Université Mohamed Khider de Biskra
Faculté des sciences exactes
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité : Probabilités et statistique - Réf : P197/2026

TITRE

sur l’estimation par la méthode du moment

Présenté et soutenu par

Naima HERIZ

Date de soutenance : 07/06/2026

JURY DE SOUTENANCE

Nom et Prénom	Grade	Qualité
Brahim BRAHIMI	Prof	**Président**
Jihane ABDELLI	MCA	**Encadrant**
Hassiba BERKANE	MAA	**Examinateur**

Année universitaire : 2025/2026

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

À mes parents qui m'ont bien élevé ont semé l'espoir en moi et a appris à être.

*Mon papa "**Heriz Lakheder**" et mon maman " **Tria Fatima**".*

*À ma sœur "**Bariza**".*

*À mes frères "**Ammar**" et "**Hakim**".*

*À mes amies les plus chères "**Ghamri Nour El Houda**" et"**Charif Nada**"et"**khlifi Omaima**"et"**Dbabeche Nada**".*

*À ma proche qui m'a encouragée avec un cœur sincère "**Hadil**".*

*À ma chère grand mère"**Braika**".Que Dieu ait pitié de son âme.Merci pour ton amour et ton soutien inconditionnels.Tu resteras à jamais présente dans mon coeur.*

À ma promotion **2025/2026.**

Et à mes respectables Professeurs qui m' ont apporté tout le soutien et l'orientation nécessaire.

Remerciements

Avant tout, je remercie Allah, Le Tout-Puissant, de m'avoir donné la force,la patience le courage et le moral, la santé tout au long de mes années d'études, qui m'ont permis d'achever mon parcours et de réaliser ce modeste travail.

j'adresse mes sincères remerciements à mon ***Encadrante Abdelli Jihane****,pour son aide précieuse, ses conseils,sa disponibilité et son accompagnement tout au long de la réalisation de ce mémoire.*

Je remercie également les membres du jury d'avoir accepté d'examiner ce travail et de l'évaluer.

Je remerciements s'adressent aussi à tous mes enseignants qui ont contribué à ma formation durant mon parcours universitaire,ainsi que le personnel du département de mathématiques .

Enfin,j'exprime m'ont soutenue de ma profonde gratitude à mes parents,à ma famille ainsi qu'à toutes les personnes qui m'ont soutenue ,notamment mes amis et mes camarades, pour leur soutien tout au long de ce parcours .

Merci à tous.

Heriz Naima

Notations et symbols

$i.i.d$	:	*indépendant et identiquement distribué.*
$v.a$	:	*variable aléatoire.*
$f(x)$	:	*la fonction de densité.*
$E(X)$	:	*espérance mathématique de* X.
$V(X)$	:	*variance de* X.
$Cov(X,Y)$	:	*covariance de* X *et* Y.
$B(n,\theta)$	:	*biais de l'estimateur* θ.
EQM	:	*erreur quadratique moyenne.*
EMM	:	*estimateur par la méthode des moments.*
EMV	:	*estimateur du maximum de vraisemblance.*
MMG	:	*méthode des moments généralisée.*
$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	:	*loi normale de moyenne* μ *et variance* σ^2.
$\mathcal{B}(n,p)$	:	*loi binomiale de paramètres* n *et* p.
$\mathcal{P}(\lambda)$	:	*loi de Poisson de paramètre* λ.
$\mathcal{E}(\lambda)$	:	*loi exponentielle de paramètre* λ.
$\mathcal{G}(\alpha,\beta)$	:	*loi Gumbel de paramètres* α *et* β.
$\Gamma(\alpha,\beta)$	:	*loi Gamma de paramètres* α *et* β.
$Q(\mu)$	:	*fonction objectif (des moindres carrées).*
$Q(\theta)$	:	*fonction objectif (des moments généralisés).*
γ	:	*constante d'Euler* $(\approx 0,57721)$.

Table des matières

Dédicace i

Remerciements ii

Abréviations et notations ii

Notations et symbols iii

Table des matières iii

Liste des figures vi

Liste des tableaux vii

Introduction 1

1 Quelques méthodes d'éstimation paramétrique 3

1.1 **Notions fondamentales** . . . 3

1.1.1 **Echantillon :** . . . 3

1.1.2 **Paramètre** . . . 4

1.1.3 **Statistique** . . . 4

1.1.4 **Moyenne empirique et la variance empirique** . . . 4

1.2 **Quelques lois classiques paramétriques** . . . 5

1.2.1 **Lois continues :** . . . 5

1.2.2 **Lois discrètes** . . . 7

1.3 **Estimateur** 8
1.3.1 **Principe d'estimation** 8
1.3.2 **Propriétés générales d'un éstimateur** 8
1.4 **Méthodes d'estimation paramètrique** 11
1.4.1 **Méthode du maximum de vraisemblance** 11
1.4.2 **Méthode des moments** 12
1.4.3 **Méthode des Moindres Carrées** 15
1.5 **Estimation par l'intervalle de confiance** 17
1.5.1 **Estimation d'une moyenne** 18
1.5.2 **Estimation d'une variance** 18
1.5.3 **Intervalle de confiance d'une proportion** 19

2 La méthode des moments **21**

2.1 **Principe de la méthode des moments** 21
2.1.1 **Moments théoriques** 21
2.1.2 **Moments empiriques** 22
2.1.3 **Principe de la méthode des moments** 22
2.1.4 **Consistance de l'estimateur** 22
2.2 **Algorithme de la méthode des moments** 23
2.3 **Cas particuliers** 23
2.3.1 **Cas unidimensionnel** 24
2.3.2 **Cas bidimensionnel** 25
2.4 **Propriétés de l'estimateur des moments :** 26
2.5 **Tableau récapitulatif des estimateurs par la méthode des moments :** 28
2.6 **Limites de la méthode des moments :** 28
2.7 **Extensions** 29
2.7.1 **Les L-moments** 29
2.7.2 Méthode des moments généralisée(MMG) 29

2.8 **Comparaison avec la Méthode du Maximum de Vraisemblance** 31

2.8.1 Avantages de la méthode des moments 31

2.8.2 Inconvénients 31

3 Applications numériques **32**

3.1 Application de la méthode des moments 32

3.1.1 Convergence de l'estimateur (Loi exponentielle) 32

3.1.2 Estimation des paramètres(Loi Pareto) 34

3.1.3 Estimation des paramètres (Loi Beta) : 36

3.1.4 Comparaison avec la méthode du maximum de vraisemblance (Loi Gamma) : . 39

Conclusion **41**

Bibliographie **43**

Table des figures

3.1 Convergence de l'estmateur λ par EMM 34

3.2 Estimation de la loi de Pareto par EMM 36

3.3 Estimation de la loi Beta par EMM 38

3.4 Comparaison entre l'EMM et l'EMV 41

Liste des tableaux

1.1 Tableau de calcul de la covariance 16

2.1 Synthèse des estimateurs par la méthode des moments 28

Introduction

L'estimation statistique occupe une place essentielle dans l'analyse des données et la modélisation probabiliste. Elle permet de déterminer les paramètres inconnus d'une loi de probabilité à partir d'un échantillon observé, afin de décrire au mieux les phénomènes réels et d'en tirer des conclusions fiables. Le choix d'une méthode d'estimation adaptée constitue donc une étape fondamentale dans la construction des modèles statistiques, puisqu'il influence directement la précision des résultats obtenus ainsi que la qualité des prévisions et des interprétations. Les méthodes d'estimation paramétriques reposent sur l'hypothèse que les données suivent une loi de probabilité connue dépendant d'un nombre fini de paramètres inconnus. Ces méthodes sont largement utilisées en statistique grâce à leur efficacité théorique et pratique, notament lorsque les hypothèses sur le modèle sont raisonnablement vérifiées. Elles permettent d'obtenir des estimateurs précis et de développer plusieurs outils d'analyse et de décision statistique. Parmi les méthodes paramétriques les plus connues figurent la méthode du maximum de vraisemblance ,la méthode des moindres carrés et la méthode des moments. Chacune de ces méthodes possède ses propres caractéristiques, avantages et limites selon la nature des données étudiées et les objectifs recherchés. La méthode des moments en particulier, représente l'une des théchniques classiques d'estimation des paramètres. Elle repose sur l'égalité entre les moments théoriques de la loi étudiée et les moments empirique calculés à partir des données observées. Cette méthode est appréciée pour sa simplicité de mise en oeuvre et son importance historique dans le développement de la statistique mathématique.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons principalement à l'estimation par la méthode des moments, ainsi qu'à l'étude de ses propriétés et de ses applications numériques. Nous cherchons également à comparer ses performances avec celles d'autres méthodes d'estimation, notamment la méthode du maximum de vraisemblance, afin d'évaluer son efficacité dans différents contextes statistiques.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, *nous présentons quelques méthodes d'estimation paramétriques. Nous introduisons d'abord les lois paramétriques ainsi que les notions fondamentales d'estimation et d'estimateur. Ensuite, nous étudions plusieurs méthodes d'estimation, à savoir la méthode du maximum de vraisemblance, la méthode des moindres carrés et la méthode des moments. Nous terminons ce chapitre par l'estimation par l'intervalle de confiance et son importance dans l'évaluation de la précision des estimateurs.*

Dans le deuxième chapitre, *nous dévloppons de manière détaillée la méthode des moments. Nous présentons les notions de moments théoriques et de moments empiriques, puis nous expliquons le principe général de cette méthode ainsi que ses différentes étapes d'application. Nous abordons également certains limites de cette méthode et proposons un tableau récapitulatif mettant en évidence ses principales caractéristiques. Enfin, nous étudions quelques extensions importantes, notamment les L-moments et la méthode des moments généralisés.*

Dans le troisième chapitre, *nous consacrons l'étude à l'aspect appliqué et numérique. À travers plusieurs exemples et simulations réalisées à l'aide du logiciel R, nous appliquons la méthode des moments à différentes lois de probabilité.Nous effectuons également une comparaison entre cette méthode et la méthode du maximum de vraisemblance en utilisant différents critères statistique, afin d'évaluer la qualité des estimateurs obtenus et d'analyser leur comportement sur des données simulées.*

Chapitre 1

Quelques méthodes d'éstimation paramétrique

Le contenu de ce chapitre est principalement basé sur quelques méthodes d'éstimation paramétrique utilisées en statistique inférentielle. Lorsque la loi d'une variable aléatoire dépend d'un paramètre inconnu θ, l'objectif de l'estimation est d'estimer ce paramètre à partir d'un échantillon observé.

1.1 Notions fondamentales

1.1.1 Echantillon :

Définition 1.1.1 *On appelle un échantillon de taille n indépendant et identiquement distribué $(i.i.d)$ de loi F un ensemble de n variables aléatoires (v, a) indépendantes qui suivent la loi F. Un échantillon est considéré comme un sous-ensemble de la population.*

1.1.2 Paramètre

Définition 1.1.2 *Un paramètre est une caractéristique d'une population. Il s'agit d'une valeur inconnue au sein de la population qui doit être quantifiée à partir d'un échantillon, comme :*

- *la moyenne* (μ) .
- *le pourcentage* (p) .
- *l'écart -type*(σ) .
- *la variance* (σ^2). *etc*

1.1.3 Statistique

Définition 1.1.3 *On définit une statistique* S_n *toute fonction mesurable des variables aléatoires* $.X_i$, $i = 1, ..., n$ *qui donne une information sur un paramètre de la population :*

$$S_n = f\left(X_1, X_{2,...,}X_n\right).$$

On utilise des statistiques pour estimer les caractéristiques inconnues d'une population .Les statistiques les plus utilisées sont :

- *La moyenne empirique.*
- *La variance empirique.*
- *La fréquence empirique.*

1.1.4 Moyenne empirique et la variance empirique

la moyenne empirique

Définition 1.1.4 *On appelle moyenne empirique de l'échantillon* $(X_1, X_{2,...,}X_n)$ *issu de la variable aléatoire* X, *la statistique définie par :*

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

La réalisation de cette statistique est : $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ *(la moyenne observée).*

Propriétés de la moyenne empirique

1. $\mathbb{E}\left(\overline{X}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(X_i\right) = \frac{1}{n}n\mu = \mu$ *(estimateur sans biais).*
2. $\mathbb{V}\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$.
3. $\overline{X} \longrightarrow_{ps} \mu$ *(Loi forte des grands nombres).*

La variance empirique

Définition 1.1.5 *On appelle variance empirique de l'échantillon* $(X_1, X_{2,\ldots,}X_n)$ *la statistique définie par :*

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2.$$

Propriétés de la variance empirique :

1. $\mathbb{E}\left(S^2\right) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$.
2. $S^2 \rightarrow^{ps} \sigma^2$.
3. $\mathbb{V}\left(S^2\right) = \frac{n-1}{n^3}\left[\left(n-1\right)\mu_4 - \left(n-3\right)\sigma^4\right]$, *où* $\mu_4 = \mathbb{E}\left(X\text{-}\mu\right)^4$.

1.2 Quelques lois classiques paramétriques

1.2.1 Lois continues :

Loi normale (loi de Gauss) :

Définition 1.2.1 *On dit que* X *une variable aléatoire qui suit une loi normale d'esperance* μ *et d'écart-type* σ *(avec* $\sigma > 0$*), si la v.a réelle* X *admet pour densité de probabilité :*

$$f\left(x\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

On note $X \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu, \sigma\right)$*, et on a :*

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \mu \text{ et } \mathbb{V}\left(X\right) = \sigma^2.$$

Lorsque la moyenne μ vaut 0 et l'écart-type vaut 1, la loi prend la notation $\mathcal{N}(0\ ,1)$ et sera appelée la loi normale standard .Sa fonction de densité vaut :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

La loi exponentielle

Définition 1.2.2 *On dit que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, si sa densité est :*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{pour } x \geq 0, \\ 0 & \text{pour } x < 0. \end{cases}$$

On note $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et on a :

$$\mathbb{E}(X) = 1/\lambda \text{ et } \mathbb{V}(X) = 1/\lambda^2.$$

Loi uniforme

Définition 1.2.3 *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On dit que X suit une loi uniforme sur $[a, b]$ si sa densité est :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note $X \sim \mathcal{U}([a, b])$ et on a

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

1.2.2 Lois discrètes

Loi de Bernoulli

Définition 1.2.4 *On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, $(avec\ 0 < p < 1)$, si :*

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p = q \\ \mathbb{P}(X = 1) = p. \end{cases} \quad avec\ p + q = 1.$$

On note $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$ et on a :

$$\mathbb{E}(X) = p\ et\ \mathbb{V}(X) = pq.$$

Loi binomiale

Définition 1.2.5 *La variable X qui représente le nombre de succès obtenus lors de n répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p suit une loi binomiale :*

$$\mathbb{P}(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On note $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$, et on a :

$$\mathbb{E}(X) = np\ et\ \mathbb{V}(X) = npq.$$

La loi de poisson

Définition 1.2.6 *On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, si pour tout $k \in \mathbb{N}$:*

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

On note $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \lambda\ et\ \mathbb{V}(X) = \lambda.$$

1.3 Estimateur

On considère une variable aléatoire X dont la loi dépend d'un paramètre inconnu θ, notée P_θ, avec $\theta \in \Theta \subset R$.

Définition 1.3.1 *Un estimateur de θ est une variable aléatoire construite à partir d'un échantillon $X_1, X_2, ..., X_n$ de X .On le note $\widehat{\theta}$, et il s'exprime sous la forme :*

$$T_n = f\left(X_1, X_2, ..., X_n\right),$$

où f est une fonction des observations.

Définition 1.3.2 *Une estimation correspond à la valeur numérique obtenue lorsque l'on remplace les variables aléatoires par leurs observations effectives :*

$$t_n = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right).$$

1.3.1 Principe d'estimation

♦ *L'estimation statistique consiste à approcher un paramètre inconnu $\theta \in \Theta$ d'une loi de probabilité associée à une variablee aléatoire X, à partir d'un échantillon observé $X_1, X_2, ..., X_n$. Les variables X_i sont supposées indépendantes et suivent la même loi que X.*

♦ *L'objectif est construire un estimateur de θ à l'aide des données observées. La qualité de cet estimateur peut être évaluée par des critères tels que le biais et le risque quadratique moyen.*

♦ *L'estimation peut être ponctuelle ou réalisée par intervalle de confiance afin de mesurer la précision des résultats obtenus.*

1.3.2 Propriétés générales d'un éstimateur

On dit que T_n est un estimateur du paramètre θ, tout estimateur on peut l'écrire sous la forme :

$$\mathbb{E}\left(T_n\right) = \theta + B\left(n, \theta\right).$$

Où $B(n,\theta)$ est le biais de T_n.

Biais

Le biais d'un estimateur T_n du paramètre θ est :

$$B(n,\theta) = \mathbb{E}(T_n) - \theta.$$

Estimateur biaisé

Définition 1.3.3 *On dit que T_n est un estimateur biaisé de θ si :*

$$\mathbb{E}(T_n) \neq \theta \ (c\text{-}à\text{-}d) \ B(n,\theta) = \mathbb{E}(T_n - \theta) = \mathbb{E}(T_n) - \theta \neq 0.$$

Exemple 1.3.1 *Soit $(X_1, X_{2,\ldots,}X_n)$ de n échantillon i.i.d de moyenne m et de variance σ^2, S^2 est un estimateur baisé de σ^2.*

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 - \left(\overline{X} - m\right)^2.$$

$$\mathbb{E}\left(S^2\right) = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right) \neq \sigma^2.$$

Estimateur sans biais :

Définition 1.3.4 *On dit que T_n est un estimateur sans biais de θ si :*

$$\mathbb{E}(T_n) = \theta \ \ c\text{'est-à-dire} \ \ (c\text{-}à\text{-}d) \ \ B(n,\theta) = 0.$$

Exemple 1.3.2 *soit $(X_1, X_{2,\ldots,}X_n)$ de n échantillon telles que $\mathbb{E}(X_i) = m$, $\forall i = 1, \ldots n$, $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ est un estimateur sans biais de m, en effet :*

$$\mathbb{E}(\overline{X}) = \mathbb{E}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n}n\mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{n}nm = m.$$

Erreur quadratique moyenne

Définition 1.3.5 *On définit l'erreur quadratique moyenne (EQM) d'un estimateur T_n du paramètre θ ;*

$$EMQ\left(T_n\right) = \mathbb{E}\left[\left(T_n - \theta\right)^2\right].$$

Théorème 1.3.1 *T_n est un estimateur du paramètre θ alors :*

$$EMQ\left(T_n\right) = \mathbb{V}\left(T_n\right) + \left[Biais\left(T_n\right)\right]^2.$$

On a T_1et T_2 deux estimateurs de même paramètre θ ,on peut dire que T_1 le meilleur que T_2, c'est-à-dire le plus efficace, est celui qui a la plus petite EMQ. T_1est plus efficace que T_2 si :

$$EMQ\left(T_1\right) < EMQ\left(T_2\right) \Longleftrightarrow \frac{EMQ\left(T_1\right)}{EMQ\left(T_2\right)} < 1.$$

Si T_1et T_2sont non biaisés cela signifie que le plus efficace est celui dont la variance est la plus petite alors :

$$\mathbb{V}\left(T_1\right) < \mathbb{V}\left(T_2\right) \Rightarrow T_1 \text{ est la plus efficace que } T_2.$$

la convergence

Définition 1.3.6 *On dit que l'estimateur T_n est convergent si pour tout $\varepsilon > 0$:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|T_n - \theta| < \varepsilon) = 1.$$

1.4 Méthodes d'estimation paramètrique

1.4.1 Méthode du maximum de vraisemblance

Définition 1.4.1 *La fonction de vraisemblance de paramètre θ pour une réalisation $x = (x_{1,...,}x_n)$ est :*

$$L\left(x_{1,...,}x_n;\theta\right) = \begin{cases} \Pi_{i=1}^{n} P\left(x_i,\theta\right) \text{ si les } X_i \text{ sont discrètes,} \\ \Pi_{i=1}^{n} f\left(x_i,\theta\right) \text{ si les } X_i \text{ sont continues.} \end{cases}$$

Définition 1.4.2 *L'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) de θ est:*

$$\widehat{\theta} = \arg\max_{\theta\subset\Theta} \; L\left(x,\theta\right).$$

Cette méthode consiste à résoudre :

$$\begin{cases} \frac{\partial L(x,\theta)}{\partial\theta} = 0\,; \quad \text{pour trouver } \widehat{\theta}, \\ \frac{\partial^2 L(x,\theta)}{\partial\theta^2}\,|_{\theta=\widehat{\theta}} < 0\,; \quad \text{pour assurer l'existence du max } {}_{\theta\in\Theta} L\left(x,\theta\right). \end{cases}$$

Exemple 1.4.1 (Loi exponentielle) *Soit $(X_1, X_{2,...,}X_n)$ un échantillon i.i.d suivant la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$:*

$$f\left(x;\lambda\right) = \lambda e^{-\lambda x}, \; x > 0,$$

$$L\left(x_{1,...,}x_n;\lambda\right) = \prod_{i=1}^{n} f\left(x;\lambda\right) = \lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i},$$

donc

$$\ln L\left(x_{1,...,}x_n;\lambda\right) = n\ln\lambda - \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

alors

$$\frac{\partial \ln L\left(x_{1,...,}x_n;\lambda\right)}{\partial\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow \widehat{\lambda} = \frac{1}{\overline{x}},$$

et

$$\frac{\partial^2 \ln L\left(x_{1,...,}x_n;\lambda\right)}{\partial^2\lambda} = -\frac{n}{\lambda^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L\left(x_{1,\ldots,}x_n;\lambda\right)}{\partial^2\lambda}\mid_{\lambda=\widehat{\lambda}}=-n\overline{x}^2<0,$$

donc l'EMV de λest :

$$\widehat{\lambda}=\frac{1}{\overline{X}}.$$

Exemple 1.4.2 (Loi Poisson) *Soit $(X_1, X_{2,\ldots,}X_n)$ un échantillon i.i.d suivant une loi de Poisson de paramètre λ, avec $\lambda>0$:*

$$f(x;\lambda)=P_\lambda(X=x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}.$$

La fonction de vraisemblance s'écrit :

$$L(x_1,...,x_n;\lambda)=\prod_{i=1}^{n}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}=e^{-\lambda n}\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}.$$

$$\ln L(x_1,...,x_n;\lambda)=\ln e^{-\lambda n}+\ln\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}=-\lambda n+\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}=-\lambda n+\ln\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}\ln\left(x_i!\right).$$

alors

$$\frac{\partial \ln L\left(x_{1,\ldots,}x_n;\lambda\right)}{\partial\lambda}=-n+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}\Rightarrow\widehat{\lambda}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}.$$

et

$$\frac{\partial^2 \ln L\left(x_{1,\ldots,}x_n;\lambda\right)}{\partial^2\lambda}=-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\lambda},$$

Donc

$$\widehat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}.$$

1.4.2 Méthode des moments

La méthode des moments est une téchnique classique et ancianne d'estimation des paramètres d'une loi de probabilité, elle repose sur la comparaison entre les moments théoriques et les moments empiriques.

Les moments théoriques

Définition 1.4.3 *Soit X une variable aléatoire de densité $f(x,\theta)$, $\theta = (\theta_1,\theta_2,...,\theta_k)$. Le moment théorique d'ordre d est donné par :*

$$\mu_d = E\left(X^d\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^d f(x,\theta)\, dx.$$

Les moments empiriques

Définition 1.4.4 *Soit $(X_1, X_{2,...,}X_n)$ un échantion aléatoire de taille n issu de la variable X. Le moments empirique d'ordre d est définit par :*

$$m_d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^d.$$

La méthode des moments consiste à résoudre le système $m_d = \mu_d$ pour $d = 1,...,k$. Cette estimation est justifiée par la loi des grands nombres :

$$\begin{cases} m_1 = \mu_1 \\ m_2 = \mu_2 \\ \quad . \qquad k \text{ équation à } k \text{ inconnus ;} \\ \quad . \\ m_d = \mu_d. \end{cases}$$

Exemple 1.4.3 (Loi Normale) *Soit $(X_1, X_{2,...,}X_n)$ un n-échantillon iprovenant de $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, avec μ, σ^2 sont inconnus. On estime les paramètres μ et σ^2 par la méthode des moments tel que :*

$$\begin{cases} \mu_1 = m_1, \\ \mu_2 = m_2, \end{cases}$$

on a les moments théoriques sont :

$$\mu_1 = \mu \ et \ \mu_2 = \sigma^2 + \mu^2,$$

et les moments empiriques sont donnée par :

$$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \ et \ m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2,$$

alors l'estimation de μ et σ^2consiste à identifier les moments théoriques aux moments empiriques par le système suivant :

$$\begin{cases} \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \\ \sigma^2 + \mu^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2, \end{cases}$$

la résolution de ce système est donnée par :

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}, et \ \widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \widehat{\mu}\right)^2.$$

Exemple 1.4.4 (Loi de Gamma) *Soit $(X_1, X_{2,\ldots,}X_n)$ un n-échantillon provenant de $X \rightsquigarrow \Gamma(\alpha, \beta)$, avec α, β sont strictement positifs $(\alpha > 0, \ \beta > 0)$. On estime les paramètres α et β par la méthode des moments.On a :*

$$\begin{cases} E(X) = \frac{\alpha}{\beta}, \\ Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}, \end{cases}$$

alors les paramètres α et β en fonction de l'esperance et la variance sont :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{[E(X)]^2}{Var(X)}, \\ \beta = \frac{E(X)}{Var(X)}, \end{cases}$$

la moyenne empirique et la variance empirique :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \ , S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2.$$

Ces deux valeurs sont des estimateurs convergents de l'esperance et de la variance respectivement. On

déduit les estimateurs convergents de α *et* β *par la méthode des moments :*

$$\begin{cases} \widehat{\alpha} = \frac{\overline{X}^2}{S^2}, \\ \widehat{\beta} = \frac{\overline{X}}{S^2}. \end{cases}$$

1.4.3 Méthode des Moindres Carrées

Dans le cas de la mesure de la quantité inconnue μ*, un modèle très général est :*

$$X_i = \mu + \varepsilon_i, \ i = 1, ..., n.$$

L'estimateur des moindres carrés de μ *minimise :*

$$Q(\mu) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = (x_1 - \mu)^2 + ... + (x_n - \mu)^2,$$

elle représente la somme des erreurs quadratiques, et l'on cherche la valeur de $\widehat{\mu}$ *telle que* $Q(\mu)$ *soit minimisée. Cette valeur satisfait la relation :*

$$\frac{dQ(\mu)}{\mu} = -2(x_1 - \mu) - ... - 2(x_n - \mu),$$

par conséquant :

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Régression linéaire simple

Pour le modèle :

$$Y_i = a + bx_i + \varepsilon_i,$$

tel que :

1. *a représente la droite de régression avec l'ordonnée à l'origine ou* (constante).
2. *.b représente la pente de la droite de régression.*
3. ε *est le terme d'erreur, qui est une variable aléatoire.*

Les estimateurs des moindres carrés sont :

$$\widehat{b} = \frac{Cov\,(x,y)}{Var\,(x)} \ et \ \ \widehat{a} = \overline{Y} - \widehat{b\overline{X}}.$$

Exemple 1.4.5 *On cosidère les notes obtenues dans deux matières : les mathémathiques et le français (note sur* 20*) de* 8 *étudiants .On pose* X *la note en mathématiques et* Y *la note en français. Notre objectif est de déterminer une relation linéaire entre* X *et* Y *en estimant les paramètres* a *et* b *du modèle suivant :*

$$Y_i = a + bx_i.$$

En utilisant de la méthode des moindres carrés, puis d'en déduire l'équation de la droite de régression. Les données observées sont représentées dans le tableau suivant :

Les notes en math (x_i)	10	15	8	12	6	10	9	16
Les notes en frn (y_i)	13	3	7	15	10	8	19	12

.

On détermine :

$$\overline{X} = \frac{10+15+8+12+6+10+9+16}{8} = 10.75$$
$$\overline{Y} = \frac{13+3+7+15+10+8+19+12}{8} = 10.87$$

On détermine la covariance par :

x_i	10	15	8	12	6	10	9	16
y_i	13	3	7	15	10	8	19	12
L'écart $\left(x_i - \overline{X}\right)$	-0.75	4.25	-2.75	1.25	-4.75	-0.75	-1.75	5.25
L'ecart $\left(y_i - \overline{Y}\right)$	2.13	-7.87	-3.87	4.13	-0.87	-2.87	8.13	1.13
Le produit $\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)$	-1.59	-33.44	10.64	5.16	4.13	2.15	-14.22	5.93

TAB. 1.1 – Tableau de calcul de la covariance

$$\begin{aligned} Cov(x,y) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{8}\left(x_i-\overline{X}\right)\left(y_i-\overline{Y}\right) \\ &= \frac{-1.59+(-33.44)+10.64+5.16}{8} \\ &+ \frac{4.13+2.15+(-14.22)+5.93}{8} \\ &= -2.65. \end{aligned}$$

Et on détermine la variance par :

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{8}\left(x_i-\overline{X}\right)^2 \\ &= \frac{(-0.75)^2+(4.25)^2+(-2.75)^2+(1.25)^2}{8} \\ &+ \frac{(-4.75)^2+(-0.75)^2+(-1.75)^2+(5.25)^2}{8} \\ V(x) &= \frac{1}{8}\times 81.5 = 10.18. \end{aligned}$$

On trouve :

$$b = Cov(x,y)/Var(x) = -\frac{2.65}{10.18} \approx -0.26$$

$$a = \overline{Y} - b\times\overline{X} = 10.87 + \frac{2.65}{10.18}\times 10.85 \approx 13.69.$$

L'équation de la droite de régression est alors : $Y = 13.69 - 0.26X$.

1.5 Estimation par l'intervalle de confiance

Au lieu de rechercher la meilleure estimation du paramètre X *(moyenne, proportion, écart-type, etc), on cherche un intervalle de valeurs dans lequel la valeur réelle se situe avec une probabilité de niveau de confiance, en pratique il est généralement de* $(95\%, 99\%,$ *etc). Si l'on exprime le niveau de confiance sous la forme* $1-\alpha$ *,alors* α *est appelé le risque* $(5\%, 1\%,$ etc$)$*, par conséquant, on recherche un ensemble* $[a,b]$ *tel que :*

$$p(x\in[a,b]) = 1-\alpha.$$

1.5.1 Estimation d'une moyenne

On définit X est une variable aléatoire suit la loi normale ; $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Intervalle de confiance d'une moyenne (la variance est connue)

Théorème 1.5.1 *Si σ^2 est connue, l'intervalle de confiance de m au niveau $1-\alpha$ est :*

$$\left[\overline{X}_n - q_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + q_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right],$$

où $q_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Exemple 1.5.1 *Comme le quantile $q_{0,975} = 1.80$, l'intervalle de confiance au niveau de signification 95% de m est donné par :*

$$\left[\overline{X}_n - 1.80\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + 1.80\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Intervalle de confiance d'une moyenne (la variance inconnue)

Théorème 1.5.2 *Si σ^2 est inconnue, l'intervalle de confiance de m au niveau $1-\alpha$ est :*

$$\left[\overline{X}_n - t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{\sqrt{\widehat{S_n^2}}}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{\sqrt{\widehat{S_n^2}}}{\sqrt{n}}\right],$$

où $t_{n-1,1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

Exemple 1.5.2 *Pour $n = 15$, avec un niveau de confiance 95% et un intervalle symétrique on obtient l'intervalle :*

$$\left[\overline{X}_n - 2.145\frac{\sqrt{\widehat{S_n^2}}}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + 2.145\frac{\sqrt{\widehat{S_n^2}}}{\sqrt{n}}\right].$$

cet intervalle de confiance est plus grand que celui obtenu lorsque la variance est connue.

1.5.2 Estimation d'une variance

On définit X est une variable aléatoire suit la loi normale ; $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Intervalle de confiance d'une variance (moyenne est connue)

Théorème 1.5.3 *Si m est connue, l'intervalle de confiance de σ^2 au niveau $1-\alpha$ est :*

$$\left[\frac{1}{u_2}\sum_{k=1}^{n}(X_k-m)^2, \frac{1}{u_1}\sum_{k=1}^{n}(X_k-m)^2\right],$$

où u_1 et u_2 sont les quantiles d'ordre $\alpha/2$ et $1-\alpha/2$ de la loi du χ^2 à n degrés de liberté.

Intervalle de confiance d'une variance (moyenne inconnue) :

Théorème 1.5.4 *Si m est inconnu, l'intervalle de confiance de σ^2 au niveau $1-\alpha$ est :*

$$\left[\frac{1}{u_2}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\overline{X}_n\right)^2, \frac{1}{u_1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\overline{X}_n\right)^2\right],$$

où u_1 et u_2 sont les quantiles d'ordre $\alpha/2$ et $1-\alpha/2$ de la loi du χ^2 à $n-1$ degrés de liberté.

1.5.3 Intervalle de confiance d'une proportion

On ne peut pas déterminer exactement un ntervalle de confiance. On adopte des solutions approchées qui fonctionnent lorsqu'on dispose d'echantillon de grande taille. Ainsi, lorsque n est grand et p voisin de $0,5$ On peut approcher la loi binomiale par une loi normale.

Rappel *:*

Considérons une suite de variables aléatoires Y_n suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, la suite des variables réduites $Y_n^* = \frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite, et on a :

$$\mathbb{P}\left(a \leq Y_n^* \leq b\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b \exp\left(-x^2/2\right)dx.$$

Théorème 1.5.5 *Un intervalle de confiance approché de p au niveau $1-\alpha$ est :*

$$\left[T - q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{T(1-T)}{n}}, T + q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{T(1-T)}{n}}\right],$$

où $q_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi normale centrée réduite, et $T = X/n$.

Pour plus de détails voir [10] .

Chapitre 2

La méthode des moments

Le contenu de ce chapitre est principalement consacré à la méthode des moments, une méthode classique et fondamentale en estimation statistique des paramètres. Cette méthode repose sur l'égalité entre les moments théoriques et empiriques afin de construire des estimateurs des paramètres inconnus.

2.1 Principe de la méthode des moments

2.1.1 Moments théoriques

Considérons une variable aléatoire X avec une fonction de densité de probabilité $f_X(x, \theta)$ dépendant d'un (ou de plusieurs) paramètres θ ou $(\theta_1, ..., \theta_n)$. *Rappelons la définition du k-ième moment de la variable aléatoire X :*

$$m_k(\theta) = E\left[X^k\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x, \theta)\, dx.$$

La dépendance explicite de m_k sur les paramètres θ résulte du fait que la PDF est fonction de la paramètres θ et l'intégration est reportée par rapport à x uniquement.

2.1.2 Moments empiriques

Considérons maintenant un échantillon aléatoire et indépendant $X = (X_1, ...X_n)$ *de la même distribution* $f_X(x, \theta)$ *.par analogie, nous définissions le k-ième moment d'échantillonnage comme :*

$$\overline{m_k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k.$$

La loi forte des grands nombres dit qu'à mesure que la taille de l'échantillon converge vers le k-ième moment d'une distribution :

$$\lim_{n\to\infty} \overline{m_k} = m_k(\theta).$$

2.1.3 Principe de la méthode des moments

La méthode des moments est basé sur l'égalité :

$$m_k\left(\widehat{\theta}\right) = \overline{m_k}.$$

L'estimateur est donc donné par :

$$\widehat{\theta} = m_k^{-1}\left(\overline{m_k}\right).$$

2.1.4 Consistance de l'estimateur

Chaque fois que la fonction inverse m_k^{-1} *existe. Notez que la loi des grands nombres garantit que l'estimateur produit par la méthode des moments est cohérent, puisque :*

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{\theta} = \lim m_k^{-1}\left(\overline{m_k}\right) = m_k^{-1}\left(\lim_{n\to\infty} \overline{m_k}\right) = m_k^{-1}\left(m_k(\theta)\right) = \theta$$

Dans la séquence d'égalités ci-dessus, nous avons supposé que les moments sont continus par rapport aux paramètres. Nous pouvons condenser la méthode en un algorithme comme suit.

2.2 Algorithme de la méthode des moments

étape 1 : *Si la PDF a d paramètres* $\theta = (\theta_1, ..., \theta_d)$ *que nous voulons estimer, nous utilisons alors l'équation* :

$$m_k(\theta) = E\left[X^k\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x, \theta)\, dx.$$

Pour calculer les d premiers moments théoriques de la distribution :

$$m_1(\theta_1, ..., \theta_d), m_2(\theta_1, ..., \theta_d), ..., m_d(\theta_1, ..., \theta_d).$$

etape 2 : *Nous utilisons ensuite les observations de données et l'équation :*

$$\overline{m_k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k.$$

étape 3 : *La loi des grands nombres stipule que pour une taille d'échantillon finie n ,nous avons ceci :*

$$m_1(\theta_1, ..., \theta_d) \approx \overline{m_1}, \quad m_2(\theta_1, ..., \theta_d) \approx \overline{m_2}, ..., \ m_d(\theta_1, ..., \theta_d) \approx \overline{m_d}.$$

Par conséquent, nous définirons nos estimations pour $(\theta_1, ..., \theta_d)$ *comme étant les nombres* $\left(\widehat{\theta_1}, ..., \widehat{\theta_d}\right)$ *qui satisfont le système d équations* :

$$m_1\left(\widehat{\theta_1}, ..., \widehat{\theta_d}\right) = \overline{m_1}, \quad m_2\left(\widehat{\theta_1}, ..., \widehat{\theta_d}\right) = \overline{m_2}, \quad ... \quad , m_d\left(\widehat{\theta_1}, ..., \widehat{\theta_d}\right) = \overline{m_d}.$$

2.3 Cas particuliers

2.3.1 Cas unidimensionnel

Exemple 2.3.1 (Loi de Pareto) *Pour* $X \rightsquigarrow Pareto\,(\beta)$: *On a :*

$$f_X\,(x,\beta) = \frac{\beta}{x^{\beta+1}},\ \ sur\ \ [1,+\infty[\,,$$

nous calculons le premier moment de la distribution :

$$m_1\,(\beta) = E\,[X] = \frac{\beta}{\beta-1},$$

pour obtenir la méthode des estimateurs des moments $\widehat{\beta}$ *on fixe alors ce moment égal au premier moment empirique :*

$$\frac{\widehat{\beta}}{\widehat{\beta}-1} = \overline{m_1},$$

résoudre cette équation pour $\widehat{\beta}$ *donne :*

$$\widehat{\beta} = \frac{\overline{m_1}}{\overline{m_1}-1}.$$

Exemple 2.3.2 (Loi Exponentielle) *Pour* $X \rightsquigarrow \mathcal{E}\,(\lambda)$: *On a :*

$$f_X\,(x,\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}.\ Pour\ x \in [0,+\infty[\ \ et\ \lambda > 0,$$

nous calculons le premier moment de la distribution :

$$m_1\,(\lambda) = E\,[X] = \frac{1}{\lambda},$$

la méthode de l'éstimateur des moments $\widehat{\lambda}$ *sera alors le nombre pour lequel la relation ci-dessus est vraie lorsque on substitue* $m_1\,(\lambda)$ *au moment empirique* $\overline{m_1}$*, à savoir :*

$$\overline{m_1} = \frac{1}{\widehat{\lambda}},$$

résoudre pour $\widehat{\lambda}$ *ci-dessus conduit à l'estimation :*

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{\overline{m_1}}.$$

2.3.2 Cas bidimensionnel

Exemple 2.3.3 (Loi de Gamma) *Pour* $X \rightsquigarrow \Gamma(\alpha, \beta)$ *: On a :*

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \alpha^{-\alpha-1} e^{-\beta/x}, \text{ pour } x \in [0, +\infty[\,, \ \alpha > 0, \text{ et } \beta > 0,$$

nous devrons utiliser les deux premiers instants de la distribution, on peut prouver que :

$$E[X] = \frac{\alpha}{\beta} \text{ et } Var[X] = \frac{\alpha}{\beta^2},$$

puisque pour toute variable aléatoire $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$*, on peut alors utiliser les équations ci-dessus pour écrire :*

$$E[X] = \frac{\alpha}{\beta} \text{ et } E\left[X^2\right] = \frac{\alpha}{\beta^2} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2,$$

ensuite, en notant m_1 *et* m_2 *être les premier et deuxième moments empiriques. les estimateurs* $\widehat{\alpha}$ *et* $\widehat{\beta}$ *obtenus par la méthode des moments sont les solutions du système d'équations suivant :*

$$\overline{m_1} = \frac{\widehat{\alpha}}{\widehat{\beta}} \text{ et } \overline{m_2} = \frac{\widehat{\alpha}}{\widehat{\beta}^2} + \left(\frac{\widehat{\alpha}}{\widehat{\beta}}\right)^2,$$

résoudre ce système en termes de $\widehat{\alpha}$ *et* $\widehat{\beta}$ *conduit à :*

$$\widehat{\alpha} = \frac{\overline{m_1}^2}{\overline{m_2} - \overline{m_1}^2}, \text{ et } \widehat{\beta} = \frac{\overline{m_1}}{\overline{m_2} - \overline{m_1}^2}.$$

Exemple 2.3.4 (Loi de Gumbel) *Pour* $X \rightsquigarrow \mathcal{G}(\alpha, \beta)$ *: On a :*

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}} e^{-e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}},$$

nous devrons utiliser les deux premiers instants de la distribution :

$$\mathbb{E}[X] = \alpha + \gamma\beta,$$
$$\mathbb{V}[X] = \frac{\pi^2\beta^2}{6},$$

où γ est la constante d'Euler.

On résout :

$$\begin{cases} \alpha + \gamma\beta = \overline{x}, \\ (\alpha + \gamma\beta)^2 + \frac{\pi^2\beta^2}{6} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \end{cases}$$

où de façon équivalente :

$$\begin{cases} \alpha + \gamma\beta = \overline{x}, \\ \frac{\pi^2\beta^2}{6} = \widetilde{S}^2, \end{cases}$$

ce qui donne la solution :

$$\widehat{\beta}_M = \frac{\sqrt{6}}{\pi}\widetilde{S} \text{ et } \widehat{\alpha}_M = \overline{x} - \frac{\gamma\sqrt{6}}{\pi}\widetilde{S}.$$

2.4 Propriétés de l'estimateur des moments :

Dans ce section, nous exposons les principales propriétés de la méthode des moments telles qu'elles résultent de sa formulation théoriques. Ces caractéristiques aident à saisir les conditions requises pour la validité de la méthode ainsi que le comportement de l'estimateur produit, notament en termes d'identification,l 'existence et la de formulation.

1. **Injectivité de la fonction des moments :**

   La méthode des moments se base sur un hypothèse fondamentale d'injectivité de la fonction des moments :

   $$\Phi(\theta) = \mathbb{E}_\theta[\varphi(X)],$$
   $$\Phi(\theta) = \Phi(\theta') \Rightarrow \theta = \theta'.$$

   Par conséquent chaque valeur des moments est associée à un unique paramètre θ. Cette condition

assure que le paramètre est identifiable, ce qui permet de définir une fonction réciproque Φ^{-1}.

2. **Principe de substitution**:

   Un des principes fondamentaux de la méthode est le principe de sibstitution. Les espérances théoriques non connues sont substituées par leur équivalents empiriques. On obtient donc l'estimation du paramètre par :

$$\widehat{\Phi}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(X_i\right).$$

$$\widehat{\theta} = \Phi^{-1}\left(\widehat{\Phi}_n\right).$$

3. **La consistance de l'estimateur :**

   On dit que l'estimateur $\widehat{\theta}$ *est consistant si, à mesure que la taille de l'échantillon* n *s'approche vers l'infini, il converge en probabilité vers la vraie valeur du paramètre* θ_0. *Au sujet de la méthode des moments, on observe que :*

$$\widehat{\Phi}_n \underset{n\to\infty}{\to} \Phi\left(\theta_0\right).$$

$$\widehat{\theta} \underset{n\to\infty}{\to} \theta_0.$$

   Par conséquent,l'estimateur des moments est consistant.

4. **Biais de l'estimateur**:

   Comme indiqué précédemment que le biais d'un estimateur $\widehat{\theta}$ *est défini comme suit* :

$$Biais\left(\widehat{\theta}\right) = \mathbb{E}\left[\widehat{\theta}\right] - \theta.$$

   Il mesure l'écart symétrique entre l'estimation et la vraie valeur du paramètre. On dit qu'un estimateur est sans biais si :

$$\mathbb{E}\left[\widehat{\theta}\right] = \theta.$$

   En se basant sur la méthode des moments, l'estimateur peut être biaisé ou non en fonction du modèle et de la choix des fonctions de moments.

5. **Erreur quadratique moyenne**(**EQM**) :

La définition de l'erreur quadratique moyenne (**EQM**) *d'un estimateur obtenu par la méthode des moments est la suivante :*

$$EQM\left(\widehat{\theta}\right) = \mathbb{E}\left[\left(\widehat{\theta} - \theta\right)^2\right].$$

Selon l'approche des moments, cet estimateur est éconstruit à partir des moments empiriques. Cela signifie que sa performance est étroitement liée à la variabilité de ces moments et à la fonction inverse Φ^{-1}. *Comme avec tout estimateur, l'EQM peut être décomposé en :*

$$EQM\left(\widehat{\theta}\right) = Var\left(\widehat{\theta}\right) + \left(Biais\left(\widehat{\theta}\right)\right)^2.$$

2.5 Tableau récapitulatif des estimateurs par la méthode des moments :

Loi de probabilité	*Estimateur par la méthode des moments*
Bernoulli (p)	$\widehat{p} = n^{-1}\sum_{i=}^{n} X_i.$
Poisson (λ)	$\widehat{\lambda} = n^{-1}\sum_{i=}^{n} X_i.$
Binomiale (n,p)	$\widehat{p} = \overline{X}/n.$
Géométrique (p)	$\widehat{p} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=}^{n} X_i\right)^{-1}.$
Exponentielle (λ)	$\widehat{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=}^{n} X_i}.$
Uniforme $[0,\theta]$	$\widehat{\theta} = 2 \times \frac{1}{n}\sum_{i=}^{n} X_i.$
Normale (μ,σ^2)	$\widehat{\mu} = \overline{X} \quad , \quad \widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2.$
Béta (α,β)	$\widehat{\alpha} = \overline{X}\left(\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{S^2} - 1\right) \quad , \quad \widehat{\beta} = (1-\overline{X})\left(\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{S^2} - 1\right).$
Gumbel (α,β)	$\widehat{\alpha} = \overline{X} - \gamma\widehat{\beta} \quad , \quad \widehat{\beta} = \sqrt{\frac{6}{\pi^2}S^2}.$

TAB. 2.1 – Synthèse des estimateurs par la méthode des moments

2.6 Limites de la méthode des moments :

– **Inefficacité (la borne de Cramér-Rao n'est pas atteinte)**:

Dans des situations spécifiquer, l'estimation par moments n'atteint pas la borne de Camér-Rao, à l'inverse du EMV asyptotiquement performant.

– **Peu fiable pour les petits échantillons**:

Lorsque n est faible, les moments empiriques ne reflètent pas fidèlement les moments théoriques. Des valeurs extrêmes peuvent avoir une influence significative sur l'estimation .

– **Risque de dépassement des limites des paramètres**:

L'exemple précédent (loi uniforme),indique que l'estimation peut être statistiquement incohérente si le domaine du paramètre est enfreint.

2.7 Extensions

La méthode des moments, diverses extensions ont été développées, parmi lesquelles les L-moments et la méthode des moments généralisée.

2.7.1 Les L-moments

Les L-moments sont des combinaisons linéaires des statistiques d'ordres. introduits par silitto(1951) *et développés par Hosking*(1990).

Les L-moments, sont analogues aux conventionnels moments mais L-moments ont certains avantages notamment leur existence, leur unicité et leur robustesse.

Les L-moment ont trouvés de nombreuses applications dans des domaines de la recherche appliquées tel que la météorologie, hydrolique, et le génie civil...

2.7.2 Méthode des moments généralisée(MMG)

La technique de la méthode des moments généralisée (MMG) constitue une approche d'estimation des paramètres qui élargit le cadre de la méthode classique des moments. Elle est surtout employée lorsque les hypothèses traditionnelles ne sont pas respectées ou lorsque les méthodes conventionnelles perdent leur efficacité .

La (MMG) se fonde sur des conditions des moments, exprimant des liens théoriques entre les va-

riables du modèle. Par exemple, dans le cadre d'un modèle de régression linéaire :

$$Y = \alpha + \beta X + \varepsilon.$$

On présume habituellement que le terme d'erreur est non corrélé avec la variable explicative, ce qui mène à la condition de moment :

$$E\left[X\left(Y - \alpha - \beta X\right)\right] = 0.$$

Par conséquant, l'estimation des paramètres est basée sur la minimisation d'une fonction objectif qui évalue l'écart entre les moments théoriques et empiriques :

$$Q\left(\theta\right) = \widehat{g}\left(\theta\right)' W \widehat{g}\left(\theta\right).$$

Où W est une matrice de pondération.
Ainsi,la méthode des moments généralisée(MMG) étend la méthode des moments en autorisant l'utilisation de multiples conditions des moments à la fois, même lorsqu'on est face à des modèles suridentifiés. Elle propose aussi une flexibilités.accrue en abandonnant certaines hypothèses classiques, ce qui la transforme en une extension naturelle et plus robuste de la méthode des moments dans les problèmes d'inférence statistique.

2.8 Comparaison avec la Méthode du Maximum de Vraisemblance

La méthode des moments est conceptuellement plus simple mais l'estimateur obtenu ne posède pas toutes les propriétés asymptotiques optimales. L'EMV est asymptotiquement sans biais, convergent et de variance minimale.

2.8.1 Avantages de la méthode des moments

- *Simplicité de calcul, souvent analytique.*
- *Pas besoin de résoudre des équations de vraisemblance compliquées.*
- *Fournit souvent de bons points de départ pour les algorithmes numériques.*
- *Converge plus rapidement que le MLE dans certains cas pour de petits échantillons*

2.8.2 Inconvénients

- *Des estimateurs parfois peu performants(variance plus grand que le MLE)*
- *Peut produire des estimateurs hors de l'espace des paramètres.*
- *Ne tient pas compte de toute l'information contenue dans l'échantillon.*

Chapitre 3

Applications numériques

Le contenu de ce chapitre est principalement consacré aux applications numériques de la méthode des moments. Nous présentons plusieurs exemples avec leurs représentations graphiques afin d'estimer les paramètres de différentes lois de probabilité et d'analyser le comportement des estimateurs.

3.1 Application de la méthode des moments

3.1.1 Convergence de l'estimateur (Loi exponentielle)

On considère un échantillon simulé suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$. *Le paramètre est estimé par la méthode des moments à l'aide de l'estimateur* $\widehat{\lambda} = 1/\overline{X}$. *On génère des échantillons de tailles* $n \in [10, 1000]$ *afin d'étudier la convergence de l'estimateur vers la vraie valeur de* λ, *illustrée graphiquement.*

Code R

```
# Fonction d'estimation par la méthode des moments

estimer_exp_moments <- function(echantillon) {

lambda_chapeau <- 1 / mean(echantillon)

return(list(lambda = lambda_chapeau, methode = "Moments"))

} # Simulation

set.seed(123)

n <- 100

lambda_reel <- 2

# Génération de l'échantillon

echantillon <- rexp(n, rate = lambda_reel)

# Estimation

resultat <- estimer_exp_moments(echantillon)

cat("Lambda reel :", lambda_reel, "n")

cat("Lambda estime :", resultat$lambda, "n")

# Etude de convergence

n_seq <- seq(10, 1000, by = 10)

estimations <- sapply(n_seq, function(n) {

echantillon <- rexp(n, rate = lambda_reel)

1 / mean(echantillon)

}) # Graphique

plot(n_seq, estimations, type = "l", lwd = 3, col = "black",

xlab = "Taille de l'echantillon", ylab = "Estimation de lambda")

abline(h = lambda_reel, col = "red", lwd = 3)

legend("topright", legend = c("Estimateur", "vrai lambda"),

col = c("black", "red"), lty = 1, lwd = 3)
```

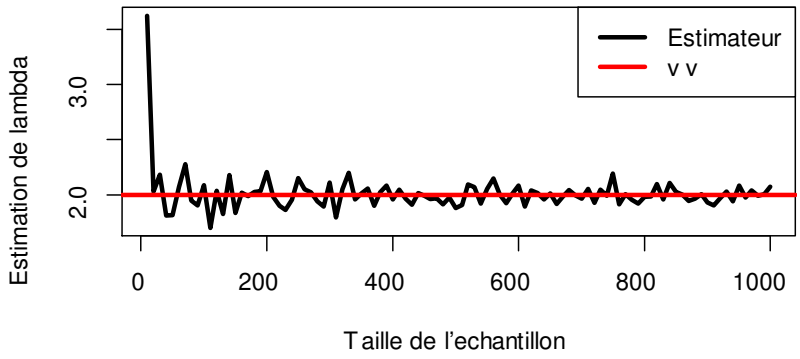

FIG. 3.1 – Convergence de l'estmateur λ par EMM

Interprétation du graphique

Le graphique illustre la convergence de l'estimation $\widehat{\lambda}$ *obtenu par la méthode des moments pour une loi exponentielle. Pour les petites tailles d'echantillons, les estimations présentent des fluctuations autour de la valeur réelle* $\lambda = 2$. *Cependant, lorsque la taille de l'échantillon augmente, l'estimateur se stabilise progressivement et se raproche de la vraie valeur représentée par la droite rouge. Ce comportement montre que l'estimateur est consistant, car il converge vers le vrai paramètre lorsque* $n \to \infty$.

3.1.2 Estimation des paramètres(Loi Pareto)

On s'intéresse un échantillon simulé suivant une loi de Pareto de paramètres $x_m = 1$ et $\alpha = 2.5$, *On génère un échantillon de taille* $n = 200$. *L'objectif est d'estimer le paramètre* α *à l'aide de la méthode des moments ,puis de comparer la distribution empirique à la distribution théorique afin d'évaluer la qualité de l'estimation.*

Code R

```
# Simulation

set.seed(123)

xm <- 1

alpha_reel <- 2.5

n <- 200

# Génération selon Pareto

rpareto <- function(n, xm, alpha) {

return(xm / runif(n)^(1 / alpha))

}

echantillon <- rpareto(n, xm, alpha _reel)

# Estimation par la méthode des moments

alpha_moments <- function(x, xm) {

x_bar <- mean(x)

return(xbar / (x_bar - xm))

}

alpha_est <- alpha_moments(echantillon, xm)

cat("Alpha réel :", alpha_reel, "n")

cat("Alpha estimé (moments) :", alpha_est, "n") # Histogramme

hist(echantillon, breaks = seq(1, max(echantillon), length.out = 30),

probability = TRUE, col = "lightblue",

border = "white", main = "", xlab = "Valeurs", xlim = c(1, max(echantillon)))

curve(alpha_est * xm^(alpha)_est / x^(alpha_est + 1),

from = xm, to = max(echantillon), col = "red", lwd = 2, lty = 2, add = TRUE)

curve(alpha_reel * xmâlpha_reel / x^(alpha_reel + 1),

from = xm, to = max(echantillon), col = "blue", lwd = 2, add = TRUE)

legend("topright", legend = c("Densité réelle", "Densité estimée"), col =

c("blue", "red"), lwd = 2, lty = c(1, 2))
```

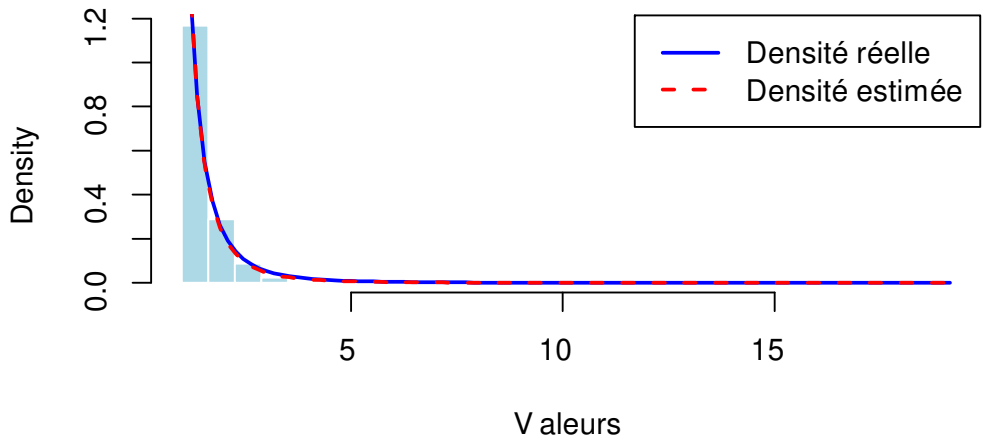

FIG. 3.2 – Estimation de la loi de Pareto par EMM

Interprétation graphique :

On observe que les valeurs sont fortement concentrées près de x_m,puis décroissent rapidement lorsque les valeurs augmentent,ce qui est caractéristique de la loi de Pareto.Par ailleurs,la courbe en pointillés rouges est trés proche de la courbe bleue réelle,ce qui montre que la méthode des moments fournit une estimation satisfaisante des paramètres.Enfin,la bonne concordance entre les courbes théoriques et l'histogramme confirme que le modèle estimé décrit correctement les données.

3.1.3 Estimation des paramètres (Loi Beta) :

On suppose une loi Beta de paramètres $\alpha = 2$ et $\beta = 5$.On génère un échantillon de taille $n = 1000$.L'objectif est d'estimer les paramètres α et β à l'aide de la méthode des moments ,puis de comparer la distribution empirique à la distribution théorique pour évaluer la performance de l'estimation.

Code R

```
# Fonction d'estimation Beta par la methode des moments

estimer_beta_moments <- function(echantillon) {

x_bar <- mean(echantillon)

var_ech <- var(echantillon)

tmp <- x_bar * (1 - x_bar) / var_ech - 1

if(tmp <= 0) {

warning("Les moments empiriques ne correspondent pas a une loi Beta")

return(list(alpha = NA, beta = NA))

}

alpha_chapeau <- x_bar * tmp

beta_chapeau <- (1 - x_bar) * tmp

return(list(alpha = alpha_chapeau,

beta = beta_chapeau))

}

# Exemple

set.seed(101)

alpha_reel <- 2

beta_reel <- 5

echantillon <- rbeta(1000, alpha_reel, beta_reel)

# Estimation

resultat_beta <- estimer_beta_moments(echantillon)

cat("Alpha reel :", alpha_reel, ", estime :", resultat_beta$alpha, "n")

cat("Beta reel :", beta_reel, ", estime :", resultat_beta$beta, "n")
```

```
# Verification graphique

hist(echantillon, probability = TRUE,breaks = 30, main = "Beta MM", xlab = "x",
ylab = "Densite")

curve(dbeta(x, resultat_beta$alpha, resultat_beta$beta),add = TRUE, col = "red",
lwd = 3)

curve(dbeta(x, alpha_reel, beta_reel),add = TRUE, col = "blue", lwd = 3, lty =
2)

legend("topright", legend = c("Estimee", "Reelle"),col = c("red", "blue"), lty =
c(1, 2),lwd = 3)
```

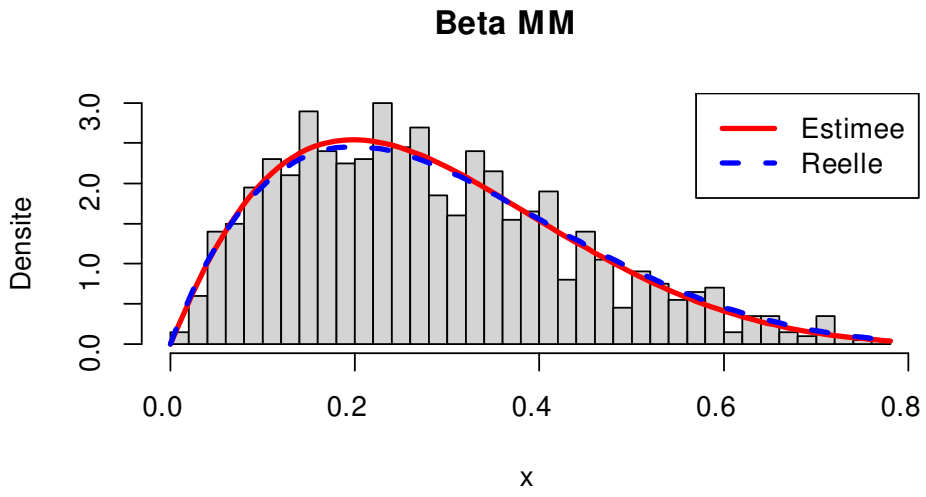

FIG. 3.3 – Estimation de la loi Beta par EMM

Interprétation du graphique

Le graphique représente l'histogramme de l'échantillon simulé selon une loi $\mathcal{B}(2,5)$*,ainsi que la densité théorique et la densité estimé par la méthode des moments.*

On observe que l'histogramme est bien ajusté par le courbe théorique,ce qui confirme que les données suivent correctement une loi Beta.De plus,la courbe estimée est proche de la courbe réelle,ce qui montre que la méthode des moments fournit une bonne estimation des paramètres α *et* β *pour un échantillon*

de taille $n = 1000$.

3.1.4 Comparaison avec la méthode du maximum de vraisemblance (Loi Gamma) :

On étudie une loi Gamma de paramètres $\alpha = 3$ *et* $\beta = 2$.*On génère* $n = 500$ *observations et on répète l'expérience* $n_{sim} = 1000$ *fois.L'objectif est de comparer la méthode des moments et le maximum de vraisemblance pour l'estimation du paramètre* α*, à travers une simulation de Monte Carlo.*

Code R

```
library(MASS)

# Estimateur des moments pour la loi Gamma

estimer_gamma_moments <- function(echantillon) {

x_bar <- mean(echantillon)

var_x <- var(echantillon)

alpha_chapeau <- x_bar^2 / var_x

beta_chapeau <- var_x / x_bar

return(list(alpha = alpha_chapeau, beta = beta_chapeau))

}

set.seed(456)

# Paramètres réels

alpha_reel <- 3

beta_reel <- 2

n <- 500

nsim <- 1000

alpha_mom <- numeric(nsim)

alpha_mle <- numeric(nsim)

for (i in 1 :nsim) {

echantillon <- rgamma(n, shape = alpha_reel, scale = beta_reel)
```

```
# Méthode des moments

res_mom <- estimer_gamma_moments(echantillon)

alpha_mom[i] <- res_mom$alpha

# Maximum de vraisemblance

fit <- fitdistr(echantillon, "gamma")

alpha_mle[i] <- fit$estimate["shape"]

}

par(mfrow = c(1,2), mar = c(5,4,4,2))

hist(alpha_mom,

main = "EMM",

xlab = expression(alpha),

col = "lightblue",

breaks = 30)

abline(v = alpha_reel, col = "red", lwd = 3)

hist(alpha_mle,

main = "EMV",

xlab = expression(alpha),

col = "lightgreen",

breaks = 30)

abline(v = alpha_reel, col = "red", lwd = 3)

par(mfrow = c(1,1))
```

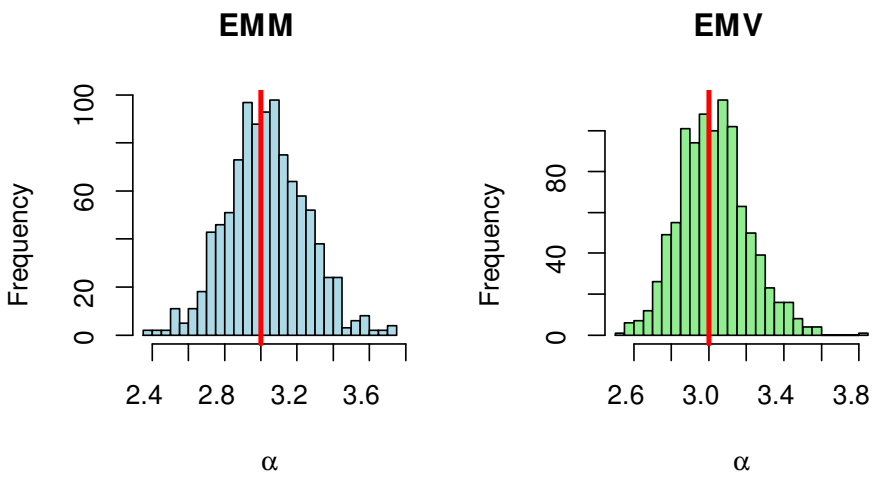

FIG. 3.4 – Comparaison entre l'EMM et l'EMV

Interprétation des histogrammes :

Les histogrammes représentent la distribution des estimateurs du paramètre α obtenus par la méthode des moments et par le maximum de vraisemblance sur 1000 *simulations.*

On remarque que les deux estimateurs sont centrés autour de la vraie valeur $\alpha = 3$,ce qui montre qu'ils sont approximativement non biaisés.

Cependant,l'estimateur du maximum de vraisemblance présente une dispersion plus faible,ce qui indique une meilleure précision et une plus grande stabilité par rapporte à la méthode des moments.Ainsi,le MLE apparaît plus performant que la méthode des moments dans ce cas.

Conclusion

Au terme de ce travail,nous avons étudié les principales méthodes d'estimation paramétriques en mettant l'accent sur la méthode des moments.Nous avons présenté ses fondaments théoriques,ses étapes d'applications ainsi que certaines de ses limites et extentions. À travers plusieurs exemples et simulations réalisés sous le logiciel R,nous avons appliqué cette méthode à différentes lois de probabilité et comparé ses résultats avec ceux de la méthode du maximum de vraisemblance.Cette étude a montré que la méthode des moments constitue une méthode simple et efficace,même si sa précision peut varier selon les modèles étudiés.

Ce travail nous a également permis d'approfondir nos connaissances en statistique mathématique et en simulation numérique,et peut servir de base à des études plus avancées dans le domain de l'estimation statistique.

Bibliographie

[1] Casella, G., & Berger, R. L. (2002). Statistical inference (2nd ed.). Duxbury.

[2] Delmas,B.(2015) .Statistique mathématique.Université Paris-Est.

[3] Hosking,J.R.M.(1990).L-moments :Analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics.Journal of the Royal Statistical Society :Series B,52 (1) , 105-124.

[4] Wasserman,L.(2004) .All of Statistics :A Concise Course in Statistical Inference.Springer.

[5] Lejeune, M. (2010). Statistique : La théorie et ses applications. Springer.

[6] Saporta, G. (2011). Probabilités, analyse des données et statistique(3rd ed.) . Editions Technip, Paris.

[7] Veysseyre, R. (2006). Aide-mémoire : statistique et probabilité pour l'ingénieur. Dunod.

[8] Charfaoui,M.(2016-2017) .Cours.Université de Mohamed kheider Biskra,biskra.

[9] Sànchez-Vizuet,T.(2025) .A concise introduction to mathématical statistics(Last update June 1, 2025) .The University of Arizona.

[10] Ruch,J-J.(2012-2013) .Statistique :estimation.Préparation à l'Agrégation Bordeaux 1.

[11] IUT Périgueux.(2020-2021) .Statistique à deux variables(partie 1) .

[12] Hansen, L. P. (1982). Large sample properties of generalized method of moments estimators. Econometrica, 50 (4), 1029–1054.

[13] Garet,O & Kurtzmann,A. (2019). De l'intégration aux probabilités (Chap. 13.3.2). Éditions Ellipses.

[14] Moreau,R.(2019) .Leçon 264 :Variables aléatoires discrètes.Exemples et applications (Mémoire de Master) .Université de Rennes 1.

[15] Saadi,N.(2019-2020) .Statistique inférentielle :Polycopié de cours.Université A.Mira de Béjaïa.

[16] Nom,P.(2026) .La méthode des moments en estimation paramétrique :Chapitre pratique avec implémentation en R [Support de cours de statistique mathématique] .

[17] Boukhari, N., & Zouaoui, I. (2020-2021). Les méthodes statistiques et applications. (Mémoire de master).Université de Bordj Bou Arréridj.

résumée

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'estimation statistique et le principe de l'estimation à partir d'un échantillon.
Nous nous sommes particulièrement intéressés à la méthode des moments, à son algorithme et à ses principales propriétés.
Nous avons également mis en évidence sa simplicité en la comparant à d'autres méthodes comme le maximum de vraisemblance.
Enfin, cette méthode a été appliquée à différentes lois paramétriques afin d'évaluer son eficacité.

abstract

In this dissertation, we studied statistical estimation and the principle of estimation based on a statistical sample.
We focused particularly on the method of moments, its algorithm, and its main properties.
We also highlighted its simplicity by comparing it with other methods such as the maximum likelihood method.
Finally, this method was applied to different parametric distributions in order to evaluate its e□ectiveness.

ملخص

في هذه المذكرة، قمنا بدراسة التقدير الإحصائي ومبدأ التقدير انطلاقاً من عينة.
وقد اهتممنا بشكل خاص بطريقة العزوم، وخوارزميتها، وخصائصها الأساسية.
كما أبرزنا بساطتها من خلال مقارنتها بطرق أخرى مثل طريقة الإمكان الأعظم.
وفي الأخير، تم تطبيق هذه الطريقة على توزيعات احتمالية معلمية مختلفة من أجل تقييم فعاليتها.