Université Mohamed Khider de Biskra
Faculté des sciences exactes
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité : Probabilités et statistique - Réf : P1338/2026

TITRE

Sur le principe du maximum stochastique de type mean-field: Cas convexe

Présenté et soutenu par

OUARDA RIGUET

Date de soutenance : 06/06/2026

JURY DE SOUTENANCE

Nom et Prénom	Grade	Qualité
Mokhtar HAFAYED	Prof	**Président**
Fatiha KORICHI	MCB	**Encadrant**
Nassima CHAOUCHKHOUANE	MCB	**Examinateur**

Année universitaire : 2025/2026

Dédicace

À ceux qui ont été le fondement de ma persévérance
et le terreau de mes ambitions ;
à mes très chers parents,
pour leur amour inconditionnel, leur soutien indéfectible
et leurs sacrifices inestimables.

*À ma chère sœur **Hanan**,*
complice de chaque instant et appui de tous les jours,
dont la présence a toujours été une source de force et de réconfort.

À toutes les personnes bienveillantes
qui ont contribué, de près ou de loin,
à l'aboutissement de ce travail.

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à mon encadrante,
Madame la Docteure Fatiha Korichi,
pour la rigueur de son encadrement, la justesse de ses orientations
et la disponibilité dont elle a fait preuve
tout au long de l'élaboration de ce travail.

Je remercie également les enseignants du département de Mathématiques
pour la solidité de la formation qu'ils m'ont dispensée,
ainsi que les membres du jury pour le temps
qu'ils ont bien voulu consacrer à l'évaluation de ce mémoire.

Une reconnaissance toute particulière va à ma chère sœur **Hanan**,
pilier constant de mes journées de travail,
dont le soutien indéfectible a rendu ce parcours possible.
Je remercie également mes chers parents,
dont les prières et les encouragements
ont été une lumière dans les moments difficiles.

À toutes les personnes qui ont contribué, d'une manière ou d'une autre,
à l'achèvement de ce mémoire,
j'adresse l'expression de ma sincère reconnaissance.

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude du principe du maximum stochastique (SMP) pour une classe de systèmes de type Mean-field (ou équations de McKean–Vlasov) dans le cas convexe. Dans ce cadre, la dynamique du système ainsi que la fonctionnelle de coût dépendent explicitement de la loi de probabilité du processus d'état.

Après avoir présenté les fondements du calcul stochastique ainsi que le principe du maximum dans le cadre classique, nous introduisons les outils nécessaires pour traiter la dépendance en loi, en particulier la dérivation par rapport à la mesure au sens de Lions.

Le résultat principal consiste en l'établissement de conditions nécessaires d'optimalité à travers un système d'équations adjointes de type Mean-field et l'introduction d'une fonction Hamiltonienne adaptée. Ces résultats s'inscrivent dans le prolongement des travaux récents en contrôle stochastique de type Mean-field.

Mots-clés : Contrôle stochastique, Mean-field, McKean–Vlasov, Principe du maximum stochastique, Contrôle optimal, Cas convexe.

Abstract

This work is devoted to the study of the Stochastic Maximum Principle (SMP) for a class of Mean-field type systems (McKean–Vlasov stochastic differential equations) in the convex case. In this framework, both the system dynamics and the cost functional explicitly depend on the probability distribution of the state process.

After recalling the fundamentals of stochastic calculus and the classical maximum principle, we introduce the appropriate tools to handle law dependence, in particular the Lions derivative.

The main result consists in establishing necessary optimality conditions via a system of Mean-field adjoint equations together with an associated Hamiltonian function. These results are in line with recent developments in Mean-field stochastic control.

Keywords : Stochastic control, Mean-field systems, McKean–Vlasov equations, Stochastic maximum principle, Optimal control, Convex case.

ملخص

تتناول هذه المذكرة دراسة مبدأ الحد الأقصى العشوائي لفئة من الأنظمة من نوع المجال المتوسط ،(Mean-field) والمعروفة أيضًا بمعادلات ماكين--فلاسوف، وذلك في الحالة المحدبة. في هذا الإطار، تعتمد ديناميكية النظام ودالة التكلفة بشكل صريح على القانون الاحتمالي لعملية الحالة.

بعد عرض أساسيات الحساب العشوائي ومبدأ الحد الأقصى في الحالة الكلاسيكية، قمنا بتقديم الأدوات اللازمة لمعالجة التبعية للقانون، خاصة الاشتقاق بالنسبة للقياس بالمعنى الذي قدمه ليونز.

تتمثل النتيجة الرئيسية في اشتقاق شروط أمثلية ضرورية اعتمادًا على نظام من المعادلات المرافقة من نوع Mean-field، إلى جانب دالة هاملتونيان مناسبة. وتندرج هذه النتائج ضمن التطورات الحديثة في مجال التحكم العشوائي من نوع المجال المتوسط.

الكلمات المفتاحية: التحكم العشوائي، المجال المتوسط، معادلات ماكين--فلاسوف، مبدأ الحد الأقصى، التحكم الأمثل، الحالة المحدبة.

Table des matières

Résumé **iii**

Abstract **iv**

ملخص **vi**

Liste des abréviations **ix**

Liste des notations **x**

Introduction générale **1**

1 Rappels sur le calcul stochastique **1**

1.1 Espaces probabilisés 1

1.1.1 Tribu et espace mesurable 1

1.1.2 Mesure de probabilité et espace probabilisé 2

1.1.3 Propriétés fondamentales 2

1.1.4 Événements indépendants 3

1.1.5 Probabilité conditionnelle 3

1.1.6 Variables aléatoires 4

1.1.7 Espérance et variance 4

1.1.8 Inégalité de Markov 5

1.1.9 Convergence de variables aléatoires 5

1.2 Processus stochastiques 5

1.2.1 Définition générale 6
1.2.2 Filtration et processus adaptés 6
1.2.3 Martingales 7
1.2.4 Espace $L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^d)$ 7
1.3 Mouvement Brownien 8
1.3.1 Définition 8
1.3.2 Mouvement brownien d-dimensionnel 9
1.3.3 Propriétés fondamentales 10
1.3.4 Propriété de Markov 11
1.3.5 Représentation graphique 11
1.4 Intégrale stochastique et formule d'Itô 11
1.4.1 Intégrale d'Itô 12
1.4.2 Intégrale d'Itô multidimensionnelle 13
1.4.3 Formule d'Itô 13
1.4.4 Équations différentielles stochastiques rétrogrades 14

2 Principe de maximum stochastique dans le cas régulier 16

2.1 Présentation du problème 16
2.1.1 Équation d'état 16
2.1.2 Ensemble des contrôles admissibles 18
2.1.3 Fonctionnelle de coût 18
2.2 Résultats préliminaires et hypothèses 19
2.2.1 Rappel des hypothèses de régularité 19
2.2.2 Existence, unicité et estimations de moments 19
2.3 Hamiltonien et principe du maximum stochastique 20
2.3.1 Hamiltonien 20

2.3.2 Système adjoint 21
2.3.3 Principe du maximum stochastique — cas régulier 22

3 Principe de maximum stochastique de type mean-field 26

3.1 Présentation du problème 26
3.1.1 Cadre probabiliste 26
3.1.2 Équation d'état de type McKean–Vlasov 27
3.1.3 Hypothèses de régularité 28
3.1.4 Fonctionnelle de coût et problème d'optimisation 29
3.2 Les équations adjointes 30
3.2.1 Le Hamiltonien de type mean-field 30
3.2.2 Copie indépendante et notation 31
3.2.3 L'équation différentielle stochastique rétrograde adjointe . . 31
3.2.4 Existence et unicité du processus adjoint 32
3.3 Principe du maximum stochastique de type mean-field 32
3.3.1 Rappel : le Hamiltonien de type mean-field 33
3.3.2 Énoncé du principe du maximum 33
3.3.3 Démonstration du théorème 33
3.3.4 Commentaires sur le résultat 36
3.3.5 Illustration sur un exemple scalaire 37

Conclusion générale 40

Bibliographie 43

Liste des abréviations

Les abréviations littérales employées dans ce mémoire sont les suivantes.

Abréviation	Signification
EDS	Équation différentielle stochastique
EDSR	Équation différentielle stochastique rétrograde
p.p.	Presque partout
p.s.	Presque sûrement

Liste des notations

Les notations mathématiques employées de manière récurrente dans ce mémoire sont regroupées ci-dessous, dans l'ordre thématique de leur apparition.

Notation	Signification
Ω	Espace des issues
$\mathcal{F}$	Tribu (σ-algèbre) sur Ω
$\mathbb{P}$	Mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace probabilisé
$(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$	Filtration vérifiant les conditions habituelles de complétude et de continuité à droite
$\mathbb{F}$	Filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ engendrée par le mouvement brownien W
$(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$	Espace de probabilité auxiliaire, indépendant de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
$\mathbb{E}[X]$	Espérance mathématique de X sous $\mathbb{P}$
$\tilde{\mathbb{E}}[X]$	Espérance mathématique de X sous $\tilde{\mathbb{P}}$
W_t	Mouvement brownien standard d-dimensionnel

Notation	Signification
$\langle W \rangle_t$	Variation quadratique du mouvement brownien
x_0	Condition initiale du processus d'état
X_t	Processus d'état à valeurs dans $\mathbb{R}^n$
$\bar{X}_t$	Trajectoire optimale associée au contrôle optimal $\bar{u}$
$\tilde{X}_t$	Copie indépendante de X_t sur l'espace auxiliaire $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$
$\mathbb{P}_{X_t}$	Loi marginale de X_t sous $\mathbb{P}$
$\mathbb{P}_{X_T}$	Loi de X_T à l'instant terminal T
$\mathcal{L}(X)$	Loi de la variable aléatoire X sous $\mathbb{P}$
$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$	Espace des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^n$ ayant un moment d'ordre deux fini
$\mathcal{W}_2(\mu, \mu')$	Distance de Wasserstein d'ordre deux entre μ et μ' dans $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$
$\Pi(\mu, \mu')$	Ensemble de tous les couplages de μ et μ' sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$
$\int_0^t \Phi_s \, dW_s$	Intégrale d'Itô du processus Φ par rapport à W
dX_t	Différentielle stochastique du processus X_t
$L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^d)$	Espace des processus $(\mathcal{F}_t)$-adaptés, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, vérifiant $\mathbb{E}\int_0^T \lvert\Phi_t\rvert^2 \, dt < +\infty$
$\mathcal{S}^2([0, T]; \mathbb{R}^n)$	Espace des processus $(\mathcal{F}_t)$-adaptés continus vérifiant $\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} \lvert X_t\rvert^2] < +\infty$

Notation	Signification
$\mathcal{H}^2([0,T];\mathbb{R}^{n\times d})$	Espace des processus progressivement mesurables vérifiant $\mathbb{E}\int_0^T \lvert q_t\rvert^2\, dt < +\infty$
U	Sous-ensemble convexe, fermé et non vide de $\mathbb{R}^m$, ensemble des valeurs du contrôle
u_t	Processus de contrôle à valeurs dans U
$\bar{u}_t$	Contrôle optimal
$\mathcal{U}_{ad}$	Ensemble des contrôles admissibles
u_t^ε	Perturbation convexe du contrôle optimal : $u_t^\varepsilon = (1-\varepsilon)\bar{u}_t + \varepsilon v_t,\ \varepsilon \in (0,1]$
$J(u)$	Fonctionnelle de coût associée au contrôle u
$f(t,x,u)$	Coût courant dans le cas classique
$f(t,x,\mu,u)$	Coût courant dépendant de la loi (cas mean-field)
$h(x)$	Coût terminal dans le cas classique
$h(x,\mu)$	Coût terminal dépendant de la loi (cas mean-field)
$b(t,x,u)$	Coefficient de dérive dans le cas classique
$\sigma(t,x,u)$	Coefficient de diffusion dans le cas classique
$b(t,x,\mu,u)$	Coefficient de dérive dépendant de la loi
$\sigma(t,x,\mu,u)$	Coefficient de diffusion dépendant de la loi
$H(t,x,u,p,q)$	Hamiltonien dans le cas classique

Notation	Signification
$\mathcal{H}(t, x, \mu, u, p, q)$	Hamiltonien de type mean-field
∂_x	Dérivée partielle par rapport à l'état x
∂_u	Dérivée partielle par rapport au contrôle u
∂_μ	Dérivée au sens de Lions par rapport à la mesure μ
(p_t, q_t)	Couple de processus adjoints
p_t	Variable adjointe primale à valeurs dans $\mathbb{R}^n$
q_t	Composante martingale du processus adjoint, à valeurs dans $\mathbb{R}^{n\times d}$
$(\bar{p}_t, \bar{q}_t)$	Processus adjoint associé au contrôle optimal $\bar{u}$, solution de l'EDSR adjointe
$\mathrm{Var}(X)$	Variance de la variable aléatoire X
$\langle x, y\rangle$	Produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$
$\lvert x\rvert$	Norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$
$\lVert A\rVert_F$	Norme de Frobenius d'une matrice A
$\mathrm{tr}(A)$	Trace d'une matrice carrée A
T	Horizon temporel fini et fixé
C	Constante positive générique, pouvant varier d'une inégalité à l'autre

Introduction générale

Le contrôle optimal stochastique s'intéresse à la commande de systèmes dynamiques soumis à des perturbations aléatoires continues, en minimisant un critère de performance donné. Ce cadre trouve des applications en finance mathématique, en ingénierie des systèmes, en physique statistique et en économie dynamique. Sa formulation rigoureuse repose sur des outils spécifiques — mouvement brownien, intégrale d'Itô, formule de changement de variable — sans lesquels les notions de solution forte et de fonctionnelle de coût n'auraient aucun fondement.

Pour caractériser les contrôles optimaux, deux voies s'offrent. La première — programmation dynamique, équation de Hamilton–Jacobi–Bellman — est puissante mais exige une régularité de la fonction valeur souvent hors de portée. Nous avons suivi la deuxième : le *principe du maximum stochastique*, démarche variationnelle qui perturbe directement le contrôle et lit les conditions d'optimalité dans la variation qui en résulte. Bismut [4] l'a transposé au cadre stochastique en montrant que l'équation adjointe y prend la forme d'une EDSR, résultat qui constitue le point de départ naturel de toute l'analyse développée ici. Peng [12] en a ensuite bâti la théorie générale non convexe. De cette approche résultent un *Hamiltonien* encodant dynamique et coût, et un *système adjoint* — couple $(p_t,\, q_t)$ — fournissant les variables duales du contrôle optimal.

Ce cadre, dit *cas régulier*, est aujourd'hui bien consolidé [14, 1, 15]. Ses hypothèses excluent cependant une classe de problèmes de plus en plus présente dans la littérature : en théorie des jeux à grand nombre de joueurs, ou dans la modélisation de populations d'agents en interaction, la dynamique de chaque individu dépend non seulement de son propre état, mais de la distribution statistique de l'ensemble du système. Cette particularité fait sortir le problème du cadre classique et oblige à reconsidérer entièrement la structure des équations d'état.

Les *équations de McKean–Vlasov* ont précisément été introduites pour traiter cette

classe de problèmes. Dans ces équations, les coefficients b, σ, f et h dépendent tous de la loi marginale courante $\mathbb{P}_{X_t}$ du processus. L'existence et l'unicité de la solution forte à ce type d'équations sont établies sous des conditions de régularité appropriées, notamment des hypothèses de type Lipschitz sur les coefficients par rapport à l'état et à la mesure, au sens de la distance de Wasserstein d'ordre deux [5, 2]. Cette dépendance en loi introduit une non-linéarité qui rend inopérantes les techniques classiques : différentier la fonctionnelle de coût par rapport à la distribution de l'état requiert la *dérivée par rapport à une mesure de probabilité au sens de Lions* [10], définie sur $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$ muni de la distance $\mathcal{W}_2$. C'est l'apparition de cette dérivée — et des termes en $\partial_\mu b$, $\partial_\mu \sigma$, $\partial_\mu f$, $\partial_\mu h$ dans le système adjoint — qui constitue la différence structurelle essentielle entre le cas régulier et le cadre champ moyen. Dans le cas convexe, cette approche variationnelle a été initiée par Bensoussan (1983) dans le cadre classique ; c'est Andersson et Djehiche [2] qui l'ont étendue, en 2010, au cadre champ moyen. Les fondations probabilistes de cette théorie ont été posées par Buckdahn, Djehiche, Li et Peng [5]. Hafayed a ensuite étendu ces résultats aux contrôles singuliers [6], établi des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité [7], et généralisé l'analyse aux systèmes dirigés par des martingales de Teugels [8].

Problématique. La question centrale de ce mémoire est la suivante : le schéma de preuve du principe du maximum stochastique — perturbation convexe, linéarisation de l'équation d'état, dualité par la formule d'Itô — résiste-t-il au passage au cadre McKean–Vlasov ? De quelle façon la dépendance en loi modifie-t-elle la structure du système adjoint, et quels termes nouveaux, issus des dérivées de Lions $\partial_\mu b$, $\partial_\mu \sigma$, $\partial_\mu f$, $\partial_\mu h$, apparaissent dans les conditions nécessaires d'optimalité ?

Objectifs du travail. Notre objectif est d'établir, rigoureusement et progressivement, le principe du maximum stochastique de type champ moyen dans le cas convexe. La démarche est variationnelle : perturber le contrôle par combinaison convexe, linéariser l'équation d'état, exploiter la dualité entre l'équation de variation et le système adjoint. Le résultat attendu est une inégalité variationnelle sur le gradient du Hamiltonien champ moyen, valable pour p.p. $t \in [0, T]$, $\mathbb{P}$-p.s.

Organisation du mémoire. Le travail s'articule autour de trois chapitres, chacun préparant le suivant.

Le **premier chapitre** réunit les rappels indispensables : espaces probabilisés filtrés,

martingales, mouvement brownien, intégrale d'Itô (isométrie, Burkholder–Davis–Gundy, formule d'Itô) et équations différentielles stochastiques rétrogrades.

Le **deuxième chapitre** établit le principe du maximum dans le cas régulier : formulation du problème, Hamiltonien, système adjoint EDSR linéaire, puis démonstration par perturbation convexe et dualité via la formule d'Itô. Ce schéma constitue le modèle repris au chapitre suivant.

Le **troisième chapitre** est le cœur de ce mémoire : principe du maximum de type champ moyen dans le cas convexe. Après avoir posé le problème McKean–Vlasov et les hypothèses de différentiabilité au sens de Lions, nous construisons le Hamiltonien et le système adjoint correspondants, démontrons le théorème principal, puis l'illustrons sur un exemple scalaire résolu par *ansatz* affine.

Perspectives. Plusieurs directions restent ouvertes à l'issue de ce travail : l'extension au cas non convexe par variations en aiguille, l'étude des contrôles singuliers [6], et l'analyse de systèmes progressifs-rétrogrades sous hypothèses affaiblies, dans la continuité de [5, 2, 7, 8, 1, 15].

Chapitre 1

Rappels sur le calcul stochastique

1.1 Espaces probabilisés

Ce chapitre rassemble les rappels indispensables à la lecture des deux chapitres suivants. On n'y trouvera pas de résultats nouveaux : tout ce qui est présenté ici est classique, et les démonstrations, lorsqu'elles figurent, ont pour seul objectif d'éclairer la compréhension plutôt que d'établir des théorèmes. Pour les preuves complètes, on renvoie à [9, 3, 14].

Ce choix d'organisation n'est pas arbitraire. Chaque notion introduite dans ce chapitre sera effectivement mobilisée dans la formulation du problème de contrôle stochastique de type Mean-field ou dans l'établissement du principe du maximum [1, 15]. On commence par le plus élémentaire — la structure d'un espace probabilisé — avant de monter progressivement vers les outils spécifiques au calcul stochastique.

1.1.1 Tribu et espace mesurable

Pour parler de probabilité, il faut d'abord savoir sur quels ensembles elle sera définie. Ce n'est pas une question anodine : attribuer une probabilité à n'importe quelle partie de Ω conduit, dans les cas non dénombrables, à des contradictions. La tribu est précisément la structure qui délimite les parties auxquelles on a le droit d'attribuer une mesure [3].

Définition 1.1.1 (Tribu ou σ-algèbre)**.** *Soit Ω un ensemble non vide. Une famille $\mathcal{F}$ de parties de Ω est appelée* tribu *sur Ω si elle vérifie :*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.

2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$.

3. *Si* $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$, *alors* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ *est appelé* espace mesurable.

Remarque 1.1.1. Ces trois axiomes suffisent à déduire que $\emptyset \in \mathcal{F}$ et que $\mathcal{F}$ est stable par intersection dénombrable. Sur $\mathbb{R}$, la tribu canonique est la *tribu borélienne* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, engendrée par les intervalles ouverts : elle contient tous les ensembles qu'on rencontre en pratique. Voir [9, 3].

1.1.2 Mesure de probabilité et espace probabilisé

Définition 1.1.2 (Mesure de probabilité)**.** *Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace mesurable. Une* mesure de probabilité *est une application* $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ *satisfaisant :*

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

2. *Pour toute suite* $(A_n)_{n\geq 1}$ *d'événements deux à deux disjoints :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n). \tag{1.1}$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est un* espace probabilisé *[3].*

1.1.3 Propriétés fondamentales

Propriété 1.1.1 ([3])**.** *Pour* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $A, B \in \mathcal{F}$ *:*

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

2. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

3. $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

5. $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \Rightarrow \mathbb{P}\big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\big) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$.

6. $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \Rightarrow \mathbb{P}\big(\bigcap_{n\geq 1} A_n\big) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$.

1.1.4 Événements indépendants

Définition 1.1.3 (Indépendance [3]). *A et B sont* indépendants *si* $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$. *Une famille* $(A_1, \ldots, A_n)$ *est* mutuellement indépendante *si pour toute sous-famille* $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}\}$ *:*

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

1.1.5 Probabilité conditionnelle

Définition 1.1.4 (Probabilité conditionnelle [3]). *Pour $B \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(B) > 0$:*

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \tag{1.2}$$

Remarque 1.1.2. Pour B fixé avec $\mathbb{P}(B) > 0$, l'application $A \mapsto \mathbb{P}(A \mid B)$ est elle-même une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$, à laquelle s'appliquent toutes les propriétés précédentes. Voir [3].

Théorème 1.1.1 (Probabilités totales [3]). *Si $(B_i)_{i=1}^n$ est une partition de Ω avec $\mathbb{P}(B_i) > 0$, alors pour tout $A \in \mathcal{F}$:*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid B_i)\, \mathbb{P}(B_i). \tag{1.3}$$

Théorème 1.1.2 (Formule de Bayes [3]). *Dans les mêmes conditions, pour $j \in \{1, \ldots, n\}$ avec $\mathbb{P}(A) > 0$:*

$$\mathbb{P}(B_j \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B_j)\, \mathbb{P}(B_j)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid B_i)\, \mathbb{P}(B_i)}. \tag{1.4}$$

1.1.6 Variables aléatoires

Définition 1.1.5 (Variable aléatoire réelle [9]). *Une* variable aléatoire réelle *est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant :*

$$\forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad X^{-1}(B) \in \mathcal{F}.$$

Définition 1.1.6 (Fonction de répartition [3]).

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

croissante, continue à droite, avec $F_X(-\infty) = 0$ et $F_X(+\infty) = 1$.

Définition 1.1.7 (Densité de probabilité [3]). *X est* à densité *s'il existe $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ telle que :*

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\, du, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)\, du = 1. \tag{1.6}$$

1.1.7 Espérance et variance

Définition 1.1.8 (Espérance [3]). *Pour X à densité f_X, sous réserve de convergence absolue :*

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} u\, f_X(u)\, du. \tag{1.7}$$

Propriété 1.1.2 ([3]). *Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et X, Y d'espérance finie :*

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\,\mathbb{E}[X] + b\,\mathbb{E}[Y]. \tag{1.8}$$

Si X et Y sont indépendantes : $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$.

Définition 1.1.9 (Variance [3]).

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])^2\big] = \mathbb{E}[X^2] - \big(\mathbb{E}[X]\big)^2. \tag{1.9}$$

1.1.8 Inégalité de Markov

Théorème 1.1.3 (Inégalité de Markov [3]). *Pour $X \geq 0$ d'espérance finie et $a > 0$:*

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}. \tag{1.10}$$

Remarque 1.1.3. Dans les chapitres suivants, cette inégalité intervient conjointement avec (1.27) pour contrôler les moments des solutions des équations d'état. Voir [3, 14].

1.1.9 Convergence de variables aléatoires

Deux notions de convergence seront utilisées dans la suite [3, 13].

Définition 1.1.10 ([3]). *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires.*

1. ***Convergence p.s. :*** $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X \iff \mathbb{P}(\lim_n X_n = X) = 1.$
2. ***Convergence en probabilité :*** $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \iff \forall\, \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0.$

La convergence p.s. implique la convergence en probabilité ; la réciproque est fausse en général.

Remarque 1.1.4. La convergence en loi, utilisée dans l'énoncé du théorème central limite, n'interviendra pas directement dans ce mémoire. Pour une présentation complète, voir [3, 13].

1.2 Processus stochastiques

Un système physique, financier ou biologique soumis à des perturbations aléatoires ne se résume pas à une variable aléatoire isolée : son état change à chaque instant, et c'est cette évolution temporelle qu'il faut modéliser. La notion de processus stochastique répond à ce besoin [9, 11].

1.2.1 Définition générale

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $T > 0$ un horizon temporel fini. Un *processus stochastique* à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est une famille indexée par le temps :

$$X = (X_t)_{t\in[0,T]},$$

où chaque X_t est une variable aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Pour $\omega \in \Omega$ fixé, l'application $t \mapsto X_t(\omega)$ est la *trajectoire* du processus associée à l'issue ω ; elle décrit l'évolution du système le long d'un scénario particulier.

1.2.2 Filtration et processus adaptés

Définition 1.2.1 (Filtration [9])**.** *Une* filtration *sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est une famille croissante de sous-tribus* $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ *satisfaisant :*

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, \quad \forall\, 0 \le s \le t \le T. \tag{1.11}$$

On suppose qu'elle vérifie les conditions habituelles *: complétude et continuité à droite* ($\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$)*. Le quadruplet* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ *est un* espace probabilisé filtré.

Remarque 1.2.1. La filtration $(\mathcal{F}_t)$ représente l'information cumulée jusqu'au temps t. Les conditions habituelles sont des hypothèses techniques standard qui garantissent la régularité des trajectoires des martingales et la bonne définition des temps d'arrêt. Voir [9, 13].

Définition 1.2.2 (Processus adapté [9])**.** *Un processus* $(X_t)_{t\in[0,T]}$ *est* adapté *à* $(\mathcal{F}_t)$ *si* X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable pour tout* $t \in [0,T]$ *: la valeur de* X_t *ne dépend que des informations disponibles jusqu'au temps* t*.*

Remarque 1.2.2. L'adaptabilité est la traduction mathématique de la *non-anticipation*. Dans un problème de contrôle, le décideur ne connaît que le passé et le présent, jamais le futur. Voir [14, 1].

Définition 1.2.3 (Temps d'arrêt [9])**.** *Une variable aléatoire* $\tau : \Omega \to [0,T] \cup \{+\infty\}$ *est*

un temps d'arrêt *par rapport à* $(\mathcal{F}_t)$ *si :*

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Remarque 1.2.3. Un temps d'arrêt modélise un instant de décision ou d'observation qui ne nécessite pas de connaître le futur pour être déterminé : par exemple, le premier instant où le processus d'état dépasse un seuil fixé à l'avance. Voir [9, 13].

1.2.3 Martingales

Les martingales sont au cœur du calcul stochastique moderne. Elles interviendront directement dans les propriétés de l'intégrale d'Itô et dans la structure des équations adjointes [13, 9].

Définition 1.2.4 (Martingale [13])**.** *Un processus* $(M_t)_{t\in[0,T]}$*, adapté à* $(\mathcal{F}_t)$ *avec* $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$ *pour tout t, est une* martingale *si :*

$$\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s, \quad \forall\, 0 \leq s \leq t \leq T. \tag{1.12}$$

Remarque 1.2.4. La condition (1.12) signifie que la meilleure estimation de M_t à partir de l'information $\mathcal{F}_s$ est simplement la valeur courante M_s : il n'y a ni dérive systématique à la hausse ni à la baisse. C'est cette propriété que vérifiera l'intégrale d'Itô, ce qui garantit l'absence de biais dans la dynamique stochastique. Voir [13, 9].

Propriété 1.2.1 (Théorème d'arrêt optionnel [13])**.** *Soit* (M_t) *une martingale uniformément intégrable et* τ *un temps d'arrêt. Alors :*

$$\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0]. \tag{1.13}$$

1.2.4 Espace $L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^d)$

Cet espace joue un rôle central dans tout ce qui suit : c'est dans ce cadre que sont définis les processus adjoints et les intégrandes de l'intégrale d'Itô [9, 14].

Définition 1.2.5 ($L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^d)$ [9, 14])**.** *On désigne par* $L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^d)$ *l'ensemble des pro-*

cessus $\Phi = (\Phi_t)_{t\in[0,T]}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *satisfaisant :*

1. Φ *est adapté à* $(\mathcal{F}_t)$.
2. $$\mathbb{E}\left[\int_0^T |\Phi_t|^2\, dt\right] < \infty. \tag{1.14}$$

Muni du produit scalaire $\langle \Phi, \Psi\rangle = \mathbb{E}\left[\int_0^T \langle \Phi_t, \Psi_t\rangle\, dt\right]$, *cet espace est un espace de Hilbert.*

Remarque 1.2.5. La condition d'adaptabilité est aussi contraignante que celle de carré intégrabilité : un processus $\Phi \in L^2([0,T]\times\Omega)$ mais non adapté ne peut pas servir d'intégrande dans l'intégrale d'Itô, car cela reviendrait à intégrer en utilisant de l'information future. C'est la combinaison des deux conditions qui fait de $L^2_{\mathcal{F}}$ le bon espace de travail. Voir [9, 14].

1.3 Mouvement Brownien

Parmi tous les processus stochastiques, le mouvement brownien occupe une position singulière. C'est lui qui modélise, dans ce mémoire, les perturbations aléatoires continues affectant le système d'état ; c'est aussi lui qui rend nécessaire la construction d'une intégrale stochastique spécifique. Ses propriétés — gaussianité des accroissements, variation quadratique non nulle, propriété de Markov forte — seront toutes exploitées dans les deux chapitres suivants [9, 11].

1.3.1 Définition

Définition 1.3.1 (Mouvement brownien standard [9])**.** *Un processus* $W = (W_t)_{t\geq 0}$ *défini sur un espace probabilisé filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *est un* mouvement brownien standard *s'il satisfait :*

1. $W_0 = 0$ *presque sûrement.*
2. *Les trajectoires* $t \mapsto W_t(\omega)$ *sont continues pour presque tout* $\omega \in \Omega$.

3. ***Accroissements indépendants :*** *pour tout* $0 \le t_1 < \cdots < t_n$*, les variables* W_{t_1}, $W_{t_2} - W_{t_1}$, $\ldots$, $W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ *sont indépendantes.*

4. ***Accroissements gaussiens stationnaires :*** *pour* $0 \le s < t$*,*

$$W_t - W_s \;\sim\; \mathcal{N}(0,\, t-s). \tag{1.15}$$

Remarque 1.3.1. La propriété (1.15) donne en particulier, pour tout $t \ge 0$:

$$\mathbb{E}[W_t] = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}(W_t) = t. \tag{1.16}$$

La variance croît linéairement en t : plus le temps avance, plus les fluctuations s'amplifient, ce que reflète l'enveloppe $\pm\sqrt{t}$ sur la figure 1.1. Voir [9, 3].

1.3.2 Mouvement brownien d-dimensionnel

Dans les chapitres suivants, l'équation d'état est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et le coefficient de diffusion prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^{n\times d}$. Il est donc nécessaire de disposer d'un mouvement brownien d-dimensionnel [9, 14].

Définition 1.3.2 (Mouvement brownien d-dimensionnel [9])**.** *Un processus* $W = (W_t)_{t\ge 0}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *est un* mouvement brownien standard d-dimensionnel *si ses composantes* $W^1, \ldots, W^d$ *sont des mouvements browniens réels mutuellement indépendants. Sa matrice de covariance vérifie :*

$$\mathbb{E}\big[(W_t - W_s)(W_t - W_s)^\top\big] = (t-s)\, I_d, \quad 0 \le s \le t. \tag{1.17}$$

Remarque 1.3.2. Dans l'équation d'état $dX_t = b(t, X_t, \mathcal{L}_{X_t}, u_t)\, dt + \sigma(t, X_t, \mathcal{L}_{X_t}, u_t)\, dW_t$, le produit $\sigma\, dW_t$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ grâce à la structure matricielle $\sigma \in \mathbb{R}^{n\times d}$ et $W \in \mathbb{R}^d$. Voir [9, 14, 15].

1.3.3 Propriétés fondamentales

Propriété 1.3.1 (Propriété de martingale [9]). *$(W_t)_{t\geq 0}$ est une martingale par rapport à sa filtration naturelle $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s,\, 0 \leq s \leq t)$:*

$$\mathbb{E}[W_t \mid \mathcal{F}_s^W] = W_s, \quad 0 \leq s \leq t. \tag{1.18}$$

De plus, le processus $(W_t^2 - t)_{t\geq 0}$ est également une martingale.

Propriété 1.3.2 (Variation quadratique [13]). *Pour toute suite de subdivisions $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ dont le pas tend vers zéro :*

$$\sum_{k=0}^{n-1} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 \xrightarrow{L^2} t. \tag{1.19}$$

On note $\langle W \rangle_t = t$, résumé par la convention : $(dW_t)^2 = dt$.

Remarque 1.3.3. C'est ici que le calcul stochastique se sépare du calcul classique. En analyse ordinaire, les variations au carré sont d'ordre $(\Delta t)^2$, donc négligeables à la limite ; ici, elles sont d'ordre Δt et contribuent à la limite. Cette non-nullité de la variation quadratique est précisément à l'origine du terme correctif $\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, dt$ dans la formule d'Itô. Voir [13, 9].

Propriété 1.3.3 (Fonction de covariance [3, 9]). *Pour tous $s, t \geq 0$:*

$$\mathbb{E}[W_s\, W_t] = \min(s, t). \tag{1.20}$$

Ce résultat découle de l'indépendance des accroissements et de $\mathrm{Var}(W_t) = t$.

Propriété 1.3.4 (Non-dérivabilité des trajectoires [9]).

$$\mathbb{P}(\exists\, t \in [0, T],\ W \text{ est dérivable en } t) = 0. \tag{1.21}$$

Remarque 1.3.4. La non-dérivabilité des trajectoires, jointe à leur variation totale infinie sur tout intervalle, rend impossible toute intégration au sens de Riemann–Stieltjes par rapport à W. C'est ce constat qui motive la construction de l'intégrale d'Itô à la section suivante. Voir [9, 11].

1.3.4 Propriété de Markov

Propriété 1.3.5 (Propriété de Markov forte [9, 13])**.** *Soit τ un temps d'arrêt p.s. fini. Le processus $\widetilde{W}_t = W_{\tau+t} - W_\tau$ est un mouvement brownien standard, indépendant de $\mathcal{F}_\tau^W$. En particulier, pour toute fonction borélienne bornée φ et $0 \le s \le t$:*

$$\mathbb{E}\big[\varphi(W_t) \mid \mathcal{F}_s^W\big] = \mathbb{E}\big[\varphi(W_t) \mid W_s\big]. \tag{1.22}$$

Remarque 1.3.5. Cette propriété signifie que toute l'histoire passée du processus devient superflue dès qu'on connaît sa valeur présente : seul W_s compte pour prédire le futur, et non la trajectoire entière $(W_r)_{r\le s}$. Dans le cadre du contrôle stochastique de type Mean-field, elle garantit que les équations adjointes restent bien posées et que les conditions nécessaires d'optimalité peuvent être formulées de façon causale [14, 1].

1.3.5 Représentation graphique

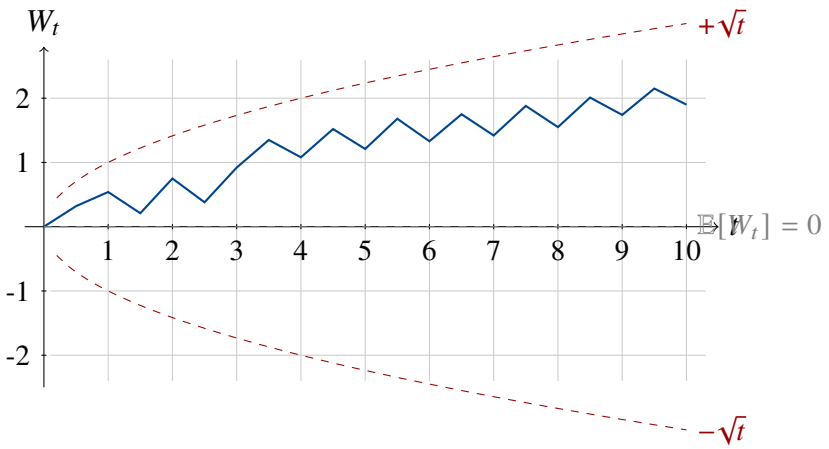

FIG. 1.1 : Trajectoire simulée d'un mouvement brownien standard. Les courbes en pointillés représentent l'enveloppe $\pm\sqrt{t}$, qui reflète l'écart-type des fluctuations.

1.4 Intégrale stochastique et formule d'Itô

Les trajectoires du mouvement brownien sont continues mais de variation totale infinie sur tout intervalle, ce qui interdit toute intégration au sens de Riemann–Stieltjes. Donner

un sens à des expressions du type $\int_0^t \Phi_s \, dW_s$ exige donc une construction spécifique, due à Itô, dont les propriétés diffèrent profondément de celles du calcul différentiel ordinaire [9, 11].

1.4.1 Intégrale d'Itô

Définition 1.4.1 (Intégrale d'Itô [9])**.** *Soit* $\Phi \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R})$. *L'*intégrale d'Itô *de* Φ *par rapport à* W *est le processus :*

$$I_t(\Phi) = \int_0^t \Phi_s \, dW_s, \tag{1.23}$$

défini comme la limite en moyenne quadratique des sommes de Riemann–Itô associées à des processus en escalier adaptés qui approchent Φ *dans* $L^2_{\mathcal{F}}$.

Propriété 1.4.1 ([9])**.**

1. ***Linéarité :*** *pour* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *et* $\Phi, \Psi \in L^2_{\mathcal{F}}$ *:*

$$\int_0^t (\alpha\Phi_s + \beta\Psi_s) \, dW_s = \alpha \int_0^t \Phi_s \, dW_s + \beta \int_0^t \Psi_s \, dW_s. \tag{1.24}$$

2. ***Propriété de martingale :*** $(I_t(\Phi))_{t\in[0,T]}$ *est une martingale de carré intégrable par rapport à* $(\mathcal{F}_t)$. *En particulier :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \Phi_s \, dW_s\right] = 0. \tag{1.25}$$

3. ***Isométrie d'Itô :***

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \Phi_s \, dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \Phi_s^2 \, ds\right]. \tag{1.26}$$

Remarque 1.4.1. La propriété de martingale (1.25) est fondamentale en contrôle stochastique : elle garantit que l'intégrale stochastique ne crée aucune dérive systématique dans la dynamique. Toute la dérive est portée par le terme en dt, ce qui permet de séparer les effets déterministes des effets aléatoires. Voir [9, 11].

Propriété 1.4.2 (Inégalité de Burkholder–Davis–Gundy [13])**.** *Il existe des constantes uni-*

verselles $c_p, C_p > 0$ *telles que, pour tout* $p \geq 1$ *et tout* $\Phi \in L^2_{\mathcal{F}}$ *:*

$$c_p \, \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \Phi_s^2 \, ds\right)^{p/2}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|\int_0^t \Phi_s \, dW_s\right|^p\right] \leq C_p \, \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \Phi_s^2 \, ds\right)^{p/2}\right]. \tag{1.27}$$

Remarque 1.4.2. L'inégalité (1.27) contrôle le supremum de l'intégrale stochastique par ses moments d'ordre p. Elle sera utilisée aux chapitres suivants pour établir les estimations d'intégrabilité des solutions des équations d'état et des processus adjoints. Voir [13, 14, 1].

1.4.2 Intégrale d'Itô multidimensionnelle

Pour $\Phi \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^{n\times d})$ et $W \in \mathbb{R}^d$, l'intégrale est définie composante par composante [9, 14] :

$$\left(\int_0^t \Phi_s \, dW_s\right)_i = \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \Phi_s^{ij} \, dW_s^j, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.28}$$

L'isométrie prend la forme matricielle :

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \Phi_s \, dW_s\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \|\Phi_s\|_F^2 \, ds\right], \tag{1.29}$$

où $\|\cdot\|_F$ désigne la norme de Frobenius.

1.4.3 Formule d'Itô

Définition 1.4.2 (Processus d'Itô [9])**.** *Un processus* $(X_t)_{t\in[0,T]}$ *est un* processus d'Itô *s'il admet la représentation :*

$$dX_t = b_t \, dt + \sigma_t \, dW_t, \tag{1.30}$$

où $b \in L^1_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R})$ *et* $\sigma \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R})$.

Remarque 1.4.3. Dans les chapitres suivants, les coefficients b et σ seront supposés lipschitziens et à croissance linéaire, conditions qui impliquent en particulier $b \in L^1_{\mathcal{F}}$ et $\sigma \in L^2_{\mathcal{F}}$. Voir [9, 14].

Théorème 1.4.1 (Formule d'Itô, cas unidimensionnel [9, 11])**.** *Soit* X_t *un processus d'Itô*

vérifiant (1.30) *et* $f \in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R})$. *Alors* $f(t,X_t)$ *est un processus d'Itô et :*

$$df(t,X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + b_t\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma_t^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(t,X_t)\,dt + \sigma_t\frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)\,dW_t. \tag{1.31}$$

Remarque 1.4.4. Le terme $\frac{1}{2}\sigma_t^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ est la signature du calcul stochastique : absent en calcul ordinaire, il provient directement de la relation $(dW_t)^2 = dt$. C'est lui qui interviendra dans la dérivation du Hamiltonien et des conditions nécessaires d'optimalité aux chapitres suivants. Voir [9, 11].

Théorème 1.4.2 (Formule d'Itô, cas multidimensionnel [9, 14])**.** *Pour* $X_t \in \mathbb{R}^n$ *vérifiant* $dX_t = b_t\,dt + \sigma_t\,dW_t$ *avec* $b_t \in \mathbb{R}^n$, $\sigma_t \in \mathbb{R}^{n\times d}$, $W_t \in \mathbb{R}^d$, *et pour* $f \in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ *:*

$$\begin{aligned} df(t,X_t) = &\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n b_t^i\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n (\sigma_t\sigma_t^\top)_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)(t,X_t)\,dt \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,X_t)\big(\sigma_t\,dW_t\big)_i. \end{aligned} \tag{1.32}$$

1.4.4 Équations différentielles stochastiques rétrogrades

Les équations adjointes du principe du maximum stochastique — aussi bien dans le cas classique que dans le cas Mean-field — sont des EDSR. Nous en rappelons ici le cadre essentiel [4, 14, 1].

Définition 1.4.3 (EDSR [14])**.** *Soient* $\xi \in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,\mathbb{P})$ *une condition terminale et* $g : [0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *un générateur mesurable. Une* équation différentielle stochastique rétrograde *(EDSR) est :*

$$-dY_t = g(t,Y_t,Z_t)\,dt - Z_t\,dW_t, \quad Y_T = \xi, \tag{1.33}$$

dont la forme intégrale équivalente est :

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(s,Y_s,Z_s)\,ds - \int_t^T Z_s\,dW_s, \quad t\in[0,T]. \tag{1.34}$$

Une solution est un couple de processus adaptés $(Y_t,Z_t) \in L^2_{\mathcal{F}}\times L^2_{\mathcal{F}}$.

Remarque 1.4.5. Le processus Z_t n'est pas accessoire : sans lui, la solution ne pourrait pas rester adaptée à $(\mathcal{F}_t)$ tout en satisfaisant la condition terminale aléatoire ξ. C'est précisément le rôle de Z_t que d'ajuster la trajectoire de Y pour absorber l'aléa introduit par ξ. Voir [14, 4].

Théorème 1.4.3 (Existence et unicité [14])**.** *Supposons que g soit lipschitzien en (y, z) uniformément en t, et que $\mathbb{E}\left[\int_0^T |g(t,0,0)|^2\, dt\right] < \infty$. Alors, pour tout $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$, l'EDSR* (1.33) *admet une unique solution $(Y_t, Z_t) \in L^2_{\mathcal{F}} \times L^2_{\mathcal{F}}$.*

Chapitre 2

Principe de maximum stochastique dans le cas régulier

2.1 Présentation du problème

Le problème de contrôle stochastique dans le cas régulier consiste à déterminer, parmi tous les processus de contrôle admissibles, celui qui minimise une fonctionnelle de coût donnée sous la contrainte d'une équation différentielle stochastique dont les coefficients dépendent de l'état courant et du contrôle, mais non de la loi du processus. Ce cadre classique, dont les fondements remontent aux travaux de Pontryagin et al. dans le cas déterministe, puis à leur extension stochastique par Bismut et Peng, constitue le socle sur lequel repose l'analyse développée dans ce chapitre [4, 12, 1].

2.1.1 Équation d'état

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré complet vérifiant les conditions habituelles de complétude et de continuité à droite. Soit $W = (W_t)_{0\leq t\leq T}$ un mouvement brownien standard d-dimensionnel défini sur cet espace [9, 13]. L'équation d'état régissant la dynamique du système contrôlé est :

$$\begin{cases} dX_t = b(t,\, X_t,\, u_t)\, dt + \sigma(t,\, X_t,\, u_t)\, dW_t, \\ X_0 = x_0 \ \in \ \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $X_t \in \mathbb{R}^n$ est le processus d'état, $u_t \in \mathcal{U}_{ad}$ est le processus de contrôle, $b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ est le coefficient de dérive et $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^{n \times d}$ est le coefficient de diffusion. Dans ce cadre classique, b et σ ne dépendent pas de la loi du processus ; c'est précisément cette hypothèse qui distingue le présent chapitre du cadre champ moyen développé au chapitre suivant [15, 11].

Hypothèse 2.1.1. (Lipschitz global et croissance quadratique) *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $t \in [0,T]$, tout $u \in U$ et pour tous x, $x' \in \mathbb{R}^n$:*

$$\big|b(t,x,u) - b(t,x',u)\big| + \big|\sigma(t,x,u) - \sigma(t,x',u)\big| \leq C\,|x - x'|, \tag{2.2}$$

$$\big|b(t,x,u)\big|^2 + \big|\sigma(t,x,u)\big|^2 \leq C^2\big(1 + |x|^2\big). \tag{2.3}$$

De plus, b et σ sont continûment différentiables par rapport à (x,u), à dérivées partielles continues et uniformément bornées en t.

Hypothèse 2.1.2. (Régularité C^1 et bornitude des dérivées) *Les fonctions b, σ, f et h sont continûment différentiables par rapport à (x,u), avec des dérivées partielles premières continues et uniformément bornées en t. Il existe $L_2 > 0$ tel que :*

$$\big|\partial_x b\big| + \big|\partial_u b\big| + \big|\partial_x \sigma\big| + \big|\partial_u \sigma\big| + \big|\partial_x f\big| + \big|\partial_u f\big| + \big|\partial_x h\big| \;\leq\; L_2,$$

uniformément en $(t,x,u) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U$.

Sous les Hypothèses 2.1.1 et 2.1.2, l'équation (2.1) admet, pour tout contrôle $u \in \mathcal{U}_{ad}$, une unique solution forte $X \in \mathcal{S}^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^n)$. De plus, pour tout entier $k \geq 2$, il existe une constante $C_k > 0$, indépendante du contrôle u, telle que :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^k\right] \leq C_k\big(1 + |x_0|^k\big). \tag{2.4}$$

Cette estimation s'obtient par application de l'inégalité de Doob au martingale local issu de l'intégrale stochastique, combinée au lemme de Gronwall appliqué à la fonction $t \mapsto \mathbb{E}[\sup_{s \leq t} |X_s|^k]$. Elle garantit en particulier la finitude de la fonctionnelle de coût définie à la section suivante [11, 9, 1].

2.1.2 Ensemble des contrôles admissibles

Soit $U \subset \mathbb{R}^k$ un convexe fermé non vide représentant le domaine des valeurs accessibles au contrôle. L'ensemble des contrôles admissibles est défini par :

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ u : [0,T] \times \Omega \to U \;\middle|\; u \text{ est } (\mathcal{F}_t)\text{-adapté}, \quad \mathbb{E}\int_0^T |u_t|^2 \, dt < +\infty \right\}. \tag{2.5}$$

La convexité de U est une hypothèse structurelle déterminante dans l'approche du cas régulier : pour tout $v \in \mathcal{U}_{ad}$ et tout $\varepsilon \in (0,1)$, la perturbation convexe $u_t^\varepsilon = u_t^* + \varepsilon(v_t - u_t^*)$ reste dans U, ce qui rend licite le calcul variationnel directionnel menant au principe du maximum [14, 1].

2.1.3 Fonctionnelle de coût

La performance d'un contrôle $u \in \mathcal{U}_{ad}$ est mesurée par la fonctionnelle :

$$J(u) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t,\, X_t,\, u_t)\, dt \;+\; h(X_T) \right], \tag{2.6}$$

où le lagrangien $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$ et le coût terminal $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont supposés continûment différentiables par rapport à x, à dérivées bornées, et vérifient une condition de croissance polynomiale compatible avec l'Hypothèse 2.1.1. La finitude de $J(u)$ est garantie par l'estimation (2.4) [14, 11].

Définition 2.1.1 (Contrôle optimal)**.** *Un contrôle $u^* \in \mathcal{U}_{ad}$, auquel est associée la trajectoire X^* solution de* (2.1)*, est dit* optimal *pour le problème* (2.6) *s'il vérifie :*

$$J(u^*) = \inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}} J(u). \tag{2.7}$$

Synthèse

Le cadre posé dans cette section — équation d'état (2.1) à coefficients Lipschitz sans dépendance en loi, ensemble de contrôles convexe $\mathcal{U}_{ad}$ (2.5), et fonctionnelle de coût (2.6) dépendant du seul état courant — constitue le point de départ de l'étude du principe du

maximum stochastique dans le cas régulier. Les sections suivantes introduiront le Hamiltonien et le système adjoint nécessaires à la caractérisation du contrôle optimal u^*.

2.2 Résultats préliminaires et hypothèses

Avant d'aborder la dérivation des conditions nécessaires d'optimalité, il convient de préciser le cadre analytique dans lequel s'inscrit le problème de contrôle classique. Les hypothèses de régularité sur les coefficients b, σ, f et h, introduites à la Section 2.1, constituent le socle sur lequel reposent l'existence et l'unicité de la solution forte ainsi que la validité du développement variationnel [1, 14].

2.2.1 Rappel des hypothèses de régularité

Les deux hypothèses structurelles du problème, énoncées à la Section 2.1, fournissent respectivement le caractère bien posé de l'équation d'état et la régularité différentielle requise par le calcul variationnel. L'Hypothèse 2.1.1 assure, par l'argument classique d'itération de Picard, l'existence et l'unicité de la solution forte dans $\mathcal{S}^2_{\mathcal{F}}$. L'Hypothèse 2.1.2 fournit la régularité C^1 en (x, u), indispensable à la linéarisation de (2.1) et à l'expression explicite du générateur du système adjoint [15, 11].

2.2.2 Existence, unicité et estimations de moments

Proposition 2.2.1. *Sous les Hypothèses 2.1.1 et 2.1.2, pour tout contrôle admissible $u \in \mathcal{U}_{ad}$, l'équation d'état* (2.1) *admet une unique solution forte $X \in \mathcal{S}^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^n)$. De plus, pour tout entier $k \geq 2$, il existe une constante $C_k > 0$, indépendante de u, telle que :*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^k\right] \leq C_k\big(1 + |x_0|^k\big). \tag{2.8}$$

Démonstration. L'existence et l'unicité découlent de l'argument classique d'itération de Picard : la condition de Lipschitz (2.2) assure la contraction dans $\mathcal{S}^2_{\mathcal{F}}$, tandis que la condition de croissance (2.3) garantit que les itérés restent dans cet espace. Pour l'estimation

(2.8), on applique la formule d'Itô à $|X_t|^k$:

$$d|X_t|^k = k|X_t|^{k-2}\langle X_t,\, b\,dt + \sigma\,dW_t\rangle + \tfrac{k(k-1)}{2}|X_t|^{k-2}|\sigma|^2\,dt.$$

En prenant l'espérance, en majorant par (2.3) et en appliquant le lemme de Gronwall à $t \mapsto \mathbb{E}[|X_t|^k]$, on obtient une borne de la forme $C_k(1 + |x_0|^k)$. L'inégalité de Doob permet ensuite de passer du supremum temporel à l'espérance du supremum [9, 13, 11]. ∎

L'estimation (2.8) remplit deux fonctions dans la suite : elle garantit la finitude de la fonctionnelle de coût $J(u)$ définie en (2.6) ; et elle fonde la légitimité du passage à la limite dans le développement variationnel menant au principe du maximum. La constante C_k étant indépendante de u, ces estimations s'appliquent uniformément sur $\mathcal{U}_{ad}$ [1, 14, 11].

Synthèse

Les hypothèses de régularité (2.1.1) et (2.1.2) et le résultat d'existence-unicité de la Proposition 2.2.1 constituent le socle analytique du chapitre. Ils préparent directement l'introduction du Hamiltonien et du système adjoint dans la section suivante.

2.3 Hamiltonien et principe du maximum stochastique

L'établissement des conditions nécessaires d'optimalité dans le cas régulier repose sur deux outils indissociables : le Hamiltonien, qui encode la dynamique du système et le critère de performance, et le système adjoint, dont la solution fournit les processus co-état permettant de caractériser le contrôle optimal. Ces outils, introduits dans le cadre stochastique par Bismut puis étendus par Peng, constituent le cœur analytique du principe du maximum stochastique [4, 12, 1].

2.3.1 Hamiltonien

Pour $(t, x, u, p, q) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d}$, le Hamiltonien associé au problème (2.1)–(2.6) est défini par :

$$H(t,x,u,p,q) \;=\; \langle p,\, b(t,x,u)\rangle + \mathrm{Tr}\big(\sigma^\top(t,x,u)\, q\big) + f(t,x,u). \tag{2.9}$$

Les variables $(p_t)_{t\in[0,T]}$ et $(q_t)_{t\in[0,T]}$ sont les processus co-état, respectivement à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^{n\times d}$, solutions du système adjoint introduit ci-après. Le terme $\langle p, b\rangle$ capture l'effet du contrôle sur la dérive de l'état, le terme $\mathrm{Tr}(\sigma^\top q)$ celui sur la diffusion, et f le coût instantané [14, 12].

Remarque 2.3.1. La convention de signe adoptée ici, avec $+f$ dans (2.9), conduit à une condition d'optimalité sous forme d'inégalité variationnelle portant sur $\partial_u H$, qui est la forme naturelle dans le cas convexe. Elle diffère de la convention $-f$, parfois utilisée pour reformuler le problème comme une maximisation du Hamiltonien dans le cas non convexe [1, 6].

2.3.2 Système adjoint

À la trajectoire optimale X^* associée au contrôle u^*, on adjoint le système rétrograde suivant :

$$\begin{cases} dp_t = -\Big[\partial_x b^\top(t,X_t^*,u_t^*)\, p_t + \partial_x \sigma^\top(t,X_t^*,u_t^*)\, q_t + \partial_x f(t,X_t^*,u_t^*)\Big]dt + q_t\, dW_t, \\ p_T = \partial_x h(X_T^*). \end{cases} \tag{2.10}$$

Le terme $-\partial_x b^\top p_t$ traduit la rétropropagation de la sensibilité de la dérive par rapport à l'état ; le terme $-\partial_x \sigma^\top q_t$ celle de la diffusion ; et $-\partial_x f$ la contribution du coût instantané à la dynamique du co-état. La condition terminale $p_T = \partial_x h(X_T^*)$ relie le processus adjoint au coût terminal et initie l'intégration rétrograde. Sous l'Hypothèse 2.1.2, ce système admet une unique solution adaptée $(p,q) \in \mathcal{S}^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^n) \times L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^{n\times d})$, par la théorie des EDSR linéaires de Pardoux et Peng [1, 14, 9].

2.3.3 Principe du maximum stochastique — cas régulier

Théorème 2.3.1. (Principe du maximum stochastique — cas régulier) *Sous les Hypothèses 2.1.1 et 2.1.2. Soit $u^* \in \mathcal{U}_{ad}$ un contrôle optimal pour le problème* (2.7)*, et soit X^* la solution correspondante de* (2.1)*. Alors il existe un unique couple de processus adaptés $(p, q) \in \mathcal{S}^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^n) \times L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^{n\times d})$, solution du système adjoint* (2.10)*, tel que la condition variationnelle suivante soit satisfaite :*

$$\left\langle \partial_u H(t, X_t^*, u_t^*, p_t, q_t),\ v - u_t^* \right\rangle \ \geq\ 0, \tag{2.11}$$

pour tout $v \in U$, pour presque tout $t \in [0,T]$, $\mathbb{P}$-presque sûrement.

Démonstration.

Étape 1 : Construction de la perturbation admissible. Soit $v \in \mathcal{U}_{ad}$ et $\varepsilon \in (0,1)$. On pose

$$u_t^\varepsilon = u_t^* + \varepsilon(v_t - u_t^*) = (1-\varepsilon)\, u_t^* + \varepsilon\, v_t \in U, \quad t \in [0,T].$$

La convexité de U assure que $u^\varepsilon \in \mathcal{U}_{ad}$. On désigne par X^ε la solution de (2.1) associée à u^ε.

Étape 2 : Processus variationnel. On pose

$$Z_t = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{X_t^\varepsilon - X_t^*}{\varepsilon}.$$

En différentiant formellement (2.1) par rapport à ε, Z_t est solution de l'équation de variation :

$$\begin{cases} dZ_t = \Big[\partial_x b_t\, Z_t + \partial_u b_t\, (v_t - u_t^*)\Big]dt + \Big[\partial_x \sigma_t\, Z_t + \partial_u \sigma_t\, (v_t - u_t^*)\Big]dW_t, \\ Z_0 = 0, \end{cases} \tag{2.12}$$

où on note $\partial_x b_t = \partial_x b(t, X_t^*, u_t^*)$ et de même pour les autres termes.

Étape 3 : Développement de la fonctionnelle. L'optimalité de u^* implique $J(u^\varepsilon) - J(u^*) \geq$

0. Après division par ε et passage à la limite $\varepsilon \to 0^+$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(u^\varepsilon) - J(u^*)}{\varepsilon} \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \Big(\partial_x f_t \, Z_t + \partial_u f_t \, (v_t - u_t^*) \Big) dt + \partial_x h(X_T^*) \, Z_T \right], \end{aligned} \tag{2.13}$$

où $\partial_x f_t = \partial_x f(t, X_t^*, u_t^*)$ et $\partial_u f_t = \partial_u f(t, X_t^*, u_t^*)$.

Étape 4 : Application de la formule d'Itô à $\langle p_t, Z_t \rangle$. On applique la formule d'Itô au produit scalaire $\langle p_t, Z_t \rangle$:

$$d\langle p_t, Z_t \rangle = \langle dp_t, Z_t \rangle + \langle p_t, dZ_t \rangle + \mathrm{Tr}\Big(q_t^\top \left[\partial_x \sigma_t \, Z_t + \partial_u \sigma_t \, (v_t - u_t^*) \right] \Big) \, dt. \tag{2.14}$$

En substituant dp_t depuis (2.10) et dZ_t depuis (2.12) :

$$\begin{aligned} d\langle p_t, Z_t \rangle = \Big[& -\langle \partial_x b_t^\top \, p_t + \partial_x \sigma_t^\top \, q_t + \partial_x f_t, \; Z_t \rangle \\ & + \langle p_t, \; \partial_x b_t \, Z_t + \partial_u b_t \, (v_t - u_t^*) \rangle \\ & + \mathrm{Tr}\big(q_t^\top \, \partial_x \sigma_t \, Z_t \big) + \mathrm{Tr}\big(q_t^\top \, \partial_u \sigma_t \, (v_t - u_t^*) \big) \Big] dt \\ & + \text{martingale locale}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Or, par définition du Hamiltonien (2.9) :

$$\partial_x H_t = \langle p_t, \partial_x b_t \rangle + \mathrm{Tr}\big(q_t^\top \, \partial_x \sigma_t \big) + \partial_x f_t,$$

donc, en utilisant la symétrie du produit scalaire $\langle \partial_x b_t^\top \, p_t, Z_t \rangle = \langle p_t, \partial_x b_t \, Z_t \rangle$ et $\langle \partial_x \sigma_t^\top \, q_t, Z_t \rangle = \mathrm{Tr}(q_t^\top \, \partial_x \sigma_t \, Z_t)$:

$$-\langle \partial_x b_t^\top \, p_t, Z_t \rangle - \langle \partial_x \sigma_t^\top \, q_t, Z_t \rangle - \partial_x f_t \, Z_t + \langle p_t, \partial_x b_t \, Z_t \rangle + \mathrm{Tr}\big(q_t^\top \, \partial_x \sigma_t \, Z_t \big) = -\partial_x f_t \, Z_t.$$

En substituant dans (2.15) :

$$\begin{aligned} d\langle p_t, Z_t \rangle = & \Big[-\partial_x f_t \, Z_t + \langle p_t, \partial_u b_t \, (v_t - u_t^*) \rangle + \mathrm{Tr}\big(q_t^\top \, \partial_u \sigma_t \, (v_t - u_t^*) \big) \Big] dt \\ & + \text{martingale locale}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Étape 5 : Intégration sur $[0,T]$. En intégrant (2.16) sur $[0,T]$ et en prenant l'espérance (les termes de martingale s'annulent, et $Z_0 = 0$) :

$$\mathbb{E}\langle p_T, Z_T\rangle = \mathbb{E}\int_0^T \Big[-\partial_x f_t\, Z_t + \langle p_t, \partial_u b_t\,(v_t - u_t^*)\rangle + \mathrm{Tr}\big(q_t^\top\, \partial_u \sigma_t\,(v_t - u_t^*)\big)\Big]\,dt. \quad (2.17)$$

En utilisant la condition terminale $p_T = \partial_x h(X_T^*)$:

$$\mathbb{E}\langle p_T, Z_T\rangle = \mathbb{E}\big[\partial_x h(X_T^*)\, Z_T\big].$$

En substituant dans (2.13) et en utilisant (2.17), les termes en $\partial_x f_t\, Z_t$ et $\partial_x h(X_T^*)\, Z_T$ se simplifient, et il reste :

$$\begin{aligned} 0 &\le \mathbb{E}\int_0^T \Big[\langle p_t, \partial_u b_t\,(v_t - u_t^*)\rangle + \mathrm{Tr}\big(q_t^\top\, \partial_u \sigma_t\,(v_t - u_t^*)\big) + \partial_u f_t\,(v_t - u_t^*)\Big]\,dt \\ &= \mathbb{E}\int_0^T \big\langle \partial_u H(t, X_t^*, u_t^*, p_t, q_t),\ v_t - u_t^*\big\rangle\,dt, \end{aligned} \quad (2.18)$$

où la dernière égalité découle de la définition $\partial_u H_t = \langle p_t, \partial_u b_t\rangle + \mathrm{Tr}(q_t^\top\, \partial_u \sigma_t) + \partial_u f_t$.

Étape 6 : Passage à la condition ponctuelle. En prenant $v_t = v \cdot \mathbf{1}_{[s,s+\delta]}(t)$ avec $s \in [0,T)$ et $v \in U$ quelconques dans (2.18) :

$$0 \le \frac{1}{\delta}\mathbb{E}\int_s^{s+\delta} \big\langle \partial_u H(t, X_t^*, u_t^*, p_t, q_t),\ v - u_t^*\big\rangle\,dt.$$

En faisant tendre $\delta \to 0$, par le théorème de différentiation de Lebesgue :

$$\big\langle \partial_u H(t, X_t^*, u_t^*, p_t, q_t),\ v - u_t^*\big\rangle \ge 0, \quad \forall\, v \in U,$$

pour p.p. $t \in [0,T]$, $\mathbb{P}$-p.s., ce qui établit (2.11). ∎

Remarque 2.3.2. Lorsque $U = \mathbb{R}^k$, la condition (2.11) se réduit à l'annulation $\partial_u H = 0$. Dans le cas non convexe où U n'est plus supposé convexe, la perturbation spike remplace la perturbation convexe et conduit, sous des hypothèses supplémentaires, à la condition de maximisation du Hamiltonien : $H(t, X_t^*, u_t^*, p_t, q_t) = \sup_{v \in U} H(t, X_t^*, v, p_t, q_t)$. Ce résultat plus fort, dû à Peng, constitue la forme générale du principe du maximum stochastique [12, 7, 15].

Synthèse

Le Théorème 2.3.1 établit la condition nécessaire d'optimalité dans le cas régulier sous la forme de l'inégalité variationnelle (2.11). La structure de la démonstration — perturbation convexe, linéarisation de l'équation d'état, dualité par la formule d'Itô entre l'équation de variation et le système adjoint (2.10) — constitue le schéma canonique du principe du maximum stochastique dans le cas convexe. Ce schéma sera repris et adapté au chapitre suivant pour traiter le cadre champ moyen, où la dépendance en loi introduit des termes supplémentaires dans le système adjoint et dans l'équation de variation [6, 8, 5].

Chapitre 3

Principe de maximum stochastique de type mean-field

3.1 Présentation du problème

Ce chapitre est consacré à l'étude du contrôle optimal pour une classe de systèmes stochastiques dont la dynamique est de type McKean–Vlasov, c'est-à-dire que les coefficients dépendent non seulement de l'état du système mais également de sa loi marginale courante. Cette dépendance traduit une interaction collective entre les agents du système, caractéristique des modèles dits de champ moyen. Nous présentons ci-après, de manière progressive, l'espace probabiliste retenu, l'équation d'état, les hypothèses assurant la bonne définition du modèle, puis la fonctionnelle de coût à minimiser.

3.1.1 Cadre probabiliste

On se place sur un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, muni d'un mouvement brownien standard d-dimensionnel $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$. La filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ désigne la filtration naturelle engendrée par W, augmentée de tous les ensembles $\mathbb{P}$-négligeables de $\mathcal{F}$, de sorte qu'elle satisfait les conditions usuelles de complétude et de continuité à droite [9]. L'horizon temporel $T > 0$ est fini et fixé tout au long de ce travail.

On désigne par $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$ l'espace des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^n$ possédant un moment d'ordre deux fini. Cet espace est muni de la distance de Wasserstein d'ordre deux,

définie pour $\mu, \mu' \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$ par

$$\mathcal{W}_2(\mu, \mu') = \inf_{\gamma \in \Pi(\mu,\mu')} \left(\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |x - y|^2 \, \gamma(dx, dy) \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.1}$$

où $\Pi(\mu, \mu')$ est l'ensemble de tous les couplages de μ et μ' sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Pour toute variable aléatoire $X \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$, on note $\mathbb{P}_X = \mathcal{L}(X)$ la loi de X sous $\mathbb{P}$, qui appartient à $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$ dès que $\mathbb{E}[|X|^2] < +\infty$.

3.1.2 Équation d'état de type McKean–Vlasov

La dynamique du système contrôlé est décrite par l'équation différentielle stochastique de type McKean–Vlasov :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, \mathbb{P}_{X_t}, u_t)\, dt + \sigma(t, X_t, \mathbb{P}_{X_t}, u_t)\, dW_t, \\ X_0 = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{3.2}$$

où les coefficients de dérive et de diffusion sont des fonctions mesurables :

$$b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n) \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n) \times U \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times d}.$$

Par rapport aux équations différentielles stochastiques classiques, l'argument supplémentaire $\mathbb{P}_{X_t}$ dans b et σ introduit une dépendance de la dynamique vis-à-vis de la distribution statistique du processus à chaque instant t. Une telle structure apparaît naturellement dans la modélisation de populations d'agents en interaction, où le comportement de chaque individu est influencé par l'état moyen de l'ensemble [5, 7]. Le processus $u = (u_t)_{0 \le t \le T}$, à valeurs dans un ensemble convexe, fermé et non vide $U \subset \mathbb{R}^m$, représente l'action de contrôle exercée sur le système. L'ensemble des contrôles admissibles est défini par

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ u : [0, T] \times \Omega \to U \;\middle|\; u \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^m),\ u_t \in U \text{ p.p.} \right\}. \tag{3.3}$$

La convexité de U est au cœur de la méthode de perturbation utilisée dans ce chapitre.

En effet, pour tout $\bar{u} \in \mathcal{U}_{ad}$, tout $v \in \mathcal{U}_{ad}$ et tout $\varepsilon \in (0,1]$, la combinaison

$$u_t^\varepsilon = (1-\varepsilon)\bar{u}_t + \varepsilon v_t$$

appartient encore à $\mathcal{U}_{ad}$ [14, 2].

Proposition 3.1.1. *Sous l'Hypothèse 3.1.1, pour tout contrôle $u \in \mathcal{U}_{ad}$ et toute condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$, l'équation* (3.2) *admet une unique solution forte $X^u \in \mathcal{S}^2([0,T];\mathbb{R}^n)$ au sens des équations de McKean–Vlasov. De plus, il existe une constante $C_T > 0$ telle que*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |X_t^u|^2\right] \leq C_T\left(1 + |x_0|^2 + \mathbb{E}\int_0^T |u_t|^2\,dt\right). \tag{3.4}$$

Démonstration. Voir [5, 2, 7, 6]. ∎

3.1.3 Hypothèses de régularité

Les résultats de différentiabilité établis dans la suite reposent sur la série d'hypothèses ci-après.

Hypothèse 3.1.1. *Il existe une constante $C > 0$, indépendante de $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$ et $u \in U$, telle que :*

(H1) Condition de Lipschitz. *Pour tous $x, x' \in \mathbb{R}^n$ et $\mu, \mu' \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$:*

$$|b(t,x,\mu,u) - b(t,x',\mu',u)| + |\sigma(t,x,\mu,u) - \sigma(t,x',\mu',u)| \leq C\big(|x-x'| + \mathcal{W}_2(\mu,\mu')\big). \tag{3.5}$$

(H2) Croissance linéaire. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$:*

$$|b(t,x,\mu,u)| + |\sigma(t,x,\mu,u)| \leq C\left(1 + |x| + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |y|^2\,\mu(dy)\right)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{3.6}$$

Hypothèse 3.1.2. ***(H3) Différentiabilité au sens de Lions.*** *Les fonctions b, σ, f et h sont de classe C^1 par rapport à $x \in \mathbb{R}^n$. Elles admettent de plus une dérivée par rapport à $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$ au sens de Lions [10], notée $\partial_\mu \varphi(t,x,\mu,u)(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, supposée continue,*

bornée et lipschitzienne en (x, μ)*, uniformément en* (t, u).

Remarque 3.1.1. La dérivée par rapport à une mesure de probabilité au sens de Lions [10] constitue le cadre naturel du calcul différentiel sur $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$. Pour une fonction φ vérifiant l'Hypothèse 3.1.2, et pour toute variable aléatoire ξ de loi μ et toute perturbation $\eta \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$, on dispose de la représentation

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varphi(t, x, \mathcal{L}(\xi + \varepsilon\eta), u) - \varphi(t, x, \mathcal{L}(\xi), u)}{\varepsilon} = \mathbb{E}\big[\partial_\mu \varphi(t, x, \mu, u)(\xi) \cdot \eta\big]. \tag{3.7}$$

Cette formule jouera un rôle central dans la dérivation de l'équation adjointe et dans l'écriture des conditions nécessaires d'optimalité établies aux sections suivantes.

3.1.4 Fonctionnelle de coût et problème d'optimisation

À tout contrôle $u \in \mathcal{U}_{ad}$, on associe la fonctionnelle de coût

$$J(u) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, X_t^u, \mathbb{P}_{X_t^u}, u_t)\, dt + h\Big(X_T^u, \mathbb{P}_{X_T^u}\Big)\right], \tag{3.8}$$

où $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n) \times U \to \mathbb{R}$ représente le coût courant accumulé le long de la trajectoire, et $h : \mathbb{R}^n \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ est le coût terminal évalué à l'instant final T. Ces deux fonctions sont supposées vérifier les Hypothèses 3.1.1 et 3.1.2.

Définition 3.1.1. *Un contrôle* $\bar{u} \in \mathcal{U}_{ad}$ *est dit* optimal *s'il réalise l'infimum de la fonctionnelle* J *sur* $\mathcal{U}_{ad}$ *:*

$$J(\bar{u}) = \inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}} J(u). \tag{3.9}$$

La solution $\bar{X}$ *de* (3.2) *associée à* $\bar{u}$ *est appelée* état optimal.

Notons que la question de l'existence d'un tel contrôle optimal nécessite en général des hypothèses supplémentaires de compacité ou de semicontinuité sur la fonctionnelle J, qui sortent du cadre de cette étude. Nous nous concentrons ici sur les *conditions nécessaires* d'optimalité, et renvoyons à [14] et [15] pour les résultats d'existence.

3.2 Les équations adjointes

Toute démonstration d'un principe du maximum stochastique s'appuie sur un système adjoint dont le rôle est de coder, sous forme de processus stochastiques, la sensibilité du coût vis-à-vis des perturbations de la trajectoire optimale. Dans le cadre mean-field qui nous occupe, cette construction se complique du fait que les coefficients b, σ et f dépendent de la loi marginale $\mathbb{P}_{\bar{X}_t}$. Il en résulte, dans l'équation adjointe, des termes supplémentaires faisant intervenir les dérivées de Lions $\partial_\mu b$, $\partial_\mu \sigma$ et $\partial_\mu f$, évalués sur une copie indépendante du système [5, 2, 7].

3.2.1 Le Hamiltonien de type mean-field

Pour formuler les conditions d'optimalité de façon concise, il est commode de regrouper les termes de la fonctionnelle de coût et de la dynamique en un seul objet.

Définition 3.2.1. *Le* Hamiltonien de type mean-field *associé au problème* (3.2)–(3.8) *est la fonction*

$$\mathcal{H} : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n) \times U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d} \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$\mathcal{H}(t,x,\mu,u,p,q) = \langle p,\, b(t,x,\mu,u)\rangle + \operatorname{tr}\big(\sigma^\top(t,x,\mu,u)\, q\big) + f(t,x,\mu,u), \tag{3.10}$$

où $p \in \mathbb{R}^n$ désigne la variable adjointe primale et $q \in \mathbb{R}^{n\times d}$ la variable adjointe de diffusion.

Remarque 3.2.1. La convention de signe retenue dans (3.10) est celle du problème de *minimisation* : le coût courant f apparaît avec un signe positif. Certains auteurs posent $\mathcal{H} = \langle p, b\rangle + \operatorname{tr}(\sigma^\top q) - f$ lorsqu'ils traitent un problème de maximisation [12] ; notre choix suit la présentation adoptée dans [14] et [7], et sera maintenu de façon cohérente dans tout ce chapitre.

3.2.2 Copie indépendante et notation

La dépendance des coefficients vis-à-vis de la loi $\mathbb{P}_{\bar{X}_t}$ oblige à introduire un dispositif probabiliste supplémentaire pour donner un sens rigoureux aux termes de dérivée par rapport à une mesure qui apparaissent dans l'équation adjointe.

On se donne un espace de probabilité complet auxiliaire $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$, supposé indépendant de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Sur ce second espace, on définit des processus $(\tilde{X}, \tilde{u}, \tilde{p}, \tilde{q})$ ayant exactement la même loi jointe que $(\bar{X}, \bar{u}, \bar{p}, \bar{q})$ sur l'espace original. On note $\tilde{\mathbb{E}}[\,\cdot\,]$ l'espérance sous $\tilde{\mathbb{P}}$. Cette construction par copie indépendante est devenue standard dans l'analyse des systèmes mean-field depuis les travaux fondateurs de [5] ; elle est reprise et généralisée dans [6] et [8] pour des extensions à des contextes stochastiques plus généraux.

3.2.3 L'équation différentielle stochastique rétrograde adjointe

Soient $\bar{u} \in \mathcal{U}_{ad}$ un contrôle optimal et $\bar{X}$ la trajectoire optimale associée, solution de (3.2). On appelle *processus adjoint* l'unique couple $(\bar{p}, \bar{q})$ solution de l'EDSR de type mean-field :

$$\begin{cases} -d\bar{p}_t = \Big[\partial_x \mathcal{H}(t, \bar{X}_t, \mathbb{P}_{\bar{X}_t}, \bar{u}_t, \bar{p}_t, \bar{q}_t) \\ \qquad + \tilde{\mathbb{E}}\big[\partial_\mu \mathcal{H}(t, \tilde{X}_t, \mathbb{P}_{\bar{X}_t}, \tilde{u}_t, \tilde{p}_t, \tilde{q}_t)(\bar{X}_t)\big]\Big] dt - \bar{q}_t\, dW_t, \\ \bar{p}_T = \partial_x h(\bar{X}_T, \mathbb{P}_{\bar{X}_T}) + \tilde{\mathbb{E}}\big[\partial_\mu h(\tilde{X}_T, \mathbb{P}_{\bar{X}_T})(\bar{X}_T)\big]\,. \end{cases} \tag{3.11}$$

Remarque 3.2.2. Deux aspects méritent d'être soulignés dans l'équation (3.11). Le premier tient à sa direction de résolution : la condition au bord étant prescrite à $t = T$, le système se résout à rebours dans le temps, de l'instant final vers l'instant initial, selon le cadre général des EDSR [12, 14]. Le second concerne les termes en $\tilde{\mathbb{E}}$: ceux-ci sont propres au cadre mean-field et mesurent, via les dérivées de Lions $\partial_\mu \mathcal{H}$ et $\partial_\mu h$, l'effet d'une variation de la distribution de $\bar{X}_t$ sur la valeur du coût. Lorsque b, σ, f et h ne dépendent pas de μ, ces termes s'annulent et l'on retrouve l'équation adjointe classique du chapitre précédent [1, 15].

3.2.4 Existence et unicité du processus adjoint

Proposition 3.2.1. *Sous les Hypothèses 3.1.1 et 3.1.2, l'EDSR* (3.11) *admet une unique solution*

$$(\bar{p}, \bar{q}) \in \mathcal{S}^2([0,T];\mathbb{R}^n) \times \mathcal{H}^2([0,T];\mathbb{R}^{n\times d}),$$

où $\mathcal{S}^2([0,T];\mathbb{R}^n)$ *désigne l'espace des processus* $\mathbb{F}$*-adaptés continus vérifiant* $\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} |\bar{p}_t|^2] < +\infty$*, et* $\mathcal{H}^2([0,T];\mathbb{R}^{n\times d})$ *l'espace des processus progressivement mesurables vérifiant* $\mathbb{E}\int_0^T |\bar{q}_t|^2\, dt < +\infty$.

Démonstration. L'équation (3.11) est une EDSR dont le générateur est *linéaire* en $(\bar{p}, \bar{q})$, à coefficients aléatoires bornés en vertu de l'Hypothèse 3.1.2. Les termes en $\tilde{\mathbb{E}}[\cdots]$ sont traités comme des termes sources mesurables et de carré intégrable, déterministes conditionnellement à la loi de $\bar{X}$. On applique le théorème d'existence et d'unicité pour les EDSR à générateur lipschitzien [12], en gérant le couplage via la loi de $\bar{X}$ par un argument de point fixe dans $\mathcal{S}^2 \times \mathcal{H}^2$ [5, 1, 15]. ∎

3.3 Principe du maximum stochastique de type mean-field

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer et de démontrer le résultat principal de ce chapitre. Il s'agit d'un principe du maximum stochastique adapté au cadre mean-field, valable sous une hypothèse de convexité sur l'espace des contrôles admissibles. Par rapport au cas classique traité au chapitre précédent, la nouveauté réside dans la structure de l'équation adjointe et dans la forme du Hamiltonien, qui font toutes deux intervenir les dérivées de Lions par rapport à la loi marginale de l'état [2, 7, 6].

3.3.1 Rappel : le Hamiltonien de type mean-field

Le Hamiltonien utilisé dans cette section est celui introduit à la Définition 3.2.1, que l'on rappelle ici pour la commodité du lecteur :

$$\mathcal{H}(t,x,\mu,u,p,q) = \langle p,\ b(t,x,\mu,u)\rangle + \mathrm{tr}\big(\sigma^\top(t,x,\mu,u)\,q\big) + f(t,x,\mu,u).$$

On renvoie à la Remarque 3.2.1 pour la justification du signe positif devant f, conforme à la convention de minimisation retenue dans ce travail.

3.3.2 Énoncé du principe du maximum

Théorème 3.3.1. *Supposons que les Hypothèses 3.1.1 et 3.1.2 soient satisfaites, et soit $U \subset \mathbb{R}^m$ un convexe fermé non vide. Si $\bar{u} \in \mathcal{U}_{ad}$ est un contrôle optimal pour le problème* (3.8)–(3.9) *et $\bar{X}$ la trajectoire optimale associée, alors le processus adjoint $(\bar{p},\bar{q})$, unique solution de l'EDSR* (3.11)*, satisfait la condition variationnelle suivante : pour presque tout $t \in [0,T]$, $\mathbb{P}$-p.s.,*

$$\Big\langle \partial_u \mathcal{H}(t,\bar{X}_t,\mathbb{P}_{\bar{X}_t},\bar{u}_t,\bar{p}_t,\bar{q}_t),\ v-\bar{u}_t\Big\rangle \geq 0, \quad \forall\, v \in U. \tag{3.12}$$

En particulier, si $u \mapsto \mathcal{H}(t,x,\mu,u,p,q)$ est convexe pour tout (t,x,μ,p,q) fixé, la condition (3.12) *est équivalente à la condition de minimisation*

$$\mathcal{H}(t,\bar{X}_t,\mathbb{P}_{\bar{X}_t},\bar{u}_t,\bar{p}_t,\bar{q}_t) = \min_{v\in U}\mathcal{H}(t,\bar{X}_t,\mathbb{P}_{\bar{X}_t},v,\bar{p}_t,\bar{q}_t), \quad \text{p.p. } t\in[0,T],\ \mathbb{P}\text{-p.s.} \tag{3.13}$$

3.3.3 Démonstration du théorème

Démonstration.

Étape 1 : Construction de la perturbation admissible. Pour $v \in \mathcal{U}_{ad}$ et $\varepsilon \in (0,1]$, on pose

$$u_t^\varepsilon = (1-\varepsilon)\,\bar{u}_t + \varepsilon\, v_t, \quad t\in[0,T].$$

La convexité de U assure que $u_t^\varepsilon \in U$ pour tout t, donc $u^\varepsilon \in \mathcal{U}_{ad}$. On désigne par X^ε la solution de (3.2) associée à u^ε.

Étape 2 : Processus variationnel. On pose

$$Y_t = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{X_t^\varepsilon - \bar{X}_t}{\varepsilon}.$$

En différentiant formellement (3.2) par rapport à ε, Y_t est solution de l'EDS linéaire :

$$\begin{cases} dY_t = \Big[\partial_x b_t\, Y_t + \partial_\mu b_t(\bar{X}_t)\, \tilde{\mathbb{E}}[\tilde{Y}_t] + \partial_u b_t\, (v_t - \bar{u}_t)\Big]\, dt \\ \qquad + \Big[\partial_x \sigma_t\, Y_t + \partial_\mu \sigma_t(\bar{X}_t)\, \tilde{\mathbb{E}}[\tilde{Y}_t] + \partial_u \sigma_t\, (v_t - \bar{u}_t)\Big]\, dW_t, \\ Y_0 = 0, \end{cases} \tag{3.14}$$

où on note $\partial_x b_t = \partial_x b(t, \bar{X}_t, \mathbb{P}_{\bar{X}_t}, \bar{u}_t)$ et de même pour les autres termes.

Étape 3 : Développement de la fonctionnelle. L'optimalité de $\bar{u}$ implique $J(u^\varepsilon) - J(\bar{u}) \geq 0$. Après division par ε et passage à la limite $\varepsilon \to 0^+$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(u^\varepsilon) - J(\bar{u})}{\varepsilon} \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \Big(\partial_x f_t\, Y_t + \tilde{\mathbb{E}}\big[\partial_\mu f_t(\bar{X}_t)\big]\, Y_t + \partial_u f_t\, (v_t - \bar{u}_t)\Big)\, dt + \partial_x h_T\, Y_T + \tilde{\mathbb{E}}\big[\partial_\mu h_T(\bar{X}_T)\big]\, Y_T\right], \end{aligned} \tag{3.15}$$

où $\partial_x f_t = \partial_x f(t, \bar{X}_t, \mathbb{P}_{\bar{X}_t}, \bar{u}_t)$, $\partial_\mu f_t(\bar{X}_t) = \partial_\mu f(t, \tilde{X}_t, \mathbb{P}_{\bar{X}_t}, \tilde{u}_t)(\bar{X}_t)$, et de même pour h.

Étape 4 : Application de la formule d'Itô à $\langle \bar{p}_t, Y_t \rangle$. On applique la formule d'Itô au produit scalaire $\langle \bar{p}_t, Y_t \rangle$:

$$d\langle \bar{p}_t, Y_t \rangle = \langle d\bar{p}_t, Y_t \rangle + \langle \bar{p}_t, dY_t \rangle + \mathrm{tr}\Big(\bar{q}_t^\top \Big[\partial_x \sigma_t\, Y_t + \partial_\mu \sigma_t(\bar{X}_t)\, \tilde{\mathbb{E}}[\tilde{Y}_t] + \partial_u \sigma_t\, (v_t - \bar{u}_t)\Big]\Big)\, dt. \tag{3.16}$$

En substituant $d\bar{p}_t$ depuis (3.11) et dY_t depuis (3.14), et en développant tous les termes en

dt :

$$\begin{aligned} d\langle \bar{p}_t, Y_t\rangle = \Big[& -\langle \partial_x \mathcal{H}_t, Y_t\rangle - \tilde{\mathbb{E}}\big[\partial_\mu \mathcal{H}_t(\bar{X}_t)\big]\, Y_t \\ & + \langle \bar{p}_t, \partial_x b_t\, Y_t\rangle + \langle \bar{p}_t, \partial_\mu b_t(\bar{X}_t)\, \tilde{\mathbb{E}}[\tilde{Y}_t]\rangle + \langle \bar{p}_t, \partial_u b_t\, (v_t - \bar{u}_t)\rangle \\ & + \mathrm{tr}\big(\bar{q}_t^\top\, \partial_x \sigma_t\, Y_t\big) + \mathrm{tr}\big(\bar{q}_t^\top\, \partial_\mu \sigma_t(\bar{X}_t)\, \tilde{\mathbb{E}}[\tilde{Y}_t]\big) + \mathrm{tr}\big(\bar{q}_t^\top\, \partial_u \sigma_t\, (v_t - \bar{u}_t)\big)\Big] dt \\ & + \text{martingale locale.} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Or, par définition du Hamiltonien (3.10) :

$$\partial_x \mathcal{H}_t = \langle \bar{p}_t, \partial_x b_t\rangle + \mathrm{tr}\big(\bar{q}_t^\top\, \partial_x \sigma_t\big) + \partial_x f_t,$$

donc :

$$-\langle \partial_x \mathcal{H}_t, Y_t\rangle + \langle \bar{p}_t, \partial_x b_t\, Y_t\rangle + \mathrm{tr}\big(\bar{q}_t^\top\, \partial_x \sigma_t\, Y_t\big) = -\partial_x f_t\, Y_t.$$

De même :

$$-\tilde{\mathbb{E}}\big[\partial_\mu \mathcal{H}_t(\bar{X}_t)\big]\, Y_t + \langle \bar{p}_t, \partial_\mu b_t(\bar{X}_t)\, \tilde{\mathbb{E}}[\tilde{Y}_t]\rangle + \mathrm{tr}\big(\bar{q}_t^\top\, \partial_\mu \sigma_t(\bar{X}_t)\, \tilde{\mathbb{E}}[\tilde{Y}_t]\big) = -\tilde{\mathbb{E}}\big[\partial_\mu f_t(\bar{X}_t)\big]\, Y_t.$$

En substituant dans (3.17) :

$$\begin{aligned} d\langle \bar{p}_t, Y_t\rangle = & \Big[-\partial_x f_t\, Y_t - \tilde{\mathbb{E}}\big[\partial_\mu f_t(\bar{X}_t)\big]\, Y_t + \langle \bar{p}_t, \partial_u b_t\, (v_t - \bar{u}_t)\rangle + \mathrm{tr}\big(\bar{q}_t^\top\, \partial_u \sigma_t\, (v_t - \bar{u}_t)\big)\Big] dt \\ & + \text{martingale locale.} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Étape 5 : Intégration sur $[0, T]$**.** En intégrant (3.18) sur $[0, T]$ et en prenant l'espérance :

$$\mathbb{E}\langle \bar{p}_T, Y_T\rangle = \mathbb{E}\int_0^T \Big[-\partial_x f_t\, Y_t - \tilde{\mathbb{E}}\big[\partial_\mu f_t(\bar{X}_t)\big]\, Y_t + \langle \bar{p}_t, \partial_u b_t\, (v_t - \bar{u}_t)\rangle + \mathrm{tr}\big(\bar{q}_t^\top\, \partial_u \sigma_t\, (v_t - \bar{u}_t)\big)\Big] dt. \tag{3.19}$$

En utilisant la condition terminale $\bar{p}_T = \partial_x h_T + \tilde{\mathbb{E}}[\partial_\mu h_T(\bar{X}_T)]$, on a :

$$\mathbb{E}\langle \bar{p}_T, Y_T\rangle = \mathbb{E}\Big[\partial_x h_T\, Y_T + \tilde{\mathbb{E}}\big[\partial_\mu h_T(\bar{X}_T)\big]\, Y_T\Big].$$

En substituant dans (3.15) et en utilisant (3.19), les termes en $\partial_x f_t\, Y_t$, $\tilde{\mathbb{E}}[\partial_\mu f_t(\bar{X}_t)]\, Y_t$,

$\partial_x h_T\, Y_T$ et $\tilde{\mathbb{E}}[\partial_\mu h_T(\bar{X}_T)]\, Y_T$ se simplifient, et il reste :

$$\begin{aligned} 0 &\le \mathbb{E}\int_0^T \Big[\langle \bar{p}_t, \partial_u b_t\,(v_t - \bar{u}_t)\rangle + \mathrm{tr}\big(\bar{q}_t^\top\, \partial_u \sigma_t\,(v_t - \bar{u}_t)\big) + \partial_u f_t\,(v_t - \bar{u}_t)\Big] dt \\ &= \mathbb{E}\int_0^T \left\langle \partial_u \mathcal{H}(t, \bar{X}_t, \mathbb{P}_{\bar{X}_t}, \bar{u}_t, \bar{p}_t, \bar{q}_t),\ v_t - \bar{u}_t \right\rangle dt, \end{aligned} \tag{3.20}$$

où la dernière égalité découle de la définition $\partial_u \mathcal{H}_t = \langle \bar{p}_t, \partial_u b_t\rangle + \mathrm{tr}(\bar{q}_t^\top\, \partial_u \sigma_t) + \partial_u f_t$.

Étape 6 : Passage à la condition ponctuelle. En prenant $v_t = v \cdot \mathbf{1}_{[s,\, s+\delta]}(t)$ avec $s \in [0, T)$ et $v \in U$ quelconques dans (3.20), on obtient :

$$0 \le \frac{1}{\delta}\mathbb{E}\int_s^{s+\delta} \left\langle \partial_u \mathcal{H}(t, \bar{X}_t, \mathbb{P}_{\bar{X}_t}, \bar{u}_t, \bar{p}_t, \bar{q}_t),\ v - \bar{u}_t \right\rangle dt.$$

En faisant tendre $\delta \to 0$, par le théorème de différentiation de Lebesgue :

$$\left\langle \partial_u \mathcal{H}(t, \bar{X}_t, \mathbb{P}_{\bar{X}_t}, \bar{u}_t, \bar{p}_t, \bar{q}_t),\ v - \bar{u}_t \right\rangle \ge 0, \quad \forall\, v \in U,$$

pour p.p. $t \in [0, T]$, $\mathbb{P}$-p.s., ce qui établit (3.12).

Lorsque $u \mapsto \mathcal{H}$ est convexe, l'inégalité (3.12) est la condition du premier ordre de minimisation globale, ce qui donne (3.13) [7, 1]. ∎

3.3.4 Commentaires sur le résultat

Remarque 3.3.1. Le Théorème 3.3.1 étend au cadre mean-field le principe du maximum du chapitre précédent, avec deux différences structurelles majeures. La première tient à l'équation adjointe (3.11), qui contient des termes en $\tilde{\mathbb{E}}[\partial_\mu \mathcal{H}(\cdots)]$ traduisant l'effet de la distribution collective sur les variables duales, et qui sont absents dans le cas sans interaction. La seconde porte sur la nature de la condition d'optimalité : l'inégalité variationnelle (3.12) est caractéristique du cas convexe, tandis que l'approche par perturbations en aiguille, nécessaire dans le cas non convexe, conduit à une condition de stationnarité ponctuelle [12, 14].

Remarque 3.3.2. Plusieurs travaux ont prolongé le cadre du Théorème 3.3.1 dans des directions complémentaires. Dans [6], des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité

sont établies pour des contrôles singuliers dans des systèmes progressifs-rétrogrades de type mean-field, avec une application aux problèmes de finance stochastique. Dans [8], le bruit brownien est remplacé par des martingales de Teugels, ce qui couvre des modèles à sauts qui dépassent le cadre continu retenu ici.

3.3.5 Illustration sur un exemple scalaire

Pour rendre le Théorème 3.3.1 plus concret, on l'applique au système scalaire ($n = d = m = 1, U = \mathbb{R}$) :

$$\begin{cases} dX_t = \Big(u_t + \alpha\,\mathbb{E}[X_t]\Big)\,dt + \sigma_0\,dW_t, \\ X_0 = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.21}$$

où $\alpha, \sigma_0 \in \mathbb{R}$ sont deux constantes données, avec le critère

$$J(u) = \mathbb{E}\left[\int_0^T \frac{1}{2}\,u_t^2\,dt + \frac{1}{2}\,X_T^2\right]. \tag{3.22}$$

Les données du problème sont $f(t,x,\mu,u) = \frac{1}{2}u^2$, $h(x,\mu) = \frac{1}{2}x^2$ et

$$b(t,x,\mu,u) = u + \alpha \int_{\mathbb{R}} y\,\mu(dy),$$

qui dépend de μ via son moment d'ordre un, conformément au cadre de la Section 3.1.3.

Le Hamiltonien associé, donné par (3.10), s'écrit

$$\mathcal{H}(t,x,\mu,u,p,q) = p\left(u + \alpha \int_{\mathbb{R}} y\,\mu(dy)\right) + q\,\sigma_0 + \frac{1}{2}\,u^2. \tag{3.23}$$

On calcule $\partial_u \mathcal{H} = p + u$, de sorte que la condition (3.12) s'écrit $(\bar{p}_t + \bar{u}_t)(v - \bar{u}_t) \geq 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}$, ce qui impose

$$\bar{u}_t = -\bar{p}_t, \quad t \in [0,T],\ \mathbb{P}\text{-p.s.} \tag{3.24}$$

Pour l'équation adjointe, on note que $\partial_x \mathcal{H} = 0$ dans ce modèle, et que la dérivée de Lions de b par rapport à μ vaut $\partial_\mu b(t,x,\mu,u)(y) = \alpha$, indépendamment de y. L'équation (3.11)

se réduit alors à

$$\begin{cases} -d\bar{p}_t = \alpha\, \tilde{\mathbb{E}}[\tilde{p}_t]\, dt - \bar{q}_t\, dW_t, \\ \bar{p}_T = \bar{X}_T. \end{cases} \tag{3.25}$$

Le système couplé (3.24)–(3.25) est un système progressif-rétrograde de type mean-field. Sa résolution est conduite via un *ansatz* affine de la forme

$$\bar{p}_t = \phi(t)\, \bar{X}_t + \psi(t), \quad t \in [0, T], \tag{3.26}$$

où $\phi, \psi : [0, T] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions déterministes à déterminer.

En reportant (3.26) dans la relation $\bar{u}_t = -\bar{p}_t$, l'équation d'état (3.21) prend la forme :

$$d\bar{X}_t = \big(-\phi(t)\, \bar{X}_t - \psi(t) + \alpha\, \mathbb{E}[\bar{X}_t]\big)\, dt + \sigma_0\, dW_t.$$

On applique la formule d'Itô à $\bar{p}_t = \phi(t)\, \bar{X}_t + \psi(t)$:

$$\begin{aligned} d\bar{p}_t &= \dot{\phi}(t)\, \bar{X}_t\, dt + \phi(t)\, d\bar{X}_t + \dot{\psi}(t)\, dt \\ &= \dot{\phi}(t)\, \bar{X}_t\, dt + \phi(t) \Big[\big(-\phi(t)\, \bar{X}_t - \psi(t) + \alpha\, \mathbb{E}[\bar{X}_t]\big)\, dt + \sigma_0\, dW_t \Big] + \dot{\psi}(t)\, dt \\ &= \Big[\dot{\phi}(t)\, \bar{X}_t - \phi^2(t)\, \bar{X}_t - \phi(t)\, \psi(t) + \alpha\, \phi(t)\, \mathbb{E}[\bar{X}_t] + \dot{\psi}(t) \Big] dt + \phi(t)\, \sigma_0\, dW_t. \end{aligned} \tag{3.27}$$

D'autre part, l'équation adjointe (3.25) donne :

$$d\bar{p}_t = -\alpha\, \tilde{\mathbb{E}}[\tilde{p}_t]\, dt + \bar{q}_t\, dW_t. \tag{3.28}$$

En notant que $\tilde{\mathbb{E}}[\tilde{p}_t] = \phi(t)\, \mathbb{E}[\bar{X}_t] + \psi(t)$ par la copie indépendante de (3.26), l'équation (3.28) devient :

$$d\bar{p}_t = -\alpha \big(\phi(t)\, \mathbb{E}[\bar{X}_t] + \psi(t)\big)\, dt + \bar{q}_t\, dW_t. \tag{3.29}$$

En identifiant (3.27) et (3.29) terme à terme :

Terme en dW_t :

$$\bar{q}_t = \phi(t)\, \sigma_0.$$

Terme en $\bar{X}_t\, dt$:

$$\dot{\phi}(t) - \phi^2(t) + \alpha\, \phi(t) = 0.$$

Terme en dt (termes constants) :

$$\dot{\psi}(t) - \phi(t)\, \psi(t) + \alpha\, \phi(t)\, \mathbb{E}[\bar{X}_t] - \alpha\, \phi(t)\, \mathbb{E}[\bar{X}_t] - \alpha\, \psi(t) = 0,$$

soit :

$$\dot{\psi}(t) + \big(\alpha - \phi(t)\big)\, \psi(t) = 0.$$

On obtient ainsi le système à résoudre à rebours depuis $t = T$:

$$\begin{cases} \dot{\phi}(t) - \phi^2(t) + \alpha\, \phi(t) = 0, \\ \phi(T) = 1, \end{cases} \tag{3.30}$$

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) + \big(\alpha - \phi(t)\big)\, \psi(t) = 0, \\ \psi(T) = 0. \end{cases} \tag{3.31}$$

L'équation (3.30) est une équation de Riccati scalaire dont on peut vérifier, sous les hypothèses retenues, que la solution ϕ est bien définie et strictement positive sur $[0, T]$. L'équation (3.31) est linéaire en ψ ; la condition terminale $\psi(T) = 0$ impose $\psi(t) \equiv 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Il en résulte que le contrôle optimal est donné par la rétroaction :

$$\bar{u}_t = -\phi(t)\, \bar{X}_t, \quad t \in [0, T],\ \mathbb{P}\text{-p.s.}, \tag{3.32}$$

où ϕ est l'unique solution de (3.30). Ce résultat est cohérent avec la structure générale des contrôles optimaux pour les systèmes linéaires-quadratiques de type mean-field [2, 7].

Conclusion générale

Ce travail est parti d'une question précise : le schéma de preuve du principe du maximum stochastique — perturbation convexe, linéarisation, dualité par la formule d'Itô — résiste-t-il au passage au cadre McKean–Vlasov ? La réponse est affirmative, mais elle n'allait pas de soi. Chaque outil mobilisé dans les chapitres centraux — la structure hilbertienne de $L^2_{\mathcal{F}}$, l'isométrie d'Itô, l'inégalité de Burkholder–Davis–Gundy, le cadre des EDSR — avait une raison d'être dans le premier chapitre. La convexité de l'ensemble des contrôles et sa fermeture dans $L^2_{\mathcal{F}}$ sont ce qui rend licite la perturbation $u^\varepsilon = \bar{u} + \varepsilon(v - \bar{u})$ pour tout $\varepsilon \in (0, 1]$, garantissant que le contrôle perturbé demeure admissible. Sans cette propriété structurelle, le calcul variationnel qui fonde la preuve n'aurait aucun appui [9, 14].

Le deuxième chapitre a rempli une fonction préparatoire essentielle : établir le principe du maximum dans le cas régulier avant d'aborder le cadre champ moyen. En l'absence de dépendance en loi, le mécanisme de la preuve apparaît dans sa forme la plus lisible. On perturbe le contrôle, on linéarise l'équation d'état pour obtenir le processus variationnel Z_t, puis on applique la formule d'Itô au produit scalaire $\langle p_t, Z_t \rangle$. Les termes en Z_t issus de dp_t et de dZ_t s'annulent mutuellement, précisément parce que l'équation adjointe a été construite dans ce but. L'intégration sur $[0, T]$ donne la variation de la fonctionnelle en fonction du processus adjoint, et le choix de la condition terminale $p_T = \partial_x h(X^*_T)$ ferme le calcul. On obtient ainsi la condition variationnelle caractérisant u^* [4, 12, 1].

Dans le troisième chapitre, la difficulté change de nature. Dès que les coefficients b, σ, f et h dépendent de la loi marginale $\mathbb{P}_{X_t} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$, muni de la distance de Wasserstein d'ordre deux $\mathcal{W}_2$, différentier la fonctionnelle de coût par rapport à la distribution de l'état ne se ramène plus à un calcul en x. Il faut faire appel à la dérivée au sens de Lions [10], dont la représentation fait apparaître, dans l'équation adjointe rétrograde, des termes de la forme

$$\widetilde{\mathbb{E}}\big[\partial_\mu \mathcal{H}(t,\, \widetilde{X}_t,\, \mathbb{P}_{\bar{X}_t},\, \widetilde{u}_t,\, \widetilde{p}_t,\, \widetilde{q}_t)(\bar{X}_t)\big]\,,$$

calculés sur une copie indépendante du système, définie sur un espace auxiliaire $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbb{P}})$. Ces termes n'ont pas d'équivalent dans le cas régulier : ils traduisent la sensibilité du co-état aux variations de la distribution collective de l'état, ce que la théorie classique n'était pas en mesure de capturer [5, 2, 7, 6]. Le Théorème 3.3.1 établit que tout contrôle optimal $\bar{u}$ satisfait une inégalité variationnelle sur le Hamiltonien de type champ moyen ; sous convexité de $u \mapsto \mathcal{H}(t, x, \mu, u, p, q)$, cette condition équivaut à une minimisation ponctuelle du Hamiltonien.

Bilan. Les deux apports de ce travail peuvent se formuler simplement. D'une part, on a établi que le schéma de preuve du principe du maximum — perturbation convexe, linéarisation, dualité par la formule d'Itô — résiste au passage au cadre McKean–Vlasov, à condition d'incorporer les dérivées de Lions $\partial_\mu b$, $\partial_\mu \sigma$, $\partial_\mu f$, $\partial_\mu h$ dans le système adjoint. D'autre part, la confrontation entre le système adjoint classique et celui de type champ moyen rend visible, de façon concrète, la différence structurelle entre les deux cadres : là où le premier ne fait intervenir que les dérivées par rapport à l'état x, le second fait apparaître des termes évalués sur la copie indépendante, couplant le co-état à la distribution de la trajectoire optimale. L'exemple scalaire de la Section 3.3.5 illustre cela directement : la condition $\bar{u}_t = -\bar{p}_t$ et le terme $\alpha\,\widetilde{\mathbb{E}}[\widetilde{p}_t]$ dans le système adjoint réduit sont la réalisation concrète, en dimension un, de ce couplage.

Contribution. Notre démarche a consisté à présenter de manière progressive et rigoureuse le passage du principe du maximum stochastique classique vers le cadre McKean–Vlasov convexe. L'effort principal a porté sur la construction explicite du système adjoint de type champ moyen, sur la mise en évidence du rôle des dérivées de Lions dans la modification de l'équation rétrograde, et sur la démonstration complète du Théorème 3.3.1 par la méthode de perturbation convexe. L'illustration sur un exemple scalaire, menée jusqu'à la résolution explicite par *ansatz* affine et équation de Riccati, complète cette présentation.

Perspectives. Ce mémoire s'est limité au cas convexe, et plusieurs directions restent ouvertes. Lorsque U n'est plus supposé convexe, la perturbation convexe ne suffit plus ; il faut recourir aux variations en aiguille, conduisant, sous des hypothèses plus contraignantes, à une condition de stationnarité ponctuelle du Hamiltonien. L'adaptation de cette démarche au cadre champ moyen reste, dans toute sa généralité, un problème ouvert [12, 14]. La question des contrôles singuliers dans les systèmes progressifs-rétrogrades de type mean-

field, abordée dans [6, 7] avec des applications en finance stochastique, représente une autre direction naturelle. Enfin, le remplacement du bruit brownien par des martingales de Teugels, développé dans [8], ouvre la voie aux modèles à sauts, qui dépassent le cadre continu retenu ici [5, 2, 1, 15].

Bibliographie

[1] Abba, A. (2016). *Sur le principe du maximum stochastique de presque optimalité et applications*. Thèse de Doctorat, Université Mohamed Khider, Biskra, Algérie.

[2] Andersson, D. and Djehiche, B. (2011). A maximum principle for SDEs of mean-field type. *Applied Mathematics and Optimization*, 63(3), 341–356.

[3] Billingsley, P. (1995). *Probability and Measure*. Wiley, New York.

[4] Bismut, J. M. (1973). Conjugate convex functions in optimal stochastic control. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 44(2), 384–404.

[5] Buckdahn, R., Djehiche, B., Li, J. and Peng, S. (2009). Mean-field backward stochastic differential equations : A limit approach. *The Annals of Probability*, 37(4), 1524–1565.

[6] Hafayed, M. (2014). Singular mean-field optimal control for forward-backward stochastic systems and applications to finance. *International Journal of Dynamics and Control*, Springer, 2(4), 542–554. Doi : 10.1007/s40435-014-0080-y.

[7] Hafayed, M. (2014). A mean-field necessary and sufficient conditions for optimal singular stochastic control. *Communications in Mathematics and Statistics*, Springer, 1(4), 417–435. Doi : 10.1007/s40304-014-0023-0.

[8] Hafayed, M. and Meherrem, S. (2020). On optimal control of mean-field stochastic systems driven by Teugels martingales via derivative with respect to measures. *International Journal of Control*, 93(5), 1053–1062. Doi : 10.1080/00207179.2018.1489148.

[9] Karatzas, I. and Shreve, S. E. (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, New York.

[10] Lions, P.-L. (2012). *Cours au Collège de France : Théorie des jeux à champ moyen*. Collège de France, Paris.

[11] Øksendal, B. (2003). *Stochastic Differential Equations : An Introduction with Applications*. 6th ed., Springer, Berlin.

[12] Peng, S. (1990). A general stochastic maximum principle for optimal control problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 28(4), 966–979.

[13] Revuz, D. and Yor, M. (1999). *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer, Berlin.

[14] Yong, J. and Zhou, X. Y. (1999). *Stochastic Controls : Hamiltonian Systems and HJB Equations*. Springer, New York.

[15] Zerrouki, I. (2022). *Les équations différentielles stochastiques de type McKean–Vlasov et leur contrôle relaxé*. Mémoire de Master, Université Kasdi Merbah, Ouargla, Algérie.