)P(z), \quad (4.69)$$

où $P(z)$ est un polynôme quelconque.

Preuve :

L'origine étant intérieur au contour, la fonction :

$$z \rightarrow A_0(z) = z^{-p}A(z) = \frac{A(z)}{z^p} \quad (4.70)$$

a un indice nul et ne s'annule pas sur le contour L (i.e, $A_0(z)$ ne subit pas d'accroissement lorsque z parcourt L et $\log A_0(z)$ est une fonction continue sur L). Son logarithme a une détermination unique et une solution Ψ du problème de Hilbert homogène correspondant à la fonction A_0 est donnée par (4.66) :

$$\Psi(z) = \exp\left(\frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{\log A_0(s)}{s - z} ds\right), \quad z \in C, \quad z \notin L \quad (4.71)$$

et ainsi

$$\Psi_i(z) = A_0(z)\Psi_e(z) \quad z \in L \quad (4.72)$$

considérons alors la fonction Φ définie par :

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Psi(z), & \text{si } z \text{ est intérieur au contour} \\ \frac{\Psi(z)}{z^p}, & \text{si } z \text{ est extérieur au contour.} \end{cases} \quad (4.73)$$

il est clair que la fonction Φ est une solution du problème homogène de Hilbert relatif à la fonction A . Ceci montre la première partie de notre proposition.

Démontrons enfin (4.69). Soit donc Θ une autre solution de notre problème i.e :

$$\Theta_i(z) = A(z)\Theta_e(z), \quad z \in L \quad (4.74)$$

Nous avons donc

$$\frac{\Theta_i(z)}{\Phi_i(z)} = \frac{\Theta_e(z)}{\Phi_e(z)}, \quad z \in L \quad (4.75)$$

Mais la fonction Φ ne s'annulant pas dans le plan complexe, la fonction $\frac{\Theta(z)}{\Phi(z)}$ est analytique. Étant d'autre part à croissance polynomiale à l'infini, cette fonction $\frac{\Theta(z)}{\Phi(z)}$ est un polynôme d'après le théorème de Liouville. Réciproquement, il est clair que toute fonction de la forme $\Phi(z)P(z)$ où \mathbf{P} est un polynôme, est une solution de notre problème

Théorème(4)[46] : Soit A holdérienne d'index p et B holdérienne définie sur le contour L (avec L de classe $C^{1,\beta}$); le problème de Hilbert d'équation (4.60) admet pour seules solutions les fonctions s.analytique φ suivantes :

$$\varphi(z) = \frac{\Phi(z)}{2i\pi} \int_L \frac{B(s)}{\Phi_i(s)(s-z)} ds + P(z)\Phi(z) \quad (4.76)$$

où \mathbf{P} est un polynôme quelconque et où Φ est la solution du problème homogène donnée par (4.68), $\Phi_i(z)$ étant la limite intérieure de $\Phi(z)$ sur le contour L :

$$\Phi_i(z) = \exp\left(\frac{1}{2} \log \frac{\log A(z)}{z^p}\right) + \frac{1}{2i\pi} \oint_L \frac{\log(s^{-p}A(s))}{s-z} ds \quad z \in L \quad (4.77)$$

Si nous imposons en outre aux solutions de tendre vers zéro à l'infini, nous aurons selon la valeur de l'index p :

- i) $p = 0$, il y a une seule solution correspondant à $\mathbf{P} \equiv 0$
- ii) $p > 0$, il y a une infinité de solutions correspondant à tout polynôme \mathbf{P} de degré inférieur ou égal à $p - 1$;
- iii) $p < 0$, il y a une seule solution si et seulement si la fonction $B(z)$ vérifie les conditions :

$$\int_L \frac{s^m B(s)}{\Phi_i(s)} ds = 0, \quad 0 \leq m \leq -p - 1. \quad (4.78)$$

Preuve :

Soit $\Phi(z)$ la solution particulière du problème homogène donnée par (4.68). Les fonctions $\Phi_i(z)$ et $\Phi_e(z)$ correspondantes ne s'annulant pas sur le contour L , nous pouvons remplacer l'équation (4.60) par l'équation

$$\frac{\varphi_i(z)}{\Phi_i(z)} - \frac{\varphi_e(z)}{\Phi_e(z)} = \frac{B(z)}{\Phi_i(z)}, \quad z \in L. \quad (4.79)$$

D'après les formules de Plemelj (voir théorème(1) , §2), une solution particulière est donnée par :

$$\varphi(z) = \Phi(z) \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{B(s)}{\Phi_i(s)(s-z)} ds, \quad z \notin L, \quad z \in C. \quad (4.80)$$

On obtient toutes les solutions en ajoutant à cette solution particulière toutes les solutions de l'équation homogène correspondantes qui sont données par (4.69), i.e, l'équation :

$$\varphi(z) = \mathbf{P}(z)\Phi(z), \quad (4.81)$$

où $\mathbf{P}(z)$ est un polynôme quelconque. Nous avons obtenu l'expression de la solution

générale de notre problème :

$$\varphi(z) = \Phi(z) \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{B(s)}{\Phi_i(s)(s-z)} ds + \Phi(z) \mathbf{P}(z). \quad (4.82)$$

Au lieu de $\Phi(z)$ nous pouvons prendre $\Phi_i(z)$ à l'intérieur de L et $\Phi_e(z)$ à l'extérieur de L , i.e. :

$$\varphi(z) = \begin{cases} \Phi_i(z) \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{B(s)}{\Phi_i(s)(s-z)} ds + \Phi_i(z) \mathbf{P}(z), & \text{si } z \text{ est à l'intérieur au contour } L \\ \Phi_e(z) \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{B(s)}{\Phi_i(s)(s-z)} ds + \Phi_e(z) \mathbf{P}(z), & \text{si } z \text{ est à l'extérieur au contour } L \end{cases} \quad (4.83)$$

Examinons le comportement à l'infini de ces solutions selon la valeur de l'index p . Les fonctions $\Phi_i(z)$ et $\Phi_e(z)$ sont définies par (4.73); donc le premier terme du second membre de (4.76) est d'ordre $(-p-1)$ à l'infini, le second terme d'ordre $(m-p)$, m désigne le degré du polynôme $\mathbf{P}(z)$.

i) Si $p = 0$ le premier terme sera d'ordre négatif à l'infini, alors que dans le second il faudra prendre $\mathbf{P}(z) \equiv 0$. Notre problème admet de toute évidence une solution unique.

ii) Si $p > 0$ le premier terme du second membre est d'ordre négatif à l'infini, quant au second terme, il sera d'ordre négatif si et seulement si $m < p$, i.e, la formule (4.76) s'annule à l'infini si $\mathbf{P}(z)$ est un polynôme de degré inférieur à p . Dans ce cas notre problème admet une infinité de solutions nulles à l'infini.

iii) Si $p < 0$, compte tenu de ce qui a été dit plus haut sur l'ordre des termes du second membre, il est aisé de voir qu'il faut prendre $\mathbf{P}(z) \equiv 0$ et qu'en outre le premier terme ne doit pas contenir de termes en z^{-p-1} , z^{-p-2} ,, z^0 , i.e, le développement de l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{B(s)}{\Phi_i(s)(s-z)} ds = -\frac{z^{-1}}{2i\pi} \int_L \frac{B(s)}{\Phi_i(s)} ds - \frac{z^{-2}}{2i\pi} \int_L \frac{sB(s)}{\Phi_i(s)} ds + \dots \quad (4.84)$$

qui a lieu pour $|z|$ suffisamment grand ne doit pas contenir de terme s en z^{-1} , z^{-2} ,, z^{-p} .

On est ainsi conduit aux conditions suivantes, et qui sont nécessaires et suffisantes pour

que notre problème admette une solution nulle à l'infini :

$$\int_L \frac{s^m B(s)}{\Phi_i(s)} ds = 0, (m = 0, 1, \dots, -p - 1) \quad (4.85)$$

Si ces conditions sont réalisées, notre problème admet une solution unique, nulle à l'infini et définie par la formule (4.76) ; $\mathbf{P}(z)$ étant identiquement nul.

Le problème de Hilbert dans le cas d'une droite Examinons la résolution du problème de Hilbert (4.60) dans le cas de la droite L d'équation $Re(z) = b$.

Les solutions du problème homogène sont données par la proposition suivante.

Proposition(3)[46] : Soit A holdérienne sur la droite $Re(z) = b$, ne s'annulant pas sur cette droite et vérifiant :

$$A(z) = 1 + o\left(\frac{1}{|z|^\gamma}\right), \quad \gamma > 0, \quad \text{pour } |z| \rightarrow \infty; \quad (4.86)$$

et soit l'entier \mathbf{p} appelé index défini par :

$$p = \frac{1}{2\pi} \left[\lim_{\text{Im } z \rightarrow +\infty} \arg A(z) - \lim_{\text{Im } z \rightarrow -\infty} \arg A(z) \right], \text{ avec } z \in C \text{ et } Re(z) = b \quad (4.87)$$

Une solution s.analytique relativement à la droite du problème homogène de Hilbert est donnée par : ($Re(\alpha) > b$ et $Re(\beta) < b$).

$$\Phi(z) = \begin{cases} (z - \beta)^{-p} \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \log\left(A(s) \left(\frac{s-\beta}{s-\alpha}\right)^p\right) (s-z)^{-1} ds\right), & Re(z) > b \\ (z - \alpha)^{-p} \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \log\left(A(s) \left(\frac{s-\beta}{s-\alpha}\right)^p\right) (s-z)^{-1} ds\right), & Re(z) < b. \end{cases} \quad (4.88)$$

Toutes les autres solutions s.analytiques sont de la forme

$$\Theta(z) = \mathbf{P}(z) \Phi(z), \quad (4.89)$$

où $\mathbf{P}(z)$ est un polynôme quelconque.

Preuve :

Soit α et β deux points du plan complexe tels que :

$$\operatorname{Re}(\alpha) > b \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}(\beta) < b.$$

Considérons la fonction A_0 définie sur la droite L :

$$A_0(z) = \left(\frac{z - \beta}{z - \alpha} \right)^p A(z), \quad z \in L \quad (4.90)$$

Elle est holdérienne sur cette droite, vérifie l'hypothèse (4.86) et son index est nul. Nous pouvons donc définir $\log A_0(z)$ de manière univoque sur la droite L . Le problème homogène de Hilbert peut s'écrire de la façon suivante

$$\log(\Phi_i(z)(z - \beta)^p) - \log(\Phi_e(z)(z - \alpha)^p) = \log A_0(z), \quad z \in L \quad (4.91)$$

Le second membre de (4.91) vérifie les hypothèses (i.e, holderienne et $f(z) = f(\infty) + O(z^{-\beta})$, $\beta > 0$, $z \in C$, $f(\infty) \in \mathbb{R}$), avec $\log A_0(\infty) = 0$, et nous avons donc, d'après cette proposition, la formule (4.88). La démonstration de (4.89) est analogue au cas déjà considéré du contour.

Théorème(5)[46] : Soit A höldérienne sur la droite L d'équation $\operatorname{Re}(z) = b$, ne s'y annulant pas et vérifiant :

$$|A(z) - 1| \leq \frac{C}{|z|^\gamma}, \quad \gamma > 0, \quad z \in L, \quad (4.92)$$

et soit B höldérienne sur la droite L et telle que :

$$|B(z) - B(\infty)| \leq \frac{C}{|z|^\gamma}, \quad \gamma > 0, \quad z \in L. \quad (4.93)$$

alors les seules solutions s.analytiques relativement à la droite L du problème de Hilbert (4.60) sont données par :

$$\varphi(z) = \frac{\Phi(z)}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{B(s)}{\Phi_i(s)(s-z)} ds + \mathbf{P}(z)\Phi(z), \quad z \notin L \quad (4.94)$$

où Φ est donnée par (4.88) et Φ_i est donnée (pour $z \in L$) par :

$$\Phi_i(z) = \frac{1}{(z-\beta)^p} \exp \left[\frac{1}{2} \log A(z) \left(\frac{z-\beta}{z-\alpha} \right)^p + \frac{1}{2\pi i} \oint_{b-i\infty}^{b+i\infty} \log \left(A(s) \left(\frac{s-\beta}{s-\alpha} \right)^p \right) \frac{ds}{s-z} \right]. \quad (4.95)$$

et \mathbf{P} est un polynôme quelconque, et où α et β sont des nombres complexes tels que $Re(\alpha) > b$ et $Re(\beta) < b$.

Preuve :

Elle découle de la proposition (3) ci-dessus et de la proposition (2), en remarquant que l'équation (4.60) se ramène à

$$\frac{\varphi_i(z)}{\Phi_i(z)} - \frac{\varphi_e(z)}{\Phi_e(z)} = \frac{B(z)}{\Phi_i(z)}, \quad z \in L, \quad (4.96)$$

$\Phi_i(z)$ et $\Phi_e(z)$ étant les limites intérieures et extérieures de la fonction Φ données par (4.88).

Remarque(5) : Les solutions données par (4.95) du problème de Hilbert dans le cas d'une droite ont à l'infini, dans une direction non parallèle à la droite L , un comportement en $|z|^{-p}$. Ceci nous permet de caractériser, comme aux théorèmes (1) et (2) les solutions qui tendent vers zéro à l'infini dans une direction non parallèle à la droite L selon la valeur de l'index p défini par (4.87).

Equation intégrale de Wiener-Hopf de deuxième espèce : Nous avons déjà étudié l'équation intégrale de Wiener-Hopf de deuxième espèce à la section1. Nous reprenons ici cette étude par la méthode du problème de Hilbert, ce qui permet d'affaiblir les hy-

pothèses. Rappelons qu'il s'agit de trouver une fonction $f(t)$ solution de

$$f(t) = \int_0^{\infty} k(t-t_0)f(t_0)dt_0 + g(t), \quad -\infty < t < \infty, \quad (4.97)$$

où $g(t)$ et $k(t)$ sont des fonctions données définies pour tout t réel. Nous supposons qu'il existe b réel, $b > 0$, tel que :

$$k(t)\exp(-bt) \text{ et } g(t)\exp(-bt) \text{ sont intégrables sur l'axe réel.} \quad (4.98)$$

Nous cherchons une solution $f(t)$ telle que $f(t)\exp(-bt)$ soit intégrable sur l'axe réel. Pour appliquer le théorème de convolution à la transformation bilatérale de Laplace nous devons avoir pour intervalles d'intégration l'intervalle $-\infty < t < +\infty$. Procédons comme suit. Introduisons les fonctions :

$$f_+(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > 0 \\ f(t) & \text{si } t < 0 \end{cases}, \quad f_-(t) = \begin{cases} -f(t) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (4.99)$$

et les transformations bilatérale de Laplace

$$F_+(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_+(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^0 f(t)e^{-st}dt, \quad \text{Re}(s) = b \quad (4.100)$$

$$F_-(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_-(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} -f(t)e^{-st}dt, \quad \text{Re}(s) = b \quad (4.101)$$

$$K(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(t)e^{-st}dt, \quad \text{Re}(s) = b \quad (4.102)$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = F_+(s) - F_-(s) \quad \text{Re}(s) = b \quad (4.103)$$

$$G(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-st} dt, \quad Re(s) = b \quad (4.104)$$

Ces transformations sont définies pour s sur la droite $Re(s) = b$, d'après l'hypothèse (4.99). De plus F_+ est analytique pour $Re(s) < b$ et F_- est analytique pour $Re(s) > b$. Rappelons que l'hypothèse (4.99) entraîne que toutes les transformations bilatérales de Laplace tendent vers zéro à l'infini ; en particulier :

$$K(s) \rightarrow 0 \quad \text{quand } |Im(s)| \rightarrow \infty, \quad Re(s) = b \quad (4.105)$$

L'équation (4.98) entraîne

$$F_+(s) = [1 - K(s)]F_-(s) + G(s), \quad Re(s) = b \quad (4.106)$$

En considérant la fonction $\varphi(s)$ analytique relativement à la droite L , l'équation $Re(s) = b$ définie par

$$\begin{cases} F_+(s), & si \quad Re(s) < b, \\ F_-(s), & si \quad Re(s) > b. \end{cases} \quad (4.107)$$

l'équation (4.106) peut être considérée comme un problème de Hilbert pour cette fonction φ . En posant (compte tenu de l'orientation de la droite L (de gauche à droite))

$$\begin{cases} \varphi_i(s) = F_-(s) \\ \varphi_e(s) = F_+(s) \end{cases} \quad s \in C, \quad Re(s) = b, \quad (4.108)$$

ce problème s'écrit :

$$\varphi_i(s) = \frac{1}{(1 - K(s))} \varphi_e(s) + \frac{1}{(K(s) - 1)} G(s), \quad Re(s) = b. \quad (4.109)$$

Toutes les solutions s.analytiques de cette équation sont données par le théorème(3).

Proposition(4)[46] : Soient k et g deux fonctions données vérifiant (4.99) et telles que leurs transformations bilatérales de Laplace K et G soient holdériennes sur la droite L d'équation $Re(s) = b$. Supposons de plus que la transformée bilatérale de Laplace vérifie

$$|K(s)| \leq \frac{C}{|s|^\gamma}, \quad \gamma > 0, \quad s \in L, \quad (4.110)$$

et que $(1 - K(s))$ ne s'annule pas sur la droite L . Alors la transformation bilatérale de Laplace F de toute solution $f(t)$ de l'équation (4.97) est donnée par :

$$F(s) = \varphi_i(s) - \varphi_e(s), \quad s \in L, \quad (4.111)$$

où la fonction s.analytique φ est la solution de (4.109) et donnée par :

$$\Phi(z) \begin{cases} \frac{1}{(z - \beta)^p} \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \log \left(\frac{(s - \beta)^p}{(1 - K(s))(s - \alpha)^p} \right) \frac{ds}{s - z} \right) & \text{Re}(z) > b \\ \frac{1}{(z - \alpha)^p} \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \log \left(\frac{(s - \beta)^p}{(1 - K(s))(s - \alpha)^p} \right) \frac{ds}{s - z} \right) & \text{Re}(z) < b \end{cases} \quad (4.112)$$

où :

$$p = \frac{1}{2\pi} \left[\lim_{\text{Im}(s) \rightarrow +\infty} \arg \left(\frac{1}{1 - K(s)} \right) - \lim_{\text{Im}(s) \rightarrow -\infty} \arg \left(\frac{1}{1 - K(s)} \right) \right], \quad (4.113)$$

$$\Phi_i(z) = \frac{1}{(z - \beta)^p} * \quad (4.114)$$

$$\exp \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{1 - K(z)} \left(\frac{z - \beta}{z - \alpha} \right)^p \right) + \frac{1}{2i\pi} \oint_{b-i\infty}^{b+i\infty} \log \left(\left(\frac{s - \beta}{s - \alpha} \right)^p \frac{1}{1 - K(s)} \right) \frac{ds}{s - z} \right), \quad z \in L,$$

par

$$\varphi(z) = \frac{\Phi(z)}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{G(s) ds}{\Phi_i(s)(1 - K(s))(s - z)} + \mathbf{P}(z)\Phi(z), \quad z \notin L, \quad (4.115)$$

où $\mathbf{P}(z)$ est un polynôme tel que :

i) si $p > 0$, degré (\mathbf{P}) $\leq p - 1$;

ii) $p = 0$, $\mathbf{P} \equiv 0$;

iii) $p < 0$, il n'y pas de solutions sauf si

$$\int_L \frac{s^m G(s)}{\Phi_i(s)(1 - K(s))} ds = 0, \quad 0 \leq m \leq -(p + 1), \quad (4.116)$$

Chapitre 5

APPLICATIONS

Dans ce chapitre, nous avons traité quatre problèmes par la méthode des équations intégrales : le problème du potentiel de Heaviside à une dimension, les problèmes à deux dimensions relatifs aux potentiels puits et barrière finie et puits infini.

Nous avons aussi construit la série de perturbations et calculer ses termes moyennant la théorie de Feynmann développée au chapitre 3. Nous avons trouvé que les termes successifs de la série sont reliés par une formule intégrale que nous avons pu résoudre et sommer la série pour obtenir la fonction de Green pour deux types de potentiels : le problème d'une barrière finie de Heaviside à une dimension, le problème d'un puits infini à deux dimensions.

5.1 La fonction de Green pour le potentiel de Heaviside

5.1.1 Solution par la méthode directe :

On considère le problème aux valeurs propres à une dimension (dans \mathfrak{R}) suivant :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x)\right)\Psi = E\Psi \quad (5.1)$$

où $V(x)$ est la fonction de Heaviside c'est à dire égale à V_0 pour $x \geq 0$ et nulle pour $x < 0$. Les conditions aux limites sont celles de Dirichlet-Neumann (continuité de la solution et de sa dérivé aux points frontières). Nous allons démontrer que le noyau de Green relatif à ce problème obéit à une équation intégrale dans C que nous allons résoudre pour trouver les solutions du problème.

$$G(x, E : y) = G_0(x, E : y) - \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi G_0(x, E : \xi) V(\xi) G(\xi, E : y) \quad (5.2)$$

Pour

$$V = V_0\theta(x) \quad (5.3)$$

$$\text{avec } V_0 > 0, \text{ et, } \theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Donc (5.2) s'écrit

$$G(x, E : y) = G_0(x, E : y) - V_0 \int_0^{+\infty} d\xi G_0(x, E : \xi) G(\xi, E : y) \quad (5.4)$$

Notons par

$$G(x, E : y) = g(x, y) \quad (5.5)$$

Donc (5.4) s'écrit

$$g(x, y) = g_0(x, y) - V_0 \int_0^{+\infty} d\xi g_0(x - \xi) g(\xi, y) \quad (5.6)$$

où

$$g_0(x, y) = i \int_0^{+\infty} dT K_0(x, t : y, 0) \exp(-iEt)$$

$$= \frac{m}{k} \exp(-k|x-y|) \quad \text{avec } k^2 = 2mE \quad (5.7)$$

D'où (5.6) s'écrit

$$g(x, y) = \frac{m}{k} \exp(-k|x-y|) - \frac{mV_0}{k} \int_0^{+\infty} d\xi \exp(-k|x-\xi|) g(\xi, y) \quad (5.8)$$

$$g_y(x) = \frac{m}{k} \exp(-k|x-y|) - \frac{mV_0}{k} \int_0^{+\infty} d\xi \exp(-k|x-y|) g_y(\xi) \quad (5.9)$$

L'équation (5.9) est du type de l'équation (4.2) du problème de Hilbert Sec1. Sa solution est donnée par la formule (4.94) de théorème (5) du Sec3. Le cas où L est une droite (d'Éq $Re(s) = b$), chapitre 4, où $\mathbf{P}(z)$ est un polynôme nul i,e :

$$\varphi(s) = \frac{\Phi(s)}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{B(\tau)}{\Phi_i(\tau)(\tau-s)} d\tau, \quad s \notin L \quad (5.10)$$

Avec

$$\varphi(x) = g_y(x) \quad (5.11)$$

$$B(x) = \frac{m}{k} \exp(-k|x-y|) \quad (5.12)$$

$$k(x) = -\frac{mV_0}{k} \exp(-k|x|) \quad (5.13)$$

Soient $\Phi_i(s), \Phi_e(s)$ les limites intérieure et extérieure de $\Phi(s)$ solution du problème homogène de Hilbert,

$$\begin{aligned} B(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} B(x) \exp(-sx) dx \\ &= \frac{m}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-k|x-y|) \exp(-sx) dx \\ &= \frac{m \exp(-sy)}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-k|u|) \exp(-su) du, \quad \text{et } u = x-y \\ &= \frac{m \exp(-sy)}{k} \left(\int_{-\infty}^0 \exp((k-s)u) du + \int_0^{+\infty} \exp((-k-s)u) du \right) \end{aligned}$$

$$= 2m \frac{\exp(-sy)}{k^2 - s^2}, \quad \text{avec } -k < s < k \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} L(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} k(x) \exp(-sx) dx \\ &= -\frac{mV_0}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-k|x|) \exp(-sx) dx \\ &= \frac{2mV_0}{s^2 - k^2} \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} 1 - L(s) &= \frac{s^2 - (k^2 + 2mV_0)}{s^2 - k^2} \\ &= \frac{(s - \lambda_1)(s + \lambda_1)}{(s - k)(s + k)}, \quad \text{où } \lambda_1 = \sqrt{k^2 + 2mV_0} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Notons

$$\Phi_i(s) = \Phi^+(s) \quad \text{pour } \operatorname{Re}(s) < b, \quad \text{et } \Phi_e(s) = \Phi^-(s) \quad \text{pour } \operatorname{Re}(s) > b.$$

$$\Phi^+(s) = \frac{s - \lambda_1}{s - k}, \quad \text{et} \quad \Phi^-(s) = \frac{s + k}{s + \lambda_1} \quad (5.17)$$

Région $\operatorname{Re}(s) < b$. La formule (5.10) s'écrit sous la forme :

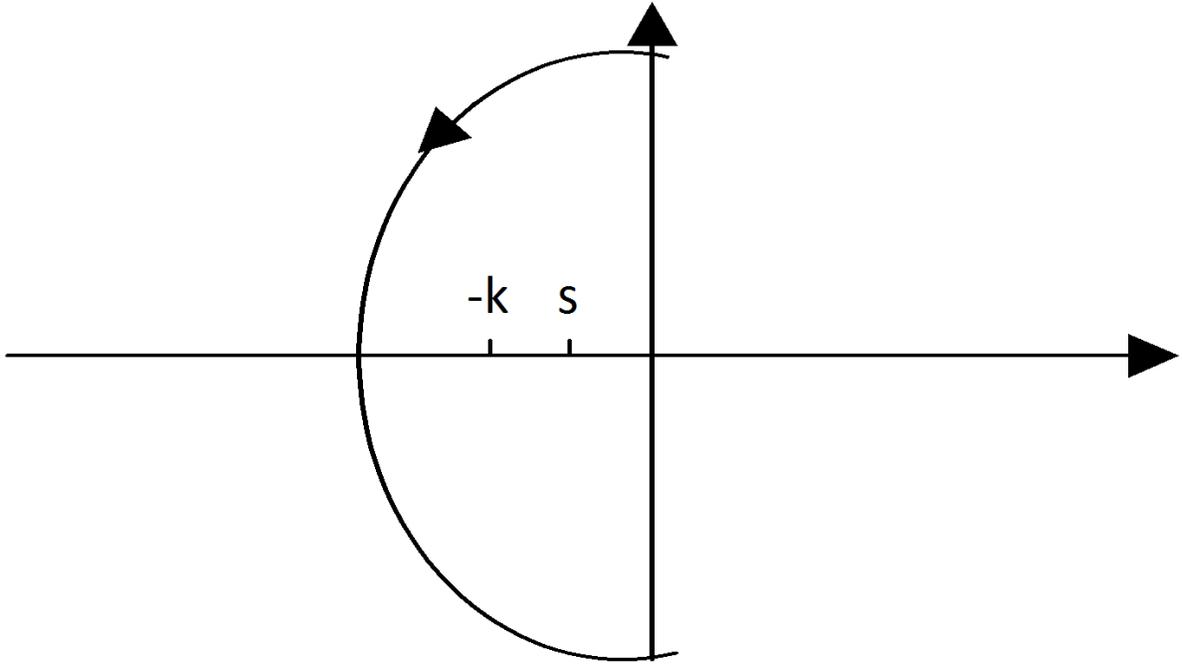
$$\varphi^+(s) = \frac{\Phi^+(s)}{2i\pi} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{B(\tau)}{\Phi^+(\tau)(\tau - s)} d\tau \quad (5.18)$$

Pour la droite imaginaire (d'éq $\operatorname{Re}(s) = 0$), la solution est :

$$\begin{aligned} \varphi^+(s) &= \frac{m}{2\pi ik} \frac{s - \lambda_1}{s - k} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{2k \exp(-\tau y)}{(k^2 - \tau^2) \frac{\tau - \lambda_1}{\tau - k} (\tau - s)} d\tau \\ &= -\frac{m}{2i\pi k} \left(\frac{s - \lambda_1}{s - k} \right) \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{2k \exp(-\tau y)}{(k + \tau)(\tau - \lambda_1)(\tau - s)} d\tau \end{aligned} \quad (5.19)$$

Voyons le cas $y < 0$:

Alors le théorème de résidus donne le calcul de ce intégrale, le demi cercle est sur la gauche de l'axe imaginaire, donc il y a deux poles simples l'un pour $\tau = -k$ et l'autre



pour $\tau = s$

$$\begin{aligned}\varphi^+(s) &= \frac{m}{k} \left(\frac{s - \lambda_1}{s - k} \right) \left[\frac{2k \exp(ky)}{(k + \lambda_1)(k + s)} + \frac{2k \exp(-sy)}{(s + k)(s - \lambda_1)} \right] \\ \varphi^+(s) &= \frac{2m(s - \lambda_1) \exp ky}{(s - k)(k + \lambda_1)(s + k)} + \frac{2im \exp(-sy)}{(s - k)(s + k)}\end{aligned}\quad (5.20)$$

Mais avant d'inverser, il faut revenir à la valeur exacte de $k = ik$:

$$\lambda_1 = \sqrt{(ik)^2 + 2mV_0} = i\mu, \quad \text{où} \quad \mu = \sqrt{k^2 - k_0^2} \quad \text{avec} \quad k_0^2 = 2mV_0, \quad k > k_0$$

$$\varphi^+(s) = \frac{2m(s - i\mu) \exp(iky)}{(s - ik)(ik + i\mu)(s + ik)} + \frac{2m \exp(-sy)}{(s - ik)(s + ik)}\quad (5.21)$$

Le cas $x < 0$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \varphi^+(t) \exp(tx) dt \\ \varphi(x) &= \frac{2im \exp(iky)}{(i\mu + ik)2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{(t - i\mu) \exp(tx)}{(t + ik)(t - ik)} dt + \frac{2im}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\exp t(x - y)}{(t - ik)(t + ik)} dt\end{aligned}\quad (5.22)$$

Donc pour $x < 0$: l'intégrale de premier terme est prise dans le demi-cercle à droite (le résidu est au pôle $t = ik$). L'intégrale de deuxième terme pour $x < y$ est prise dans le demi-cercle à droite (le résidu est au pôle $t = ik$), pour $x > y$ est prise dans le demi-cercle à gauche (le résidu est au pôle $t = -ik$) (voir fig.5.1) :

$$\varphi(x) = -\frac{m(k-\mu)\exp(ik(x+y))}{ik(k+\mu)} + \frac{m}{ik} \begin{cases} -\exp(ik(x-y)), & x < y \\ -\exp(-ik(x-y)), & x > y \end{cases} \quad (5.23)$$

La solution dans le cas $y < 0$ et $x < 0$ notée $g_{-,-}(x, y)$

$$g_{-,-}(x, y) = \frac{im}{k} \left[\exp(ik|x-y|) + \frac{k-\mu}{k+\mu} \exp(ik(x+y)) \right] \quad (5.24)$$

De même nous trouvons les 3 autres résultats :

Le cas : $y > 0 > x$:

$$g_{-,+}(x, y) = \frac{2im \exp(ikx - i\mu y)}{k + \mu} \quad (5.25)$$

le cas $y < 0 < x$

$$g_{+,-}(x, y) = \frac{2im \exp(-i\mu x +iky)}{k + \mu} \quad (5.26)$$

le cas : $x > 0$ et $y > 0$

$$g_{+,+}(x, y) = \frac{im}{\mu} \left[\exp(i\mu|x-y|) - \frac{\mu-k}{\mu+k} \exp(-i\mu(x+y)) \right] \quad (5.27a)$$

5.1.2 Méthode des perturbations :

Reprenons le problème aux valeurs propres à une dimension (dans \mathfrak{R}) :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x) \right) \Psi = E\Psi \quad (5.28)$$

où $V(x)$ est la fonction de Heaviside c'est à dire égale à V_0 pour $x \geq 0$ et nulle pour $x \leq 0$. Les conditions aux limites sont celles de Dirichlet-Neumann. Nous allons maintenant le traiter par la méthode perturbative qui consiste à développer le noyau de Green en série et travailler directement sur les propriétés des termes de la série qui sont eux aussi des fonctions analytiques par morceau (sectionnellement analytiques). Ceci nous conduit à établir des relations de récurrence entre différents termes du développement perturbatif que nous arrivons par la suite à les resommer et retrouver les différents résultats par la méthode directe qu'on vient d'accomplir dans le paragraphe précédent. Le noyau de Feynman [23] associé à ce problème est défini comme :

$$K(x, T/x_0, 0) = \int_{x(0)=x_0}^{x(T)=x} D[x(t)] \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_0^T \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)\right) dt\right) \quad (5.29)$$

où $D[x(t)]$ est la mesure formelle de l'espace du chemin. La méthode des perturbations [55] permet d'écrire le noyau $K(x, T/x_0, 0)$ comme une série infinie :

$$K(x, T/x_0, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x, T/x_0, 0) \quad (5.30)$$

où :

$$K_n(x, T/x_0, 0) = (-i)^n \int_0^T dt_n \dots \int_0^{t_2} dt_1 * \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=0}^{j=n} K_0(x_{j+1}, t_{j+1}/x_j, t_j) \prod_{j=1}^{j=n} V(x_j) dx_j \quad (5.31)$$

et $K_0(x_{j+1}, t_{j+1}/x_j, t_j)$ est le noyau de la particule libre donné comme :

$$K_0(x_{j+1}, t_{j+1}/x_j, t_j) = \left(\frac{m}{2i\pi(t_{j+1} - t_j)}\right)^{1/2} \exp(im(x_{j+1} - x_j)^2/2(t_{j+1} - t_j)) \quad (5.32)$$

La transformation de Fourier de $K_n(x, T/x_0, 0)$ en T est :

$$g_n(x, x_0) = i \int_0^{\infty} K_n(x, T/x_0, 0) \exp(-iET) dT \quad (5.33)$$

donc on peut écrire :

$$\begin{aligned} g_n(x, x_0) &= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=0}^{j=n} g_0(x_{j+1}, x_j) \prod_{j=1}^{j=n} V(x_j) dx_j \\ &= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n g_0(x, x_n) V(x_n) \prod_{j=0}^{j=n-1} g_0(x_{j+1}, x_j) \prod_{j=1}^{j=n-1} V(x_j) dx_j \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n g_0(x, x_n) V(x_n) g_{n-1}(x_n, x_0) \end{aligned} \quad (5.34)$$

où :

$$g_0(x, x_n) = i \int_0^{\infty} dT. K_0(x, T : x_n, 0) \exp(-iET) = \frac{m}{k} \exp(-k|x - x_n|) \quad (5.35)$$

$k^2 = 2mE$ et :

$$V(x) = V_0 \theta(x), (V_0 > 0) \quad (5.36)$$

Après le substitution de la dernière expression de potential $V(x)$ dans (5.34), on obtient :

$$g_n(x, x_0) \equiv g_n(x) = -\frac{mV_0}{k} \int_0^{\infty} d\xi \exp(-k|x - \xi|) g_{n-1}(\xi) \quad (5.37)$$

Dans les étapes suivantes on utilise les notations de [57] comme :

$$g_n^+(x) = \begin{cases} 0; & x > 0 \\ g_n(x); & x < 0 \end{cases} \quad ; \text{et} \quad g_n^-(x) = \begin{cases} -g_n(x); & x > 0 \\ 0; & x < 0. \end{cases} \quad (5.38)$$

Donc l'équation (5.37) s'écrit :

$$g_n^+(x) - g_n^-(x) = \frac{mV_0}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \exp(-k|x-\xi|) g_{n-1}^-(\xi) \quad (5.39)$$

La transformation bilatérale de Laplace au point x de "l'équation intégrale" (5.39) est :

$$g_n^+(s) - g_n^-(s) = \frac{mV_0}{k} K(s) g_{n-1}^-(s) \quad (5.40)$$

où :

$$g_n^+(s) = \int_{-\infty}^0 g_n(x) \exp(-sx) dx \quad ; \quad s < 0 \quad (5.41)$$

$$g_n^-(s) = - \int_0^{\infty} g_n(x) \exp(-sx) dx \quad ; \quad s > 0 \quad (5.42)$$

$$K(s) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-sx - k|x|) = \frac{2k}{k^2 - s^2} \quad \text{telle que} \quad -k < s < k \quad (5.43)$$

puis on calcule les trois termes seccessives de cette série de perturbation :

$$g_n^+(s) - g_n^-(s) = \frac{-2mV_0}{s^2 - k^2} g_{n-1}^-(s) \quad (5.44)$$

La solution de cette equation s'obtient par la discussion sur les regions ($y < 0$ et $y > 0$) qui tombe dans le problème non homogène de Hilbert section -58- à [57].

Region $y < 0$: Comme dans le cas des équations différentielles, on utilise les conditions initiales puis en généralisant la solution. D'abord calculons les termes initiaux $g_0^-(s)$ et $g_0^+(s)$:

$$g_0^-(s) = \left(-\frac{m}{k}\right) \int_0^{\infty} dx \exp(-sx - k|x - y|) = \left(-\frac{m}{k}\right) \frac{\exp(ky)}{s + k} \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned} g_0^+(s) &= \left(\frac{m}{k}\right) \int_{-\infty}^0 dx \exp(-sx - k|x - y|) \\ &= \left(-\frac{m}{k}\right) \left(\frac{\exp(ky)}{s + k} + \frac{\exp(-sy)}{s - k} - \frac{\exp(-sy)}{s + k} \right) \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$g_1^+(s) - g_1^-(s) = \left(\frac{m}{k}\right) \left(\frac{2mV_0}{s^2 - k^2}\right) \left(\frac{\exp(ky)}{s + k}\right) \equiv f_1(s) \quad (5.47)$$

la correspondance entre le problème non homogène de Hilbert et la dernière équation (formule (4.94) du théorème (3) paragraphe (3) chapitre précédent :

$$\begin{aligned} g_1^+(s) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{d\tau}{\tau - s} f_1(\tau) = -\text{residue} \left(\frac{f_1(\tau)}{\tau - s} \right)_{\tau=k} + (P(s) = 0) \\ g_1^+(s) &= \left(\frac{m}{k}\right) \frac{1}{4} \left(\frac{V_0}{E}\right) \frac{\exp(ky)}{s - k} \end{aligned} \quad (5.48)$$

Retournons à l'équation initiale pour $n = 2$

D'abord calculons $g_1^-(s)$

$$g_1^-(s) = g_1^+(s) - f_1(s)$$

$g_1^-(s)$ se calcule à partir de la formule :

$$g_1^-(s) = g_1^+(s) - f_1(s) = \left(\frac{m}{k}\right) \frac{1}{4} \left(\frac{V_0}{E}\right) \frac{\exp(ky)}{s - k} \left(1 - \frac{(2k)^2}{(s + k)^2} \right) \quad (5.49)$$

Calculons maintenant $g_2^+(s)$ obéissant à la formule de récurrence :

$$g_2^+(s) - g_2^-(s) = -\frac{2mV_0}{s^2 - k^2}g_1^-(s) \quad (5.50)$$

$$= \frac{2mV_0}{s^2 - k^2} \left(\frac{m}{k}\right) \left(\frac{V_0}{E}\right) \frac{1}{4} \frac{\exp ky}{s - k} \left[1 - \frac{(2k)^2}{(s + k)^2}\right] = f_2(s)$$

En utilisant le même formule (4.94), nous déduisons :

$$g_2^+(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\tau}{\tau - s} f_2(\tau)$$

$$= \frac{m}{k} \left(\frac{V_0}{E}\right)^2 \frac{k^2}{4} \exp(ky) \frac{1}{2i\pi} * \left[\frac{1}{(2k)^2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\tau}{(\tau - k)(\tau - s)} - \frac{1}{2k} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\tau}{(\tau - k)^2(\tau - s)} \right.$$

$$\left. - \frac{3}{(2k)^2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\tau}{(\tau - k)(\tau - s)} + \frac{1}{2k} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\tau}{(\tau - k)^2(\tau - s)} \right]$$

$$= \frac{m}{k} \left(\frac{V_0}{E}\right)^2 \frac{k^2}{4} \exp(ky) *$$

$$\left[\frac{1}{(2k)^2(k - s)} + \frac{1}{(2k)(k - s)^2} - \frac{3}{(2k)^2(k - s)} - \frac{1}{2k(k - s)^2} \right]$$

$$g_2^+(s) = -\frac{m}{k} \left(\frac{V_0}{E}\right)^2 \frac{1}{8} \frac{\exp ky}{s - k}$$

En suivant le calcul terme à terme on peut remarquer que :

$$g_n^+(s) = -\frac{m}{k} a_n(k) \left(\frac{\exp(ky)}{s - k}\right); \text{ pour } n \geq 1 \quad (5.51)$$

où :

$$a_n(k) = -\frac{z^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - z}}{1 + \sqrt{1 - z}}\right)_{z=0}, \text{ avec } z = \frac{-V_0}{E} \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned}
g^+(s) &= g_0^+(s) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n^+(s) \\
&= -\frac{m}{k} \left[\frac{\exp(ky)}{s+k} + \frac{\exp(-sy)}{s-k} - \frac{\exp(-sy)}{s+k} \right] \\
&\quad - \frac{m}{k} \left(\frac{\exp(ky)}{s-k} \right) \sum_{n=1}^{\infty} a_n(k) \\
&= -\frac{m}{k} \left[\frac{\exp(ky)}{s+k} + \frac{\exp(-sy)}{s-k} - \frac{\exp(-sy)}{s+k} \right] \\
&\quad + \frac{m}{k} \left(\frac{\exp(ky)}{s-k} \right) \frac{(1 - \sqrt{1 + V_0/E})}{(1 + \sqrt{1 + V_0/E})}
\end{aligned} \tag{5.53}$$

Retournons à notre problème, de la fonction de Green pour le potentiel de heaviside. Calculons la transformé inverse de Laplace des deux termes pour ($y < 0$ et $x < 0$). Le calcul de l'intégrale admet les demi-cercles à droite ou à gauche respectivement suivant le sign de ($x-y$) où x :

$$\begin{aligned}
g_{-,-}(x, y) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} \exp(sx)g^+(s)ds \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \frac{m}{k} \exp(-k(x-y)) + \frac{m}{k} \exp(k(x+y)) \left(\frac{1-\sqrt{1+V_0/E}}{1+\sqrt{1+V_0/E}} \right) \quad ; x > y \\ \frac{m}{k} \exp(k(x-y)) + \frac{m}{k} \exp(k(x+y)) \left(\frac{1-\sqrt{1+V_0/E}}{1+\sqrt{1+V_0/E}} \right) \quad ; x < y \end{array} \right\} \\
g_{-,-}(x, y) &= \frac{m}{k} \exp(-k|x-y|) + \frac{m}{k} \exp(k(x+y)) \left(\frac{1 - \sqrt{1 + V_0/E}}{1 + \sqrt{1 + V_0/E}} \right)
\end{aligned} \tag{5.54}$$

De même, pour les autres domaines on trouve [1]

Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
g_{+,-}(x, y) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} g^-(s) \exp(sx) ds \\
g_{+,-}(x, y) &= g(x, y) = -\frac{m}{k} \exp(ky - \mu x) \left[\frac{k - \mu}{k + \mu} \frac{-\mu + k}{-2\mu} + \frac{\mu + k}{2\mu} \right] \\
&= \frac{-2m}{k + \mu} \exp(ky - \mu x)
\end{aligned} \tag{5.55}$$

Le résultat pour $y > 0$ et $x < 0$:

$$\begin{aligned}
g_{-,+}(x, y) &= -\frac{m}{k} \exp(ky - \mu x) \left[\frac{k - \mu}{k + \mu} \frac{-\mu + k}{-2\mu} + \frac{\mu + k}{2\mu} \right] \\
&= \frac{-2m}{k + \mu} \exp(kx - \mu y)
\end{aligned} \tag{5.56}$$

pour $x > y > 0$:

$$\begin{aligned}
g_{+,+}(x, y) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} g^-(s, y) \exp(sx) ds \\
&= -2m \exp(-\mu y) \frac{(k - \mu) \exp(-\mu x)}{2\mu(k + \mu)} - 2m \frac{\exp(-\mu(x - y))}{-2\mu} \\
&= -\frac{m}{\mu} \left(\frac{k - \mu}{k + \mu} \exp(-\mu(x + y)) - \exp(-\mu(x - y)) \right)
\end{aligned} \tag{5.57}$$

qui est conforme avec [6] et [7].

5.2 Les problèmes à deux dimensions

5.2.1 Méthode directe du problème d'une barrière finie :

On considère le problème relatif à l'équation de Schrödinger pour un potentiel continu par morceau : il vaut une constante (nulle) sur un disque de rayon "a" et une autre constante V_0 en dehors de ce disque.

soit l'équation intégrale

$$g_l(r, r') = g_0(r, r') - V_0 \int_a^\infty \zeta g_0(r, \zeta) g_l(\zeta, r') d\zeta \quad (5.58)$$

pour résoudre cette équation intégrale, définissons les nouvelles fonctions g_l^+ et g_l^- telles que

$$g_l^+(p, r) = \begin{cases} g_l(p, r), & r > a \\ 0, & r \leq a \end{cases}, \quad g_l^-(p, r) = \begin{cases} 0, & r < a \\ -g_l(p, r), & r \geq a \end{cases}$$

donc l'équation intégrale (5.58) se transforme comme

$$g_l^+(r, r') - g_l^-(r, r') = g_0(r, r') + V_0 \int_0^\infty \zeta g_0(r, \zeta) g_l^-(\zeta, r') d\zeta \quad (5.59)$$

on définit la transformation de Bessel d'une fonction g_l comme

$$\hat{G}_l(p, r') = \int_0^\infty r J_l(pr) g_l(r, r') dr$$

la transformation de Bessel de l'équation (5.59) est

$$\int_0^{\infty} r J_l(pr) g_l^+(r, r') dr - \int_0^{\infty} r J_l(pr) g_l^-(r, r') dr = \int_0^{\infty} r J_l(pr) g_0(r, r') dr \quad (5.60)$$

$$+ V_0 \int_0^{\infty} r J_l(pr) dr \int_a^{\infty} \zeta g_0(r, \zeta) g_l^-(\zeta, r') d\zeta$$

On définit $g_0(r, r')$ par

$$g_0(r, r') = \int_0^{\infty} \exp \left[-2\alpha\epsilon \left(\frac{r^2 + r'^2}{u} \right) + \frac{u}{2} \right] I_i \left(4\alpha\epsilon \frac{rr'}{u} \right) \frac{du}{u} \quad (5.61)$$

en substituant (5.61) à (5.60) on obtient

$$\hat{G}_l^+(p, r') - \hat{G}_l^-(p, r') = \int_0^{\infty} r J_l(pr) dr \int_0^{\infty} \exp \left[-2\alpha\epsilon \left(\frac{r^2 + r'^2}{u} \right) + \frac{u}{2} \right] I_i \left(4\alpha\epsilon \frac{rr'}{u} \right) \frac{du}{u}$$

$$+ V_0 \int_0^{\infty} r J_l(pr) dr \int_0^{\infty} \zeta \left(\int_0^{\infty} \exp \left[-2\alpha\epsilon \left(\frac{r^2 + \zeta^2}{u} \right) + \frac{u}{2} \right] I_i \left(4\alpha\epsilon \frac{\zeta r}{u} \right) \frac{du}{u} \right) g_l^-(\zeta, r') d\zeta$$

$$= \int_0^{\infty} \exp \left[-2\alpha\epsilon \left(\frac{r^2}{u} \right) + \frac{u}{2} \right] \frac{du}{u} \int_0^{\infty} r J_l(pr) I_i \left(4\alpha\epsilon \frac{rr'}{u} \right) \exp \left(\frac{-2\alpha\epsilon r^2}{u} \right) dr$$

$$+ V_0 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp \left[-2\alpha\epsilon \left(\frac{\zeta^2}{u} \right) + \frac{u}{2} \right] \frac{du}{u} \zeta g_l^-(\zeta, r') d\zeta \int_0^{\infty} r J_l(pr) I_i \left(4\alpha\epsilon \frac{r\zeta}{u} \right) \exp \left(\frac{-2\alpha\epsilon r^2}{u} \right) dr \quad (5.62)$$

d'après la formule 6.633.4 Gradsteyn

$$\hat{G}_l^+(p, r') - \hat{G}_l^-(p, r') = \int_0^{\infty} \exp \left[-2\alpha\epsilon \left(\frac{r^2}{u} \right) + \frac{u}{2} \right] \frac{u}{2\alpha\epsilon} \exp \left[\frac{\left(\frac{4\alpha\epsilon r'}{u} \right)^2 - p^2}{8\alpha\epsilon} u \right] J_l \left(\frac{4\alpha\epsilon pr'}{u} \times \frac{u}{4\alpha\epsilon} \right) \frac{du}{u}$$

$$+V_0 \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left[-2\alpha\epsilon \left(\frac{\zeta^2}{u} \right) + \frac{u}{2} \right] \exp \left[\frac{\left(\frac{4\alpha\epsilon\zeta}{u} \right)^2 - p^2}{8\alpha\epsilon} u \right] J_l \left(\frac{4\alpha\epsilon p\zeta}{u} \times \frac{u}{4\alpha\epsilon} \right) \frac{du}{u} \zeta g_l^+ (\zeta, r) d\zeta \quad (5.63)$$

$$= \int_0^\infty \exp \left[-2\alpha\epsilon \left(\frac{16\alpha^2\epsilon^2}{8\alpha\epsilon} - 2\alpha\epsilon \right) \frac{r^2}{u} + \frac{u}{2} \left(1 - \frac{p^2}{4\alpha\epsilon} \right) \right] J_l (pr) \frac{du}{4\alpha\epsilon} \quad (5.64)$$

$$+V_0 \int_0^\infty \zeta d\zeta \int_0^\infty \exp \left[-2\alpha\epsilon \left(\frac{16\alpha^2\epsilon^2}{8\alpha\epsilon} - 2\alpha\epsilon \right) \frac{\zeta^2}{u} + \frac{u}{2} \left(1 - \frac{p^2}{4\alpha\epsilon} \right) \right] J_l (p\zeta) g_l^- (\zeta, r) \frac{du}{4\alpha\epsilon}$$

$$= \int_0^\infty \exp \left[\left(1 - \frac{p^2}{4\alpha\epsilon} \right) \frac{u}{2} \right] \frac{du}{4\alpha\epsilon} \left(J_l (pr) + V_0 \int_0^\infty \zeta J_l (p\zeta) g_l^- (\zeta, r) d\zeta \right) \quad (5.65)$$

sous la condition $1 - \frac{p^2}{4\alpha\epsilon} < 0 \Leftrightarrow p^2 > 4\alpha\epsilon$, l'intégrale est convergente et

$$\hat{G}_l^+ (p, r) - \hat{G}_l^- (p, r) = \frac{2}{(p^2 - 4\alpha\epsilon)} \left(J_l (pr) + V_0 \int_0^\infty \zeta J_l (p\zeta) g_l^- (\zeta, r) d\zeta \right)$$

donc l'équation intégrale se transforme comme

$$\hat{G}_l^+ (p, r) - \hat{G}_l^- (p, r) = \frac{2J_l (pr)}{p^2 - 4\alpha\epsilon} + \frac{2V_0}{p^2 - 4\alpha\epsilon} \hat{G}_l^- (p, r) \quad (5.66)$$

$$\hat{G}_l^+ (p, r) - \left[1 + \frac{2V_0}{p^2 - 4\alpha\epsilon} \right] \hat{G}_l^- (p, r) = \frac{2J_l (pr)}{p^2 - 4\alpha\epsilon} \quad (5.67)$$

pour

$$\epsilon = E, \quad 2\alpha = m, \quad \text{on a } 4\alpha\epsilon = 2mE = k^2, \quad \text{et } \mu^2 = k^2 - 2V_0$$

donc (5.67) s'écrit

$$\hat{G}_l^+(p, r) - \left[\frac{p^2 - \mu^2}{p^2 - k^2} \right] \hat{G}_l^-(p, r) = \frac{2J_l(pr)}{p^2 - k^2} = b(p) \quad (5.68)$$

soit la décomposition

$$\frac{p^2 - \mu^2}{p^2 - k^2} = \frac{(p + \mu)(p - \mu)}{(p + k)(p - k)}$$

posons

$$\chi^+(p) = \frac{p - \mu}{p - k}, \quad \text{et} \quad \chi^-(p) = \frac{p + k}{p + \mu}$$

d'après le théorème [57] les fonctions \hat{G}_l^+ et \hat{G}_l^- sont déterminées par

le cas $r' > a$:

$$\begin{aligned} \hat{G}_l^+(p, r) &= \frac{\chi^+(p)}{2\pi i} \int_L \frac{b(\tau) d\tau}{\chi^+(\tau)(\tau - p)}, \quad \text{où } L \text{ est un contour fermé} \\ &= \frac{2(p - \mu)}{2\pi i(p - k)} \int_L \frac{J_l(\tau r') d\tau}{(\tau^2 - k^2) \left(\frac{\tau - \mu}{\tau - k} \right) (\tau - p)} \\ &= \frac{2(p - \mu)}{2\pi i(p - k)} \int_L \frac{J_l(\tau r') d\tau}{(\tau + k)(\tau - \mu)(\tau - p)} \end{aligned} \quad (5.69)$$

d'après le théorème des résidus les points $\tau = -k$ et $\tau = p$ à l'intérieur du contour on a

$$\begin{aligned} \hat{G}_l^+(p, r) &= \frac{2B(k, \mu, a)(p - \mu) J_l(kr')}{(p - k)(\mu + k)(p + k)} + \frac{2(p - \mu) J_l(pr')}{(p - k)(p + k)(p - \mu)} \\ &= \frac{2J_l(pr')}{(p - k)(p + k)} + \frac{2B(k, \mu, a)(p - \mu) J_l(kr')}{(p - k)(\mu + k)(p + k)} \end{aligned} \quad (5.70)$$

la réciproque pour $r' > r > a$:

$$g_l^{+,+}(r, r') = 2 \int_0^{+\infty} \frac{p J_l(pr) J_l(pr') dp}{(p - k)(p + k)} + \frac{2B(k, \mu, a) J_l(kr')}{(\mu + k)} \int_0^{+\infty} \frac{p(p - \mu) J_l(pr) dp}{(p^2 - k^2)}$$

$$= -\pi J_l(kr') Y_l(kr) + \frac{2B(k, \mu, a) J_l(kr') J_l(kr)}{(\mu + k)} \quad (5.71)$$

de même manière pour $r' < a$:

$$\begin{aligned} \hat{G}_l^-(p, r') &= \frac{\chi^-(p)}{2\pi i} \int_L \frac{b(\tau) d\tau}{\chi^+(\tau) (\tau - p)}, \quad \text{où } L \text{ est un contour fermé} \\ &= \frac{2(p+k)}{2\pi i (p+\mu)} \int_L \frac{J_l(\tau r') d\tau}{(\tau+k)(\tau-\mu)(\tau-p)} \end{aligned} \quad (5.72)$$

d'après le théorème des résidus les points $\tau = \mu$ et $\tau = p$ à l'intérieur du contour on a

$$\begin{aligned} \hat{G}_l^-(p, r') &= \frac{2(p+k) J_l(pr')}{(p+\mu)(p+k)(p-\mu)} + \frac{2A(k, \mu, a)(p+k) J_l(\mu r')}{(p+\mu)(\mu+k)(p-\mu)} \\ &= \frac{2A(k, \mu, a)(p+k) J_l(\mu r')}{(p+\mu)(\mu+k)(p-\mu)} + \frac{2J_l(pr')}{(p+\mu)(p-\mu)} \end{aligned} \quad (5.73)$$

la réciproque pour $r < r' < a$:

$$\begin{aligned} g_l^{-,-}(r, r') &= \frac{2A(k, \mu, a) J_l(\mu r')}{(\mu+k)} \int_0^{+\infty} \frac{p(p+k) J_l(pr) dp}{p^2 - \mu^2} + 2 \int_0^{+\infty} \frac{p J_l(pr) J_l(pr') dp}{p^2 - \mu^2} \\ &= \frac{2A(k, \mu, a) J_l(\mu r') J_l(\mu r)}{(\mu+k)} - \pi J_l(\mu r') Y_l(\mu r) \end{aligned} \quad (5.74)$$

la continuité de la fonction de Green au point $r = a$

$$\begin{aligned} g_l^{+,+}(a, r') = g_l^{-,-}(a, r') &\Leftrightarrow -\pi J_l(kr') Y_l(kr) + \frac{2B(k, \mu, a) J_l(kr') J_l(kr)}{(\mu+k)} = \\ &= \frac{2A(k, \mu, a) J_l(\mu r') J_l(\mu r)}{(\mu+k)} - \pi J_l(\mu r') Y_l(\mu a) \end{aligned} \quad (5.75)$$

la dérivabilité

$$\left. \frac{\partial g_l^{+,+}(a, r')}{\partial r} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial g_l^{-,-}(a, r')}{\partial r} \right|_{r=a} \Leftrightarrow k \left(-\pi J_l(kr') Y_l(kr) + \frac{2B(k, \mu, a) J_l(kr') J_l(kr)}{(\mu+k)} \right)$$

$$= \mu \left(\frac{2A(k, \mu, a) J_l(\mu r') J_l(\mu r)}{(\mu + k)} - \pi J_l(\mu r') Y_l'(\mu a) \right) \quad (5.76)$$

d'après la symétrie de la fonction de Green on prend A, B en fonction de a , donc on a le système au point $r = r' = a$

$$\begin{cases} g_l^{++}(a, a) = g_l^{--}(a, a) \\ \left[\frac{dg_l^{++}(r, a)}{dr} \right]_{r=a} = \left[\frac{dg_l^{--}(r, a)}{dr} \right]_{r=a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\pi(\mu + k) J_l(ka) Y_l(ka) + 2B(k, \mu, a) J_l(ka) J_l(ka) \\ = 2A(k, \mu, a) J_l(\mu a) J_l(\mu a) - \pi(\mu + k) J_l(\mu a) Y_l(\mu a) \\ -\pi k(\mu + k) Y_l'(ka) J_l(ka) + 2kB(k, \mu, a) J_l(ka) J_l(ka) \\ = 2\mu A(k, \mu, a) J_l(\mu a) J_l(\mu a) - \mu\pi(\mu + k) Y_l'(\mu a) J_l(\mu a) \end{cases} \quad (5.77)$$

d'après un certain calcul on trouve

$$A(k, \mu, a) = (\mu + k) \frac{-2J_l(ka) + \pi a J_l(\mu a) (kJ_l'(ka) Y_l(\mu a) - \mu J_l(ka) Y_l'(\mu a))}{2a J_l(\mu a) [kJ_l'(ka) J_l(\mu a) - \mu J_l(ka) J_l'(\mu a)]} \quad (5.78)$$

et

$$B(k, \mu, a) = (\mu + k) \frac{-2J_l(\mu a) + \pi a J_l(ka) (\mu J_l'(\mu a) Y_l(ka) - k J_l(\mu a) Y_l'(ka))}{2a J_l(ka) [\mu J_l'(ka) J_l(\mu a) - k J_l(ka) J_l'(\mu a)]} \quad (5.79)$$

d'où

$$g_l^{+,+}(r, r') = -\pi \left[\begin{array}{c} J_l(kr') Y_l(kr) - \\ \frac{-2J_l(\mu a) + \pi a J_l(ka) (\mu J_l'(\mu a) Y_l(ka) - k J_l(\mu a) Y_l'(ka))}{\pi a J_l(ka) [\mu J_l'(ka) J_l(\mu a) - k J_l(ka) J_l'(\mu a)]} J_l(kr') J_l(kr) \end{array} \right] \quad (5.80)$$

et

$$g_l^{-,-}(r, r') = -\pi \left[\begin{array}{c} J_l(\mu r') Y_l(\mu r) - \\ \frac{-2J_l(ka) + \pi a J_l(\mu a) (kJ_l'(ka) Y_l(\mu a) - \mu J_l(ka) Y_l'(\mu a))}{\pi a J_l(\mu a) [kJ_l'(ka) J_l(\mu a) - \mu J_l(ka) J_l'(\mu a)]} J_l(\mu r') J_l(\mu r) \end{array} \right] \quad (5.81)$$

Les cas mixtes :

le cas $r < a < r'$:

d'après l'égalité (5.69) on prend le pole $\tau = \mu$ on a

$$G_l^+(p, r') = J_l(\mu r') \left[\frac{2C(k, \mu, a)}{p-k} f(p) + \frac{h(p)}{(\mu+k)(p-k)} \right], \quad (5.82)$$

ou $f(p) = \frac{(p-\mu)(\mu+k)}{p+k}$ et $h(p) = \frac{(-p)^l(\mu+k)}{k^l(p+k)}$

la réciproque est donnée par

$$g_l^{-,+}(r, r') = J_l(\mu r') \left[2C(k, \mu, a) \int_0^{+\infty} \frac{p(p-\mu) J_l(pr) dp}{p^2 - k^2} + \frac{2}{(-k)^l} \int_0^{+\infty} \frac{p^{l+1} J_l(pr) dp}{p^2 - k^2} \right] \quad (5.83)$$

$$= \pi J_l(\mu r') [-Y_l(kr) + C(k, \mu, a) J_l(kr)] \quad (5.84)$$

D'après la continuité de la fonction de Green au point $r = a$ on a

$$g_l^{-,+}(a, a) = g_l^{+,+}(a, a) \Leftrightarrow$$

$$J_l(\mu a) [-Y_l(ka) + C(k, \mu, a) J_l(ka)] = \left[\begin{array}{c} -Y_l(ka) + \\ \frac{-2J_l(\mu a) + \pi a J_l(ka)(\mu J_l(\mu a) Y_l(ka) - k J_l(\mu a) Y_l(ka))}{\pi a [\mu J_l(ka) J_l(\mu a) - k J_l(ka) J_l(\mu a)]} \end{array} \right] J_l(ka) \quad (5.85)$$

$$C(k, \mu, a) = \frac{Y_l(ka)}{J_l(ka)} - \frac{Y_l(ka)}{J_l(\mu a)} + \frac{-2J_l(\mu a) + \pi a J_l(ka)(\mu J_l(\mu a) Y_l(ka) - k J_l(\mu a) Y_l(ka))}{\pi a J_l(\mu a) [\mu J_l(ka) J_l(\mu a) - k J_l(ka) J_l(\mu a)]}$$

$$C(k, \mu, a) = \frac{Y_l(ka)}{J_l(ka)} - \frac{4}{\pi a [\mu J_l(ka) J_l(\mu a) - k J_l(ka) J_l(\mu a)]} \quad (5.86)$$

enfin

$$g_l^{-,+}(r, r') = -\pi \left[\begin{array}{c} Y_l(kr) J_l(\mu r') \\ - \left[\frac{Y_l(ka)}{J_l(ka)} - \frac{4}{\pi a [\mu J_l(ka) J_l(\mu a) - k J_l(ka) J_l(\mu a)]} \right] J_l(kr) J_l(\mu r') \end{array} \right] \quad (5.87)$$

le cas $r' < a < r$:

d'après la formule (5.72) on prend le pole au point $\tau = -k$

$$G_l^-(p, r) = -J_l(kr) \left[\frac{2D(k, \mu, a)}{(\mu + k)(p + \mu)} T(p) + \frac{n(p)}{(\mu + k)(p + \mu)} \right] \quad (5.88)$$

$$\text{où } T(p) = \frac{(k - p)(\mu + k)}{(p - \mu)}, \text{ et } n(p) = \frac{(-p)^{l-1}(\mu + k)}{k^l(p - \mu)}$$

la réciproque est donnée par

$$g_l^{+,-}(r, r) = J_l(kr) \left[2D(k, \mu, a) \int_0^{+\infty} \frac{p(p - k) J_l(pr) dp}{p^2 - \mu^2} + \frac{2}{(-k)^l} \int_0^{+\infty} \frac{p^{l+1} J_l(pr) dp}{p^2 - \mu^2} \right] \quad (5.89)$$

$$= \pi J_l(kr) [-Y_l(\mu r) + D(k, \mu, a) J_l(\mu r)] \quad (5.90)$$

D'après la continuité de la fonction de Green au point $r = a$ on a

$$g_l^{+,-}(a, a) = g_l^{-,-}(a, a) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} J_l(ka) [Y_l(\mu a) - D(k, \mu, a) J_l(\mu a)] &= J_l(\mu a) Y_l(\mu a) - \\ \frac{-2J_l(ka) + \pi a J_l(\mu a) (kJ_l(ka) Y_l(\mu a) - \mu J_l(ka) Y_l'(\mu a))}{\pi a [kJ_l(ka) J_l(\mu a) - \mu J_l(ka) J_l'(\mu a)]} J_l(\mu a) & \\ D(k, \mu, a) = \frac{Y_l(\mu a)}{J_l(\mu a)} - \frac{Y_l(\mu a)}{J_l(ka)} + & \\ \frac{-2J_l(ka) + \pi a J_l(\mu a) (kJ_l(ka) Y_l(\mu a) - \mu J_l(ka) Y_l'(\mu a))}{\pi a J_l(ka) [kJ_l(ka) J_l(\mu a) - \mu J_l(ka) J_l'(\mu a)]} & \\ D(k, \mu, a) = \frac{Y_l(\mu a)}{J_l(\mu a)} - \frac{4}{\pi a [kJ_l(ka) J_l(\mu a) - \mu J_l(ka) J_l'(\mu a)]} & \end{aligned} \quad (5.91)$$

d'où

$$g_l^{+,-}(r, r) = -\pi \left[\begin{aligned} &J_l(kr) Y_l(\mu r) \\ - \left[\frac{Y_l(\mu a)}{J_l(\mu a)} - \frac{4}{\pi a [kJ_l(ka) J_l(\mu a) - \mu J_l(ka) J_l'(\mu a)]} \right] &J_l(kr) J_l(\mu r) \end{aligned} \right] \quad (5.92)$$

5.2.2 Méthode directe du problème d'un puits fini ($-V_0$ sur un disque) :

soit l'équation intégrale

$$g_l(r, r') = g_0(r, r') + V_0 \int_0^a \zeta g_0(r, \zeta) g_l(\zeta, r') d\zeta \quad (5.93)$$

et soit les considérations

$$g^+(r) = \begin{cases} g(r), & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}, \quad g^-(r) = \begin{cases} 0, & r \leq a \\ -g(r), & r > a \end{cases} \quad (5.94)$$

d'après ces considérations l'équation (5.93) s'écrit

$$g_l^+(r, r') - g_l^-(r, r') = g_0(r, r') + V_0 \int_0^\infty \zeta g_0(r, \zeta) g_l^+(\zeta, r') d\zeta \quad (5.95)$$

on définit la transformation de Bessel d'une fonction g_l comme

$$\hat{G}_l(p, r') = \int_0^\infty r J_l(pr) g_l(r, r') dr \quad (5.96)$$

la transformation de Bessel de l'équation (5.95) est définie par

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty r J_l(pr) g_l^+(r, r') dr - \int_0^\infty r J_l(pr) g_l^-(r, r') dr \\ &= \int_0^\infty r J_l(pr) g_0(r, r') dr + \int_0^\infty r J_l(pr) dr \int_0^\infty \zeta g_0(r, \zeta) g_l^+(\zeta, r') d\zeta \end{aligned} \quad (5.97)$$

de la même manière précédente on obtient

$$\hat{G}_l^+(p, r') - \hat{G}_l^-(p, r') = \frac{2J_l(pr')}{p^2 - k^2} + \frac{2V_0}{p^2 - k^2} \hat{G}_l^+(p, r') \quad (5.98)$$

$$\hat{G}_l^+(p, r) \left[\frac{p^2 - \mu_1^2}{p^2 - k^2} \right] - \hat{G}_l^-(p, r) = \frac{2J_l(pr)}{p^2 - k^2} \equiv B(p), \text{ ou } \mu_1^2 = k^2 + 2V_0 \quad (5.99)$$

et la décomposition de

$$\frac{p^2 - \mu_1^2}{p^2 - k^2} \text{ qui est } F^+(p) = \frac{p - \mu_1}{p - k}, \quad \text{et} \quad F^-(p) = \frac{p + k}{p + \mu_1} \quad (5.100)$$

d'après le théorème [57] les fonctions \hat{G}_l^+ et \hat{G}_l^- sont déterminées par

pour $r' \leq a$

$$\hat{G}_l^+(p, r) = \frac{F^-(p)}{2\pi i} \int_L \frac{B(\tau) d\tau}{F^+(\tau)(\tau - p)}, \quad \text{où } L \text{ est un contour fermé} \quad (5.101)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{p + k}{2\pi i(p + \mu_1)} \int_L \frac{2J_l(\tau r') d\tau}{(\tau^2 - k^2) \left(\frac{\tau - \mu_1}{\tau - k} \right) (\tau - p)} \\ &= \frac{p + k}{2\pi i(p + \mu_1)} \int_L \frac{2J_l(\tau r') d\tau}{(\tau + k)(\tau - \mu_1)(\tau - p)} \end{aligned} \quad (5.102)$$

en appliquant le théorème des résidus aux points ($\tau = \mu_1$ et $\tau = p$ sont à l'intérieur du contour) on obtient

$$\hat{G}_l^+(p, r) = \frac{2\beta(\mu_1, k, a)(p - k) J_l(\mu_1 r')}{(\mu_1 + k)(p^2 - \mu_1^2)} + \frac{2J_l(pr)}{p^2 - \mu_1^2} \quad (5.103)$$

la réciproque pour $r \leq r' \leq a$

$$\begin{aligned} g^{++}(r, r') &= \frac{2\beta(\mu_1, k, a) J_l(\mu_1 r')}{\mu_1 + k} \int_0^{+\infty} \frac{p(p - k) J_l(pr) dp}{(p^2 - \mu_1^2)} + 2 \int_0^{+\infty} \frac{p J_l(pr') J_l(pr) dp}{(p^2 - \mu_1^2)} \\ &= \frac{2\beta(k, \mu, a) J_l(\mu_1 r') J_l(\mu_1 r)}{(\mu_1 + k)} - \pi J_l(\mu_1 r') Y_l(\mu_1 r) \end{aligned} \quad (5.104)$$

de même manière pour $r' > a$

$$\hat{G}_l^-(p, r') = \frac{F^+(p)}{2\pi i} \int_L \frac{B(\tau) d\tau}{F^+(\tau)(\tau - p)}, \quad \text{où } L \text{ est un contour fermé} \quad (5.105)$$

$$= \frac{p - \mu_1}{2\pi i(p - k)} \int_L \frac{2J_l(\tau r') d\tau}{(\tau + k)(\tau - \mu_1)(\tau - p)} \quad (5.106)$$

en appliquant le théorème des résidus aux points ($\tau = -k$ et $\tau = p$ sont à l'intérieur au contour) on obtient

$$\hat{G}_l^-(p, r') = \frac{2\alpha(\mu_1, k, a)(p - \mu_1) J_l(kr')}{(\mu_1 + k)(p^2 - k^2)} + \frac{2J_l(pr')}{p^2 - k^2} \quad (5.107)$$

la réciproque pour $r > r' > a$

$$g^{--}(r, r') = \frac{2\alpha(\mu_1, k, a) J_l(kr')}{\mu_1 + k} \int_0^{+\infty} \frac{p(p - \mu_1) J_l(pr) dp}{(p^2 - k^2)} + 2 \int_0^{+\infty} \frac{p J_l(pr') J_l(pr) dp}{(p^2 - k^2)} \quad (5.108)$$

$$= \frac{2\alpha(\mu_1, k, a) J_l(kr') J_l(kr)}{(\mu_1 + k)} - \pi J_l(kr') Y_l(kr) \quad (5.109)$$

d'après la symétrie de la fonction de Green on prend α, β en fonction de a , donc on a le système au point $r = r' = a$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_l^{++}(a, a) = g_l^{--}(a, a) \\ \left. \frac{dg_l^{++}(r, a)}{dr} \right|_{r=a} = \left. \frac{dg_l^{--}(r, a)}{dr} \right|_{r=a} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\pi(\mu_1 + k) J_l(ka) Y_l(ka) + 2\alpha(k, \mu_1, a) J_l(ka) J_l(ka) \\ = 2\beta(k, \mu_1, a) J_l(\mu_1 a) J_l(\mu_1 a) - \pi(\mu_1 + k) J_l(\mu_1 a) Y_l(\mu_1 a) \\ -\pi k(\mu_1 + k) Y_l'(ka) J_l(ka) + 2k\alpha(k, \mu_1, a) J_l'(ka) J_l(ka) \\ = 2\mu_1 \beta(k, \mu_1, a) J_l(\mu_1 a) J_l'(\mu_1 a) - \mu_1 \pi(\mu_1 + k) Y_l'(\mu_1 a) J_l(\mu_1 a) \end{array} \right. \quad (5.110)$$

d'après un certain calcul on trouve

$$\beta(k, \mu_1, a) = (\mu_1 + k) \frac{-2J_l(ka) + \pi a J_l(\mu_1 a) (kJ_l(ka) Y_l(\mu_1 a) - \mu_1 J_l(ka) Y_l'(\mu_1 a))}{2a J_l(\mu_1 a) (\mu_1 J_l(ka) J_l'(\mu_1 a) - k J_l'(ka) J_l(\mu_1 a))} \quad (5.111)$$

et

$$\alpha(k, \mu_1, a) = (\mu_1 + k) \frac{-2J_l(\mu_1 a) + \pi a J_l(ka) (\mu_1 J_l'(\mu_1 a) Y_l(ka) - k J_l(\mu_1 a) Y_l'(ka))}{2a J_l(ka) (kJ_l(ka) J_l(\mu_1 a) - \mu_1 J_l(ka) J_l'(\mu_1 a))} \quad (5.112)$$

donc

$$g^{++}(r, r') = -\pi \left[\begin{array}{c} Y_l(\mu_1 r) J_l(\mu_1 r') - \\ \frac{-2J_l(ka) + \pi a J_l(\mu_1 a) (kJ_l(ka) Y_l(\mu_1 a) - \mu_1 J_l(ka) Y_l'(\mu_1 a))}{2\pi a J_l(\mu_1 a) (\mu_1 J_l(ka) J_l'(\mu_1 a) - k J_l'(ka) J_l(\mu_1 a))} J_l(\mu_1 r) J_l(\mu_1 r') \end{array} \right] \quad (5.113)$$

et

$$g^{--}(r, r') = -\pi \left[\begin{array}{c} Y_l(kr) J_l(kr') - \\ \frac{-2J_l(\mu_1 a) + \pi a J_l(ka) (\mu_1 J_l(\mu_1 a) Y_l(ka) - k J_l(\mu_1 a) Y_l'(ka))}{2a J_l(ka) (kJ_l(ka) J_l(\mu_1 a) - \mu_1 J_l(ka) J_l'(\mu_1 a))} J_l(kr) J_l(kr') \end{array} \right] \quad (5.114)$$

aussi les cas mixtes :

le cas $r' < a < r$:

$$g_l^{+-}(r, r') = -\pi \left[\begin{array}{c} Y_l(kr) J_l(\mu_1 r') \\ - \left[\frac{Y_l(ka)}{J_l(ka)} - \frac{4}{\pi a [\mu_1 J_l(ka) J_l'(\mu_1 a) - k J_l'(ka) J_l(\mu_1 a)]} \right] J_l(kr) J_l(\mu_1 r') \end{array} \right] \quad (5.115)$$

le cas $r < a < r'$:

$$g_l^{-,+}(r, r') = -\pi \left[\begin{array}{c} J_l(kr') Y_l(\mu_1 r) \\ - \left[\frac{Y_l(\mu_1 a)}{J_l(\mu_1 a)} - \frac{4}{\pi a [kJ_l(ka) J_l(\mu_1 a) - \mu_1 J_l(ka) J_l'(\mu_1 a)]} \right] J_l(kr') J_l(\mu_1 r) \end{array} \right] \quad (5.116)$$

5.2.3 Problème d'un puits infini :

La méthode directe :

soit l'équation intégrale

$$G_l(r, r') = G_0(r, r') + \int_0^{+\infty} \zeta G_0(r, \zeta) V(\zeta) G_l(\zeta, r') d\zeta \quad (5.117)$$

$$G_l(r, r') = G_0(r, r') + V_0 \int_a^{+\infty} \zeta G_0(r, \zeta) \delta(\zeta - a) G_l(\zeta, r') d\zeta \quad (5.118)$$

$$G_l(r, r') = G_0(r, r') + aV_0 G_0(r, a) G_l(a, r') \quad (5.119)$$

pour $r = a$

$$G_l(a, r') = G_0(a, r') + aV_0 G_0(a, a) G_l(a, r') \quad (5.120)$$

$$G_l(a, r') = \frac{G_0(a, r')}{1 - aV_0 G_0(a, a)} \quad (5.121)$$

en substituant à (5.119) on obtient

$$G_l(r, r') = G_0(r, r') + \frac{aV_0 G_0(r, a) G_0(a, r')}{1 - aV_0 G_0(a, a)} \quad (5.122)$$

quand V_0 tend vers l'infini on a

$$G_l(r, r') = G_0(r, r') - \frac{G_0(r, a) G_0(a, r')}{G_0(a, a)} \quad (5.123)$$

le cas $r < r' < a$:

$$G_0(r, r') = J_l(kr) H_l^{(1)}(kr') \quad (5.124)$$

d'où

$$G_l(r, r') = J_l(kr) H_l^{(1)}(kr') - \frac{J_l(kr) J_l(kr') H_l^{(1)}(ka)}{J_l(ka)} \quad (5.125)$$

$$G_l(r, r') = J_l(kr) H_l^{(1)}(kr') - J_l(kr) J_l(kr') \left[1 + i \frac{Y_l(ka)}{J_l(ka)} \right] \quad (5.126)$$

$$G_l(r, r') = i J_l(kr) \left[Y_l(kr') - \frac{Y_l(ka)}{J_l(ka)} J_l(kr') \right] \quad (5.127)$$

le cas $r' < r < a$:

$$G_l(r, r') = J_l(kr') H_l^{(1)}(kr) - J_l(kr) J_l(kr') \left[1 + i \frac{Y_l(ka)}{J_l(ka)} \right] \quad (5.128)$$

donc

$$G_l(r, r') = i J_l(kr') \left[Y_l(kr) - \frac{Y_l(ka)}{J_l(ka)} J_l(kr) \right]$$

Méthode des perturbations :

$$G_{nl}(r, r') = \int_0^{+\infty} \zeta G_0(r, \zeta) V(\zeta) G_{(n-1)l}(\zeta, r') d\zeta \quad (5.129)$$

$$G_{nl}(r, r') = V_0 \int_0^{+\infty} \zeta G_0(r, \zeta) \delta(\zeta - a) G_{(n-1)l}(\zeta, r') d\zeta \quad (5.130)$$

pour $n = 1$ on a

$$G_{1l}(r, r') = V_0 \int_0^{+\infty} \zeta G_0(r, \zeta) \delta(\zeta - a) G_{0l}(\zeta, r') d\zeta \quad (5.131)$$

où

$$G_{0l}(r, r') = G_0(r, r') \quad (5.132)$$

d'où

$$G_{1l}(r, r') = a V_0 G_0(r, a) G_{0l}(a, r') \quad (5.133)$$

de même manière pour $n = 2$

$$G_{2l}(r, r') = aV_0 G_0(r, a) G_{1l}(a, r') \quad (5.134)$$

$$= (aV_0)^2 G_0(r, a) G_0(a, a) G_{0l}(a, r') \quad (5.135)$$

aussi pour $n = 3$

$$G_{3l}(r, r') = aV_0 G_0(r, a) G_{2l}(a, r') \quad (5.136)$$

$$= (aV_0)^3 G_0(r, a) G_0^2(a, a) G_{0l}(a, r') \quad (5.137)$$

et ainsi de suite le terme général

$$G_{nl}(r, r') = (aV_0)^n G_0(r, a) G_0^{n-1}(a, a) G_{0l}(a, r') \quad (5.138)$$

la somme de cette série est

$$G_l(r, r') = G_0(r, r') + \frac{aV_0 G_0(r, a) G_{0l}(a, r')}{1 - aV_0 G_0(a, a)} \quad (5.139)$$

quand V_0 tend vers l'infini on a

$$G_l(r, r') = G_0(r, r') - \frac{G_0(r, a) G_0(a, r')}{G_0(a, a)} \quad (5.140)$$

donc le même résultat par la méthode directe c-à-d résultat (5.123).

Chapitre 6

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans notre travail, nous avons abordé le calcul explicite de la fonction de Green pour certains problèmes concrets de la mécanique quantique : le problème du potentiel de Heaviside, le problème de Helmholtz sur un disque et le problème du potentiel sphérique. Les conditions aux limites utilisées sont celle qu'on rencontre en mécanique quantique dans les problèmes de diffusion et aussi pour les états liés. Dans la mécanique quantique, si le potentiel présente un saut dans l'espace, la solution de l'équation de Schrödinger dans notre cas et de sa dérivée sont continues sur la limite (le bord) du domaine.

Ainsi nous avons décomposé notre travail en deux parties. Une première partie consacrée aux équations différentielles dans laquelle nous avons présenté : la théorie générale des équations différentielles ordinaires, la construction des fonctions de Green pour ce type d'équations différentielles, puis quelques applications aux potentiel de Heaviside, le potentiel sur un disque et le potentiel sphérique. En seconde partie, nous avons présenté la technique des perturbations avec la théorie des équations intégrales associées. Nous avons utilisé cette technique pour calculer la fonction de Green pour la sphère dure et le puits infini à deux dimensions.

En explicitant : dans le premier chapitre nous avons présenté la théorie générale des

équations différentielles ordinaires d'ordre n , la construction de la fonction de Green pour ce type d'équations, la construction de la fonction de Green pour les équations différentielles du second ordre puis on s'intéresse à la fonction de Green pour les cas importants en physique relative aux opérateurs auto-adjoints.

Au second chapitre, intitulé "application au calcul de la fonction de Green", nous avons présenté le calcul de la fonction de Green relative au problème du potentiel de Heaviside, du potentiel barrière finie à deux dimensions, du potentiel puits fini et enfin une application du potentiel sphérique.

Au troisième chapitre, nous avons présenté la méthode de la théorie des perturbations adaptée à la mécanique quantique en interprétant les termes de la série de perturbation. Nous avons présenté également le rôle du propagateur de Feynmann et sa relation avec la fonction de Green ainsi qu'avec la fonction d'onde, solution de l'équation de Schrodinger. Et nous avons fini ce chapitre par l'élaboration de l'équation intégrale gouvernant la fonction de Green. Il s'avère que cette équation appartient au problème de Wiener-Hopf de deuxième espèce.

Au quatrième chapitre, nous avons développé la théorie des fonctions sectionnellement analytiques qui a été d'abord appliquée aux problèmes de Hilbert avec succès puis nous l'avons appliquée pour la résolution de notre problème de Wiener-Hopf.

Au cinquième chapitre, nous avons construit la série de perturbations et calculé ses termes moyennant la théorie développée au chapitre 3. Nous avons trouvé que les termes successifs de la série sont reliés par une formule intégrale que nous avons pu résoudre et sommer la série pour ainsi construire la solution de Green pour trois types de potentiels à deux dimensions : le problème d'une barrière finie, le problème d'un puits fini et le problème d'un puits infini. Nous comptons soumettre ces résultats à un journal sur les équations intégrales. Comme perspective, nous allons aussi prolonger cette méthode à l'étude des autres problèmes pour des potentiels multi-sauts, autre forme, etc...

Bibliographie

- [1] M. Acila, B. Benali, and M.T. Meftah, (2006) Journal of Physics A : Mathematical and General, 39, 1357-1366.
- [2] S. K. Adhikari, Am. J. Phys. 54, 362-367 (1986).
- [3] S. K. Adhikari, and R.D.Amado, Phys. Rev. Lett. 27, 485 (1971).
- [4] M. A. M. Aguiar Phys. Rev. A. 48 (1993) 2567-2573
- [5] Pérez-Arancibia C., Durán M., On the Green's function for the Helmholtz operator in an impedance circular cylindrical waveguide, Journal of Computational and Applied Mathematics 2010, 235, 244-262.
- [6] A. Bagchi, Phys.Rev. A 3, 1133 (1971).
- [7] T. Barakat, K. Abodayeh, and O.M. Al-dossary, (2006) Czechoslovak Journal of Physics, 56, 583-590.
- [8] J. Bass, Cours De Mathématiques, Tome II, Equations Différentielles Et Aux Dérivées Partielles Optimisation. Groupes De Transformations Méthodes Numériques, 5 édition, MASON, Paris New York Barcelone Milan 1978.
- [9] B. Benali, B. Boudjedaa, M. T. Meftah, Acta Physica Polonica A Vol.124.No.1, 636-640(2013).
- [10] B. Benali, and M. T. Meftah, Report on Mathematical Physics Vol.74, 870-885(2014).
- [11] K.V. Bhagwat and S.V. Lawande ; Phys.Letters.A Vol 135 Issues 8-9 (1989) pp 417-420

- [12] K.V. Bhagwat and S.V. Lawande ; Phys.Letters.A Vol 141 Issue 7 (1989) , pp 321-325
- [13] D. Bollé and F. Gesztesy Phys. Rev. Lett. 52, 1469 (1984)
- [14] R. H. Bolt, A. M. Clogston, and H. Shbach ; J.A. Coust. Soc. Am. 13, 82 (1991).
- [15] B. Boudjedaa, M.T. Meftah and L. Chetouani, (2007) Turkish Journal of Physics, 31, 197-203.
- [16] L. W. Bruch, Physica A 93, 95 (1978).
- [17] Chen J.T., Chen I.L., Lee Y.T., Eigensolutions of multiply connected membranes using the method of fundamental solutions, Boundary Analysis with Boundary Elements 2005, 29, 166-174.
- [18] R. E. Crandall, J. Phys .A : Math. Gen. (1993) 3627-3648
- [19] R. Dashen, S. K. Ma, and H. J. Brenstien, Phys. Rev.187, 345 (1969).
- [20] V. Ditkines, A.Proudnikov : Calcul Operationnel, Edition Mir Moscou (1975), (chapI, section11)
- [21] J. Dupraz : La théorie des distributions et ses applications, Ensta.Cepadues édition
- [22] I. H. Duru, (1983) Physical Review D, 28, 2689-2692
- [23] R. P. Feynman and A.R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals (McGraw Hill, N.Y. 1965)
- [24] W. Fischer, , H. Leschke and P. Muller, (1992) Journal of Physics A : Mathematical and General, 25, 3835-3853.
- [25] P. Földi, M.G. Benedict and A. Czéryak, (2004) Acta Physica Hungarica Series B, Quantum Electronics, 20, 25-28
- [26] H. Froelich, Phys. Rev.54, 945 (1938).
- [27] W. G. Gibson, Phys. Rev. A6, 2469 (1972).0780222481
- [28] W. G. Gibson, Mol. Phys. 49, 103 (1983).
- [29] M. J. Goovaerts, A. Babenco and J. T. Devreese, (1973) Journal of Mathematical Physics, 14, 554.

- [30] C. Grosche ; J. Phys. A : Math. Gen. 23 No 22 (21 November 1990) 5205-5234 ; and Phys. A Math. Gen. 28 (1995), L99-L105.
- [31] C. Grosche ; Phys. Rev. Lett. 71, Number 1, pp 1-4
- [32] E. Hairer, Analyse II Partie B, Calcule Différentiel Equations Différentielles, Université de Genève, section de mathématiques, Case postale 240, CH-121 i ich zastosowania, Seria Monografie Nr 170, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 2009.
- [33] T. Kato :Perturbation Theory For Linear Operators, (Springer-Verlag Berlin Heidelberg ,N.Y. 1980)
- [34] D. C. Khandekar and S.V. Lawande, (1986) Physics Reports (Review Section of Physics Letters), 137, 115-229.
- [35] M. Krasnov, A. Kisselev, G. Makarenko, Equations intégrales ; Edition Mir (1976)
- [36] S. Kukla, U. Siedlecka, I. Zamorska, Sci. Res. Inst. Math. Computer Sci.11 (1), 53-62 (2012).
- [37] S. Kukla, Sci. Res. Inst. Math. Computer Sci. 2 (10), 129-134 (2011).
- [38] S. Kukla, Sci. Res. Inst. Math. Computer Sci. 9 (1), 77 (2010).
- [39] S. Kukla, Sci. Res. Inst. Math. Computer Sci. 11 (1), 85 (2009).
- [40] L. J. Lantto and R.M. Nieminen, J.Law. Temp. Phys. 37, 1 (1979).
- [41] S. V. Lawande and K.V. Bhagwat ; Phys.Letters A Vol.131 Issue 1 (1988) ,pp 8-10
- [42] R. Layeghnejad, M. Zare and R. Moazzemi, Phys. Rev.D 84, 125026 (2011).
- [43] T. K. Lim, S. Nacaichi, Y.Akaish, and H. Tanaka, Phy. Rev. A22, 28 (1980)
- [44] D. H. Lin, (1997) Journal of Physics A : Mathematical and General, 30, 4365.
- [45] D. H. Lin, (1998) Journal of Physics A : Mathematical and General, 31, 7577.
- [46] R. Dautray ; J. Louis Lions, Michel Artola, Philippe Benilan, Michel Bernadou, Michel Cessinat, Jean-Claude Nedecel, J.Planchard : Analyse mathématique et calcul numérique (pour les sciences et les techniques), Masson 1984 et 1985 (Vol. 6 chapI, Sec.1-3)

- [47] P. A. Maurone and T. K. Lim, *Am. J. Phys.* 51, 856 (1983).
- [48] Y. A. Melnikov, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 25, 669-676 (2001).
- [49] YuA Melnikov. *Influence functions and matrices*. New York/Basel : Marcel Dekkar, 1998.
- [50] YuA Melnikov . (in Russian). *Green's functions and matrices for equations and systems for elliptic type*. Dnepropetrovsk : Dnepropetrovsk State University Publishers, 1991.
- [51] I. M. Nemenman, A. S. Silbergleit, *J. Appl. Phys.* Vol. 86 No.1. 614-624 (1999).
- [52] H. Reinhard, *Equations Aux Dérivées Partielles Introduction*, Belgique 1987 (2004), p264-269
- [53] I. Richard Lapidus, *Am. j. Phys.* 50, 45 (1982).
- [54] Reutskiy S.Yu, *The method of fundamental solutions for Helmholtz eigenvalue problems in simply and multiply connected domains*, *Boundary Analysis with Boundary Elements* 2006, 30, 150-159
- [55] L. S. Schulman, *Techniques and Applications of The path Integration* (Wiley NY 1981)
- [56] R. L. Siddon and M. Schick, *Phy. Rev.* A9, 907 (1974).
- [57] V. Smirnov : *Cours de Mathématique Supérieures* ; Edition Mir Moscou (1975) , (Vol.IV Part.1 ChapI : Sec.58-67).
- [58] A. Soyly, O. Bayrak and I. Boztosun, (2012) *Central European Journal of Physics*, 10, 953-959.
- [59] Y. Tago, K. Nearasimha, *Phys. Lett.* Vol. 45A, No.1, 37-38, (1973). chapIII-section6).
- [60] B. J. Verhaar, J. P. H. W. van den Eijnde, M. A. J. Voermans and M. M. J. Schaf-frath, *J. Phys. A : Math. Gen.* 17, 595 (1984).
- [61] V. Vladimirov, V.Mikhailov, M. Chabounine, KH. Karimova, Y. Sidorov, A. Vacharine : *Recueil de problèmes d'équations de Phys. Math.* Edition Mir Moscou (1977), (chapII-section5, chapIII-section6)

- [62] Willian E. Boyse, Richard C.Diprima, Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems, 7th. ed, New York, April 2000.
- [63] O. A. Yakubovskii, *Yad. Fiz.* 5, 1312 (1967).
- [64] J. Yoshio Nosaka, *Phys. Chem.* 95, 5054-5058 (1991).
- [65] K. Yosida, *Functional Analysis*, Berlin, Springer-Verlag (1980).