**Université Mohamed Khider de Biskra**
Faculté des sciences exactes
Département de Mathématiques

# MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité : Mathématiques Appliquées (Probabilités) - Réf : P2849/2026

TITRE

## Mobilisation des modèles mathématiques et probabilistes dans l'analyse des phénomènes urbains et l'aide à la décision en matière de planification : étude de cas de la ville de Biskra

Présenté et soutenu par

**NADJLA LAZNEK**

Date de soutenance : 18/06/2026

JURY DE SOUTENANCE

| Nom et Prénom | Grade | Qualité |
|---|---|---|
| **Nabil KHELFALLAH** | Prof | **Président** |
| **Adel CHALA** | Prof | **Encadrant** |
| **Fatiha KORICHI** | MCB | **Examinateur** |

**Année universitaire : 2025/2026**

# *Dédicace*

À la source de ma pureté et de mes prières éternelles, celle qui a toujours été mon soutien indéfectible et mon inspiration première... **Ma très chère Mère**. .

À tous les membres de ma famille, pour leur amour inconditionnel, leurs encouragements constants et leur présence rassurante tout au long de mon parcours.

À mon estimé directeur de thèse, **Pr. Adel CHALA**, en signe de profonde reconnaissance pour son encadrement généreux, ses conseils précieux et sa bienveillance qui ont été le moteur de mon travail. Je ne pourrai jamais oublier son soutien inestimable.

# Remerciements

AVANT toute chose, je remercie **Dieu Tout-Puissant** de m'avoir accordé la force, la patience et la sérénité nécessaires pour mener à bien ce travail de recherche.

Mes plus sincères remerciements s'adressent tout d'abord à mon directeur de thèse, **Pr. Adel CHALA**, pour m'avoir fait l'honneur d'encadrer ce mémoire. Sa rigueur scientifique, sa disponibilité constante et ses orientations pertinentes ont été essentielles à l'aboutissement de cette étude.

Je tiens également à exprimer ma profonde gratitude aux membres du jury pour avoir accepté d'évaluer ce travail :

— **Dr. Nabil khalfallah**, pour l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.

— **Dr.Fatiha kouraichi**, pour avoir accepté d'examiner ce manuscrit et pour ses remarques constructives.

Mes remerciements vont également à l'ensemble du corps professoral du Département de Mathématiques de l'**Université Mohamed Khider de Biskra** pour la qualité de l'enseignement reçu.

À ma mère, mes frères et sœurs, pour leur amour infini et leurs sacrifices. Ce diplôme est autant le vôtre que le mien.

Enfin, je remercie tous mes amis et collègues pour les moments de partage, d'entraide et les encouragements qui ont rendu cette aventure universitaire inoubliable

# Notations et symboles

$\Omega$ Ensemble des résultats possibles.

$\mathcal{F}$ Tribu définie sur $\Omega$.

$\mathbb{P}$ Mesure de probabilité.

$E$ Espace des états de la chaîne de Markov.

$X$ Variable aléatoire.

$(X_n)_{n\geq 0}$ Processus stochastique à temps discret.

$X_n$ État du système à l'instant $n$.

$p_{ij}$ Probabilité de transition de l'état $i$ vers l'état $j$.

$p_{ij}^{(n)}$ Probabilité de transition de l'état $i$ vers l'état $j$ en $n$ étapes.

$P$ Matrice de transition de la chaîne de Markov.

$P^n$ Puissance $n$-ième de la matrice de transition.

$\pi$ Distribution stationnaire.

$d(i)$ Période de l'état $i$.

$i \leftrightarrow j$ Les états $i$ et $j$ communiquent.

$F$ Sous-ensemble fermé de l'espace des états.

$\mathbb{E}(X)$ Espérance mathématique de la variable aléatoire $X$.

$\mathrm{Var}(X)$ Variance de la variable aléatoire $X$.

$R$ Zone résidentielle.

$C$ Zone commerciale.

$I$ Zone industrielle.

$V$ Espace vert.

# Table des matières

**Dédicace** i

**Remerciements** ii

**Notations et symboles** iii

**Table des matières** iii

**Table des figures** vii

**Introduction** 1

**CHAPITRE 01 – Fondements théoriques des chaînes de Markov** 3

**1.1 Introduction aux processus stochastiques** . . . . . 3

1.1.1 Espaces probabilisés et variables aléatoires . . . . . 3

1.1.2 Variables aléatoires discrètes et loi de probabilité . . . . . 4

1.1.3 Processus stochastiques . . . . . 5

**1.2 Chaînes de Markov** . . . . . 5

1.2.1 Transitions entre états . . . . . 6

1.2.2 Exemple éĺementaire d' application . . . . . 7

1.2.3 Classification des états . . . . . 9

**1.3 Structure mathématique des chaînes de Markov** . . . . . 10

1.3.1 Matrice de transition et graphe . . . . . 10

1.3.2 Probabilités de transition à n étapes . . . . . 12

1.3.3 Équation de Chapman-Kolmogorov . . . . . 14

1.3.4 Communication entre états . . . . . 15

1.3.5 Chaînes irréductibles . . . . . 17

1.3.6 Périodicité des états . . . 18
1.3.7 États récurrents et états transitoires . . . 20
1.3.8 Ensembles fermés et classes récurrentes . . . 20
1.3.9 Distribution stationnaire . . . 21
1.3.10 Théorème de convergence . . . 22
1.3.11 Applications du théorème de convergence . . . 22
1.3.12 Chaînes réversibles . . . 25
1.3.13 Applications probabilistes des chaînes de Markov . . . 27
1.3.14 Comportement asymptotique des chaînes de Markov . . . 27
**1.4 Ouverture vers les systèmes urbains . . . 28**

**CHAPITRE 02 – Applications des chaînes de Markov dans l'architecture et l'urbanisme 29**
**2.1 Principes retenus pour la construction du modèle . . . 29**
**2.2 Passage de l'observation spatiale au modèle markovien . . . 30**
**2.3 Supports cartographiques et codage des données spatiales . . . 30**
**2.4 Codage des fonctions urbaines en états markoviens . . . 32**
**2.5 Formulation probabiliste des transitions urbaines . . . 33**
**2.6 Construction de la matrice de transition . . . 34**
**2.7 Vérification de la cohérence mathématique de la matrice . . . 36**
**2.8 Analyse dynamique par puissances de la matrice . . . 37**
**2.9 Interprétation urbanistique des résultats . . . 39**
**2.10 Interprétation urbanistique des résultats et aide à la décision . . . 40**
2.10.1 Lecture dynamique des puissances de la matrice . . . 41
2.10.2 Schéma d'aide à la décision fondé sur le modèle markovien . . . 41
**2.11 Interprétation des résultats . . . 43**
2.11.1 Rôle des chaînes de Markov dans la planification urbaine . . . 44
2.11.2 Tableau récapitulatif des transitions urbaines . . . 45
2.11.3 Synthèse de l'aide à la décision . . . 47
**2.12 Perspectives d'application et recommandations . . . 47**

**Conclusion générale 50**

**Bibliographie** **52**

# Table des figures


1.1 Illustration d'une marche aléatoire symétrique. . . . . 8

1.2 Arbre représentant un processus de Galton-Watson. . . . . 9

1.3 Exemple de communication entre états et états absorbants. . . . . 17

1.4 Illustration de la périodicité d'une chaîne de Markov. . . . . 19

1.5 Partition de l'espace des états en classes récurrentes et états transitoires. . . . . 21

1.6 Graphe de transition d'une chaîne de Markov à deux états . . . . . 23

2.7 Présentation de la zone d'étude : quartier 300 logements d'El Alia – Biskra. Source : élaboré à partir de Google Maps, 2024. . . . . 31

2.8 Carte d'occupation du sol du quartier 300 logements d'El Alia – Biskra. . . . . 32

2.9 Réseau markovien des transitions urbaines du quartier 300 logements d'El Alia – Biskra. . . . 35

2.10 Schéma d'aide à la décision fondé sur le modèle markovien – quartier 300 logements d'El Alia, Biskra . . . . . 42

# Introduction

La construction des nouvelles villes constitue aujourd'hui un enjeu important pour l'aménagement du territoire et la planification urbaine. Une ville nouvelle ne peut pas être considérée comme un simple ensemble de bâtiments, de routes et d'équipements, mais comme un système dynamique composé de zones, de réseaux, de flux, de fonctions urbaines et de décisions qui évoluent dans le temps. Cette complexité rend nécessaire l'utilisation d'outils d'analyse capables de représenter l'organisation de l'espace et d'étudier son évolution probable.

Dans ce contexte, la modélisation mathématique permet de décrire un système urbain de manière structurée, tandis que la probabilité permet de prendre en compte l'incertitude liée aux choix de planification, à la croissance urbaine, à la mobilité des populations et à la transformation des espaces. Contrairement aux approches purement descriptives, les modèles probabilistes ne se limitent pas à une seule évolution possible, mais permettent d'étudier plusieurs scénarios et d'évaluer les transitions possibles entre différentes configurations urbaines.

Dans le domaine urbain, les travaux récents sur la science des villes montrent que la ville peut être étudiée comme un système complexe fondé sur les réseaux, les flux, les interactions et la simulation. Cette vision est notamment développée par Michael Batty en 2013 dans son ouvrage *The New Science of Cities*. Elle permet de rapprocher l'analyse urbaine des outils mathématiques utilisés pour étudier les systèmes dynamiques et les phénomènes évolutifs.

Les chaînes de Markov constituent l'un des outils fondamentaux de la modélisation probabiliste. En 1906, Andreï Markov a publié les premiers résultats relatifs aux chaînes de Markov à espace d'états fini. Par la suite, en 1936, Kolmogorov a contribué à la généralisation de cette théorie vers des espaces d'états plus larges. L'intérêt principal de ces modèles réside dans le fait qu'ils permettent d'étudier des phénomènes dont l'évolution future dépend principalement de l'état présent, à travers des probabilités de transition.

Dans le cadre de ce mémoire, l'espace urbain est représenté par un ensemble d'états possibles correspondant à différentes fonctions urbaines, telles que les zones résidentielles, commerciales, industrielles, les espaces verts, les équipements collectifs ou les zones non urbanisées. Les chaînes de Markov permettent alors de formaliser les passages possibles d'un état urbain à un autre à l'aide d'une matrice de transition. Cette approche offre un

cadre mathématique pour analyser l'évolution probable d'un espace planifié et comparer plusieurs scénarios de construction.

L'objectif principal de ce travail est d'étudier le rôle de la modélisation mathématique et de la probabilité dans la construction des nouvelles villes. Il s'agit plus précisément de montrer comment les chaînes de Markov peuvent contribuer à l'analyse des transitions urbaines, à la prévision de certaines évolutions spatiales et à l'aide à la décision dans le domaine de la planification urbaine. Le modèle proposé ne remplace pas l'expertise urbanistique, mais il constitue un outil complémentaire permettant de quantifier certaines dynamiques et de soutenir une planification plus rationnelle.

La problématique centrale de ce mémoire peut être formulée comme suit : comment la modélisation mathématique et probabiliste, à travers les chaînes de Markov et les matrices de transition, peut-elle contribuer à l'analyse, à la prévision et à l'orientation des choix liés à la construction des nouvelles villes ?

Pour répondre à cette problématique, nous supposons que certaines dynamiques urbaines peuvent être approximées par un modèle markovien après discrétisation de l'espace en états bien définis. Chaque état représente une fonction urbaine possible, et chaque transition traduit la probabilité de passage d'une configuration à une autre. Cette hypothèse permet de transformer une partie de l'incertitude urbaine en données exploitables dans un cadre mathématique.

Le présent mémoire est structuré en deux chapitres principaux.

**Premier chapitre.** Ce chapitre est consacré aux fondements théoriques des processus stochastiques et des chaînes de Markov. Nous y présentons les notions de base nécessaires à l'étude des systèmes aléatoires, telles que les variables aléatoires, les processus stochastiques, les chaînes de Markov, les matrices de transition et les propriétés de convergence.

**Deuxième chapitre.** Ce chapitre est consacré aux applications des chaînes de Markov dans l'architecture et l'urbanisme. Nous y étudions la manière de représenter l'espace urbain sous forme d'états, de construire une matrice de transition et d'analyser l'évolution probable d'un espace planifié dans le cadre de la construction des nouvelles villes.

# CHAPITRE 01

# Fondements théoriques des chaînes de Markov

Ce chapitre a pour objectif de présenter les fondements mathématiques nécessaires à l'étude des chaînes de Markov. Nous commençons par rappeler quelques notions de base en probabilité, notamment les espaces probabilisés, les variables aléatoires et les processus stochastiques, qui constituent le cadre général de la modélisation des phénomènes aléatoires [3, 13]. Ces notions permettent ensuite d'introduire les chaînes de Markov, leurs matrices de transition, leurs propriétés de classification et leur comportement à long terme [1, 8, 13]. L'intérêt de ce chapitre est de construire le cadre théorique qui sera utilisé dans le chapitre suivant pour modéliser les transitions possibles entre différents états urbains dans le contexte de la planification des nouvelles villes [5].

## 1.1 Introduction aux processus stochastiques

### 1.1.1 Espaces probabilisés et variables aléatoires

La théorie des probabilités fournit le cadre mathématique nécessaire à l'étude des phénomènes aléatoires. La modélisation des processus stochastiques repose essentiellement sur la définition d'un espace probabilisé [3].

**Définition 1.1.1.** *Un espace probabilisé est un triplet* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *où* $\Omega$ *représente l'ensemble des résultats possibles ,* $\mathcal{F}$ *désigne une tribu sur* $\Omega$ *,* $\mathbb{P}$ *est une mesure de probabilité définie sur* $(\Omega, \mathcal{F})$.

Soit maintenant $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable.

**Définition 1.1.2.** *Une variable aléatoire est une application mesurable* $X : \Omega \longrightarrow E$ *telle que :* $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ *pour tout ensemble mesurable* $B \in \mathcal{E}$.

**Définition 1.1.3.** *La loi d'une variable aléatoire X est la mesure de probabilité définie par* $P_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$ *pour tout ensemble mesurable* $B \in \mathcal{E}$.

***Définition 1.1.4.*** *On appelle processus stochastique toute famille de variables aléatoires $(X_t)_{t\in T}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*

*Lorsque $T = \mathbb{N}$ le processus est dit à temps discret.*

*Lorsque $T = \mathbb{R}_+$ le processus est dit à temps continu.*

### 1.1.2 Variables aléatoires discrètes et loi de probabilité

***Définition 1.1.5.*** *Une variable aléatoire discrète est une application $X$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et prenant ses valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable $E = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Elle permet de représenter numériquement le résultat d'une expérience aléatoire [3, 13].*

***Définition 1.1.6.*** *La loi de probabilité de $X$ est déterminée par les probabilités*

$$p_i = \mathbb{P}(X = x_i), \quad i \geq 1.$$

*Ces probabilités vérifient les deux conditions suivantes :*

$$p_i \geq 0 \quad \textit{pour tout } i,$$

*et*

$$\sum_i p_i = 1.$$

***Remarque 1.1.1.*** *Ainsi, connaître la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète revient à connaître toutes les valeurs possibles de cette variable ainsi que les probabilités qui leur sont associées. Cette notion sera utilisée par la suite pour décrire les états possibles d'une chaîne de Markov et les probabilités de transition entre ces états [1, 13].*

***Définition 1.1.7.*** *Soit $X$ une variable aléatoire discrète prenant les valeurs $\{x_i\}_{i\in I}$, où $I$ est un ensemble fini ou dénombrable, avec les probabilités $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$. Lorsque la série $\sum_{i\in I} |x_i| p_i$ est convergente, l'espérance mathématique de $X$, notée $\mathbb{E}[X]$, est définie par*

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i\in I} x_i p_i.$$

***Remarque 1.1.2.*** *L'espérance mathématique représente la valeur moyenne théorique d'une variable aléatoire. Elle constitue un outil fondamental dans l'étude des processus stochastiques et dans l'analyse du comportement moyen des systèmes probabilistes [3, 13].*

***Définition 1.1.8.*** *Soit $X$ une variable aléatoire discrète telle que $\mathbb{E}[X^2] < +\infty$. La variance de $X$, notée* $\mathrm{Var}(X)$*, est définie par*

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right].$$

*Elle peut aussi s'écrire sous la forme*

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

***Remarque 1.1.3.*** *Dans le cas discret, on a*

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{i \in I} x_i^2 p_i.$$

***Remarque 1.1.4.*** *La variance mesure la dispersion des valeurs de X autour de son espérance. Une variance élevée indique que les valeurs possibles sont fortement dispersées, tandis qu'une variance faible traduit une concentration autour de la moyenne. Cette notion permet d'évaluer le degré d'incertitude associé à un phénomène aléatoire [3].*

### 1.1.3 Processus stochastiques

*Les phénomènes aléatoires observés dans plusieurs domaines scientifiques évoluent généralement au cours du temps. Afin de modéliser mathématiquement ces évolutions aléatoires, la théorie des probabilités introduit la notion de processus stochastique.*

*Un processus stochastique représente une famille de variables aléatoires dépendant d'un paramètre temporel.*

## *1.2 Chaînes de Markov*

*Dans une chaîne de Markov, le système évolue entre plusieurs états possibles appelés états de la chaîne.*

***Définition 1.2.1.*** *L'ensemble de tous les états est appelé espace d'états et est généralement noté $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Chaque état représente une situation possible du système étudié.*

***Remarque 1.2.1.*** *L'évolution de la chaîne correspond alors aux transitions successives entre les différents états de l'espace d'états.*

***Remarque 1.2.2.*** *Dans le cadre des chaînes de Markov discrètes, l'espace d'états est généralement fini ou dénombrable.*

### 1.2.1 Transitions entre états

*Une chaîne de Markov évolue à travers des transitions probabilistes entre différents états.*

***Définition 1.2.2.*** *La probabilité de transition de l'état i vers l'état j est notée $p_{ij}$ et définie par :*

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

*Cette probabilité représente la possibilité pour le système de passer de l'état i à l'état j après une étape.*

*L'ensemble des probabilités de transition forme la matrice de transition [8] :*

*où chaque coefficient vérifie $0 \leq p_{ij} \leq 1$ et $\sum_j p_{ij} = 1$ pour tout état i.*

*Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit E un espace d'états fini ou dénombrable.*

*Un processus stochastique à temps discret $(X_n)_{n\geq 0}$, à valeurs dans E, est appelé chaîne de Markov si, pour tout $n \geq 0$ et pour tous $i_0, \ldots, i_n, j \in E$ tels que*

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) > 0,$$

*on a :*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n).$$

*Cette relation exprime la propriété de Markov : l'évolution future du processus dépend uniquement de son état présent et non de toute son histoire passée.*

***Remarque 1.2.3.*** *Dans le cas homogène, les probabilités de transition ne dépendent pas de l'instant n et sont notées*

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i), \qquad i, j \in E.$$

*Ces probabilités constituent la base de la matrice de transition qui sera utilisée par la suite pour modéliser les passages possibles entre différents états urbains [1, 13].*

### 1.2.2 Exemple éĺementaire d' application

***Exemple 1.2.1 (Marche aléatoire symétrique).*** *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telle que*

$$\mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2} \qquad et \qquad \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}.$$

*On définit le processus $(S_n)_{n\geq 0}$ par*

$$S_0 = 0 \qquad et \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad n \geq 1.$$

*Le processus $(S_n)_{n\geq 0}$ est appelé marche aléatoire symétrique. À chaque instant, le système effectue un déplacement :*

*– d'une unité vers la droite avec une probabilité $\frac{1}{2}$,*

*– d'une unité vers la gauche avec une probabilité $\frac{1}{2}$.*

*Ce processus est une chaîne de Markov puisque l'état futur dépend uniquement de l'état présent.*

*En effet, on a*

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1},$$

*où la variable aléatoire $X_{n+1}$ est indépendante du passé du processus.*

*Pour tous $i_0, \ldots, i_{n-1}, i, j \in \mathbb{Z}$ tels que*

$$\mathbb{P}(S_n = i, S_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, S_0 = i_0) > 0,$$

*on a :*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(S_{n+1} = j \mid S_n = i, S_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, S_0 = i_0) \\
&= \frac{\mathbb{P}(S_{n+1} = j, S_n = i, S_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, S_0 = i_0)}{\mathbb{P}(S_n = i, S_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, S_0 = i_0)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = j - i, S_n = i, S_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, S_0 = i_0)}{\mathbb{P}(S_n = i, S_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, S_0 = i_0)} \\
&= \mathbb{P}(X_{n+1} = j - i) \qquad \textit{(par indépendance)} \\
&= \mathbb{P}(S_{n+1} = j \mid S_n = i).
\end{aligned}$$

*Ainsi,*

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = j \mid S_n = i, S_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, S_0 = i_0) = \mathbb{P}(S_{n+1} = j \mid S_n = i).$$

*La propriété fondamentale des chaînes de Markov est appelée propriété de Markov. Elle exprime le fait que l'évolution future du système dépend uniquement de son état présent et non des états passés.*

*Mathématiquement :*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1}, \ldots, X_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i).$$

*Cette propriété traduit l'absence de mémoire du processus markovien [1, 2].*

*Les chaînes de Markov sont aussi qualifiées de processus sans mémoire.*

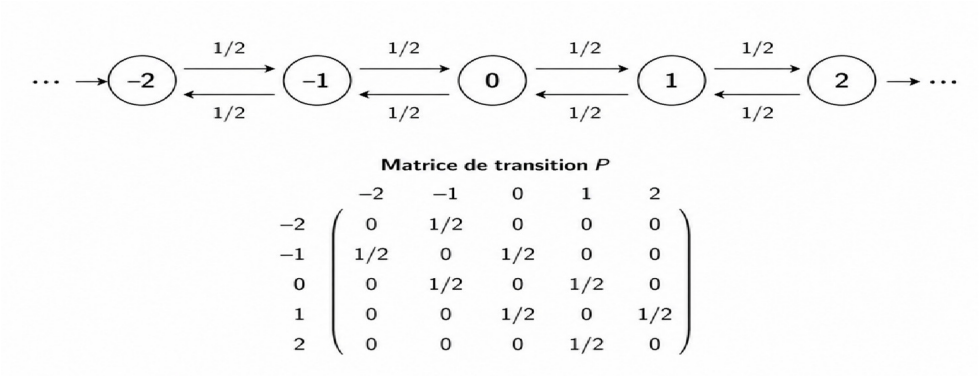


FIGURE 1.1 – Illustration d'une marche aléatoire symétrique.

***Exemple 1.2.2 (Processus de Galton-Watson).*** *Le processus de Galton-Watson est un modèle probabiliste utilisé pour étudier l'évolution d'une population au cours des générations successives. Il est notamment utilisé en démographie, en biologie et dans l'étude de certains phénomènes de propagation.*

*On note $Z_n$ le nombre d'individus présents à la génération n. On suppose que chaque individu de la génération n produit un nombre aléatoire de descendants selon une même loi de probabilité. Si $X_{n,k}$ désigne le nombre de descendants du k-ième individu de la génération n, alors on peut écrire :*

$$Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n,k}.$$

*Les variables aléatoires $X_{n,k}$ sont supposées indépendantes et identiquement distribuées. Ainsi, conditionnellement à la valeur de $Z_n$, la loi de $Z_{n+1}$ ne dépend pas des générations précédentes $Z_0, Z_1, \ldots, Z_{n-1}$. On a*

*donc :*

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = j \mid Z_n = i, Z_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, Z_0 = i_0) = \mathbb{P}(Z_{n+1} = j \mid Z_n = i).$$

*Par conséquent, le processus $(Z_n)_{n\geq 0}$ vérifie la propriété de Markov et constitue une chaîne de Markov à temps discret.*

*Dans ce modèle, l'état 0 joue un rôle particulier : lorsque $Z_n = 0$, la population est éteinte et elle ne peut plus réapparaître. On parle alors d'extinction du processus, que l'on peut écrire :*

$$\mathbb{P}(extinction) = P(\exists n \in \mathbb{N} : Z_n = 0).$$

*Ainsi, le processus de Galton-Watson fournit un exemple classique de chaîne de Markov permettant de représenter l'évolution aléatoire d'un système de génération en génération ( voir [1, 13]).*

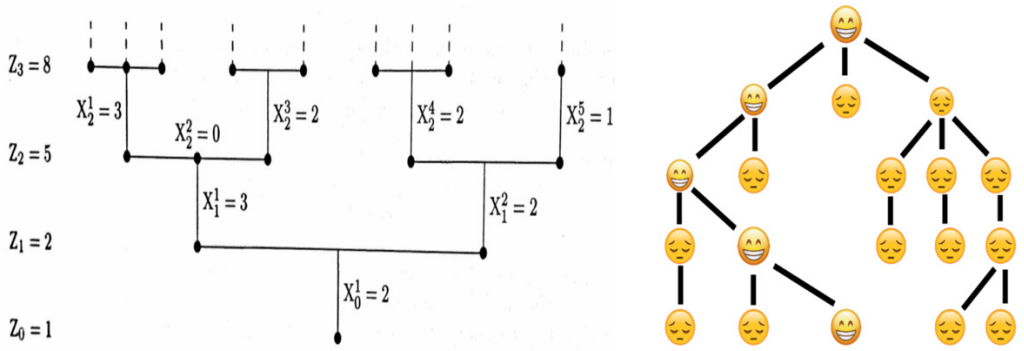


FIGURE 1.2 – Arbre représentant un processus de Galton-Watson.

***Remarque 1.2.4.*** *Ces exemples illustrent le principe général des chaînes de Markov : un système évolue progressivement d'un état à un autre selon des probabilités de transition. Dans la suite de ce mémoire, cette idée sera adaptée au cadre urbain, où les états pourront représenter différentes fonctions spatiales, comme les zones résidentielles, commerciales, industrielles ou les espaces verts. Ainsi, les exemples précédents servent de base théorique avant l'application des chaînes de Markov à la planification des nouvelles villes ( voir [5, 13]).*

### 1.2.3 Classification des états

*La classification des états constitue une étape importante dans l'étude qualitative des chaînes de Markov. Elle permet de décrire le rôle de chaque état dans l'évolution du processus et de préparer l'analyse de son comportement à long terme ( voir [1, 8, 13]).*

*Dans une chaîne de Markov, les états ne jouent pas toujours le même rôle. Certains états peuvent communiquer entre eux, certains peuvent être revisités plusieurs fois, tandis que d'autres peuvent être quittés définitivement. Cette distinction permet de mieux comprendre la structure globale de la chaîne.*

*Les principales formes de classification des états sont les suivantes :*

- *les états communicants ;*
- *les états récurrents ;*
- *les états transitoires ;*
- *les états périodiques ou apériodiques ;*
- *les classes fermées et les classes récurrentes.*

*Ainsi, la classification des états permet d'identifier les parties stables du système et celles qui peuvent évoluer vers d'autres états. Dans le cadre de la modélisation urbaine, cette idée sera utilisée pour distinguer les configurations spatiales susceptibles de se stabiliser de celles qui peuvent se transformer au cours du temps ( voir aussi [5, 13]).*

## *1.3 Structure mathématique des chaînes de Markov*

### 1.3.1 Matrice de transition et graphe

***Définition 1.3.1.*** *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène à temps discret définie sur un espace d'états fini $E = \{1, 2, \ldots, M\}$.*

*Pour tous $i, j \in E$, la probabilité de transition de l'état $i$ vers l'état $j$ en une étape est définie par*

$$p_{ij} = \mathbb{P}\left(X_{n+1} = j \mid X_n = i\right).$$

*La matrice de transition associée à la chaîne est la matrice carrée*

$$P = \left(p_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq M}.$$

*Chaque coefficient $p_{ij}$ mesure la probabilité de passage de l'état $i$ vers l'état $j$ en une seule étape. Comme la chaîne est homogène, cette probabilité ne dépend pas de l'instant $n$, mais uniquement des deux états $i$ et $j$.*

*La matrice de transition peut s'écrire sous la forme*

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1M} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M1} & p_{M2} & \cdots & p_{MM} \end{pmatrix}.$$

*Pour que P soit une matrice de transition, ses coefficients doivent vérifier les deux conditions suivantes :*

$$p_{ij} \geq 0, \qquad \forall\, i, j \in E,$$

*et*

$$\sum_{j=1}^{M} p_{ij} = 1, \qquad \forall\, i \in E.$$

*Ainsi, chaque ligne de P constitue une loi de probabilité sur l'espace d'états E. La matrice P est donc une matrice stochastique par lignes [1, 13].*

***Proposition 1.3.1.*** La matrice de transition $P$ admet la valeur propre 1. Plus précisément, si

$$e = (1, 1, \ldots, 1)^T,$$

alors

$$Pe = e.$$

***Preuve 1.3.1.*** Pour tout état $i \in E$, on a

$$(Pe)_i = \sum_{j=1}^{M} p_{ij}.$$

Or, comme $P$ est une matrice de transition, la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1. Donc

$$(Pe)_i = 1, \qquad \forall\, i \in E.$$

Ainsi,

$$Pe = e.$$

Par conséquent, $e$ est un vecteur propre de $P$ associé à la valeur propre 1.

*À toute chaîne de Markov finie, on peut associer un graphe orienté appelé graphe de transition. Les sommets*

*du graphe représentent les états du système. Il existe un arc orienté de l'état i vers l'état j lorsque*

$$p_{ij} > 0.$$

*Cet arc peut être pondéré par la probabilité $p_{ij}$, ce qui permet de visualiser les passages possibles entre les différents états de la chaîne [1, 8].*

### 1.3.2 Probabilités de transition à $n$ étapes

***Définition 1.3.2.*** *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P. Pour tous $i, j \in E$, la probabilité de passer de l'état i à l'état j en n étapes est définie par*

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}\left(X_n = j \mid X_0 = i\right).$$

*La matrice des probabilités de transition en n étapes est notée*

$$P^{(n)} = \left(p_{ij}^{(n)}\right)_{1\leq i,j\leq M}.$$

*On adopte la convention*

$$P^{(0)} = I_M,$$

*où $I_M$ désigne la matrice identité d'ordre $M$.*

*Dans le cas d'une chaîne homogène, les probabilités de transition en n étapes sont obtenues par les puissances successives de la matrice de transition :*

$$P^{(n)} = P^n, \qquad n \geq 0.$$

*Ainsi, le coefficient $(i, j)$ de la matrice $P^n$ représente la probabilité que la chaîne se trouve dans l'état j après n étapes, sachant qu'elle était initialement dans l'état i [1, 13].*

***Définition 1.3.3.*** *La loi initiale de la chaîne est la distribution de la variable aléatoire $X_0$. Elle est représentée par le vecteur ligne*

$$\mu_0 = (\mu_0(1), \mu_0(2), \ldots, \mu_0(M)),$$

*où*

$$\mu_0(i) = \mathbb{P}\left(X_0 = i\right), \qquad i \in E.$$

*Pour tout $n \geq 0$, on note $\mu_n$ la loi marginale de $X_n$. Elle est donnée par le vecteur ligne*

$$\mu_n = (\mu_n(1), \mu_n(2), \ldots, \mu_n(M)),$$

*où*

$$\mu_n(j) = \mathbb{P}(X_n = j), \qquad j \in E.$$

***Proposition 1.3.2.*** Si $\mu_0$ désigne la distribution initiale de la chaîne, alors la distribution de la chaîne après $n$ étapes est donnée par

$$\mu_n = \mu_0 P^n.$$

***Preuve 1.3.2.*** Pour tout état $j \in E$, d'après la formule des probabilités totales, on a

$$\mathbb{P}(X_n = j) = \sum_{i=1}^{M} \mathbb{P}(X_0 = i)\, \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i).$$

Or,

$$\mathbb{P}(X_0 = i) = \mu_0(i)$$

et

$$\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = p_{ij}^{(n)}.$$

Donc

$$\mu_n(j) = \sum_{i=1}^{M} \mu_0(i) p_{ij}^{(n)}.$$

Comme $P^{(n)} = P^n$, cette relation s'écrit sous forme matricielle :

$$\mu_n = \mu_0 P^{(n)} = \mu_0 P^n.$$

*Cette relation explique l'origine du vecteur $\mu_n$. Il ne représente pas une nouvelle matrice de transition, mais la distribution de probabilité de la chaîne à l'instant n. Dans le cadre de la modélisation urbaine, $\mu_0$ peut représenter la répartition initiale des états spatiaux, tandis que $\mu_n$ décrit leur répartition probable après plusieurs périodes de transition [5, 13].*

### 1.3.3 Équation de Chapman-Kolmogorov

*L'équation de Chapman-Kolmogorov est un résultat fondamental dans l'étude des chaînes de Markov. Elle permet de calculer les probabilités de transition sur plusieurs étapes à partir des probabilités de transition intermédiaires, le théorème suivant se trouve dans [13].*

***Théoréme 1.3.1.*** Pour tous entiers $m, n \geq 0$ et pour tous états $i, j \in E$, on a :

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}.$$

***Preuve.*** *En utilisant la formule des probabilités totales relativement à l'état intermédiaire k, on obtient :*

$$\mathbb{P}(X_{m+n} = j \mid X_0 = i) = \sum_{k \in E} \mathbb{P}(X_{m+n} = j, X_m = k \mid X_0 = i).$$

*Puis :*

$$\mathbb{P}(X_{m+n} = j, X_m = k \mid X_0 = i) = \mathbb{P}(X_{m+n} = j \mid X_m = k, X_0 = i)\mathbb{P}(X_m = k \mid X_0 = i).$$

*Par la propriété de Markov :*

$$\mathbb{P}(X_{m+n} = j \mid X_m = k, X_0 = i) = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = k).$$

*Ainsi :*

$$\mathbb{P}(X_{m+n} = j \mid X_0 = i) = \sum_{k \in E} \mathbb{P}(X_m = k \mid X_0 = i)\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = k).$$

*Donc :*

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}.$$

***Remarque 1.3.1.*** *Sous forme matricielle, cette relation s'écrit :*

$$P^{(m+n)} = P^{(m)} P^{(n)}.$$

*En particulier, pour $m = n = 1$, on obtient :*

$$P^{(2)} = P^2.$$

***Interprétation urbaine.*** *Dans le cadre de la planification d'une nouvelle ville, l'équation de Chapman-Kolmogorov permet d'analyser l'évolution progressive des fonctions urbaines sur plusieurs périodes. Une*

*transformation future peut être décomposée en transitions intermédiaires, ce qui permet d'étudier des scénarios de développement à court, moyen et long terme.*

*Dans ce travail, cette relation servira notamment à interpréter l'évolution progressive des fonctions urbaines à partir d'une matrice de transition, en reliant les changements successifs des états spatiaux aux scénarios de planification des nouvelles villes [5, 13].*

### 1.3.4 Communication entre états

*La notion de communication constitue un concept fondamental dans l'étude des chaînes de Markov. Elle permet d'identifier les relations existantes entre les différents états de l'espace d'états et de caractériser la structure globale du système.*

***Définition 1.3.4.*** *Un état $j$ est dit accessible à partir d'un état $i$ s'il existe un entier $n \geq 0$ tel que :*

$$p_{ij}^{(n)} > 0$$

*Autrement dit, il existe une probabilité strictement positive de passer de l'état $i$ vers l'état $j$ après un nombre fini de transitions.*

***Définition 1.3.5.*** *Deux états $i$ et $j$ sont dits communicants lorsque chacun est accessible à partir de l'autre, et on le note par :*

$$i \leftrightarrow j$$

*Cette relation définit des classes de communication qui jouent un rôle essentiel dans l'analyse du comportement dynamique des systèmes markoviens.*

***Proposition 1.3.1***

*La relation de communication constitue une relation d'équivalence sur l'espace des états $E$.*

***Preuve***

— *Réflexivité :*

$$p_{ii}^{(0)} = 1 > 0$$

*donc*

$$i \leftrightarrow i$$

— *Symétrie : Par définition,*

$$i \leftrightarrow j$$

*implique immédiatement*

$$j \leftrightarrow i$$

— *Transitivité : Supposons que*

$$i \leftrightarrow j \qquad et \qquad j \leftrightarrow k$$

*Il existe alors des entiers* $n, m \geq 0$ *tels que*

$$p_{ij}^{(n)} > 0 \qquad et \qquad p_{jk}^{(m)} > 0$$

*D'après la formule de Chapman-Kolmogorov :*

$$p_{ik}^{(n+m)} = \sum_{r \in E} p_{ir}^{(n)} p_{rk}^{(m)}$$

*d'où*

$$p_{ik}^{(n+m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0$$

*Par conséquent*

$$i \rightarrow k$$

*et de manière analogue*

$$k \rightarrow i$$

*Ainsi*

$$i \leftrightarrow k$$

*La relation est donc réflexive, symétrique et transitive.*

*Cette propriété permet de partitionner l'espace des états en classes communicantes [1, 13].*

***Exemple :***

*Dans le modèle de la ruine de joueur, les états* 0 *et* 4 *sont absorbants.*

*Par contre, on a :*

$$1 \longrightarrow 0, \qquad 1 \leftrightarrow 2, \qquad 2 \leftrightarrow 3, \qquad 3 \longrightarrow 4.$$

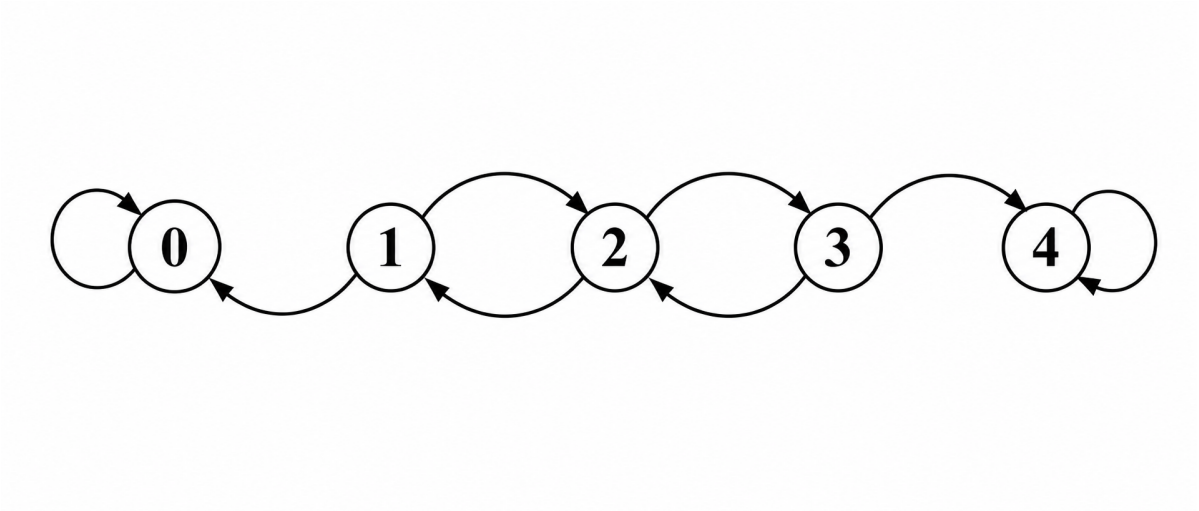


FIGURE 1.3 – Exemple de communication entre états et états absorbants.

*Dans le cadre de la modélisation urbaine, la notion de communication permet d'interpréter la possibilité de passage entre différentes fonctions spatiales. Deux états urbains peuvent être considérés comme communicants lorsque le passage de l'un vers l'autre est possible, directement ou après plusieurs transitions, avec une probabilité strictement positive [5, 13].*

### 1.3.5 Chaînes irréductibles

***Définition 1.3.6.*** *Une chaîne de Markov est dite irréductible lorsque tous les états communiquent entre eux. Autrement dit :*

$$\forall i, j \in E, \qquad i \leftrightarrow j$$

*Cette propriété traduit la possibilité d'atteindre n'importe quel état à partir de n'importe quel autre état de l'espace considéré.*

***Proposition 1.3.2*** *Dans une chaîne irréductible, tous les états appartiennent à une unique classe de communication.*

***Preuve*** *Par définition de l'irréductibilité :*

$$\forall i, j \in E, \qquad i \leftrightarrow j$$

*Tous les états communiquent donc entre eux. L'ensemble E forme ainsi une seule classe communicante.*

*L'irréductibilité joue un rôle fondamental dans l'étude du comportement asymptotique des chaînes de Markov [1, 13].*

*Dans une interprétation urbaine, l'irréductibilité signifie que toutes les fonctions spatiales considérées restent potentiellement accessibles les unes à partir des autres. Cette hypothèse traduit un système urbain fortement connecté, où chaque configuration peut, au moins théoriquement, évoluer vers une autre après un certain nombre de transitions [5, 13].*

### 1.3.6 Périodicité des états

***Définition 1.3.7.*** *La périodicité permet de caractériser la régularité des retours vers un état donné. Pour un état i, sa période est définie par :*

$$d(i) = \text{pgcd}\{n \geq 1 : p_{ii}^{(n)} > 0\},$$

*où* pgcd *désigne le plus grand commun diviseur.*

***Remarque 1.3.2.*** *Lorsque $d(i) = 1$,l'état i est dit apériodique.*

***Proposition 1.3.3.*** *Si deux états communiquent, alors ils possèdent la même période.*

***Preuve.*** *Supposons que*

$$i \leftrightarrow j.$$

*Il existe alors des entiers $m, n \geq 0$ tels que*

$$p_{ij}^{(m)} > 0 \qquad et \qquad p_{ji}^{(n)} > 0.$$

*Ainsi, par la formule de Chapman-Kolmogorov, on a*

$$p_{ii}^{(m+n)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{ji}^{(n)} > 0.$$

*Donc*

$$d(i) \mid (m+n).$$

*Soit maintenant un entier $l \geq 1$ tel que*

$$p_{jj}^{(l)} > 0.$$

*Alors,*

$$p_{ii}^{(m+l+n)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(l)} p_{ji}^{(n)} > 0.$$

*Par conséquent,*

$$d(i) \mid (m + l + n).$$

*Comme* $d(i) \mid (m + n)$*, on obtient*

$$d(i) \mid l.$$

*Ainsi,* $d(i)$ *divise tous les temps de retour possibles vers* $j$*, donc*

$$d(i) \mid d(j).$$

*Par symétrie, on obtient également*

$$d(j) \mid d(i).$$

*Ainsi,*

$$d(i) = d(j).$$

*Donc deux états communicants possèdent la même période [1, 13].*

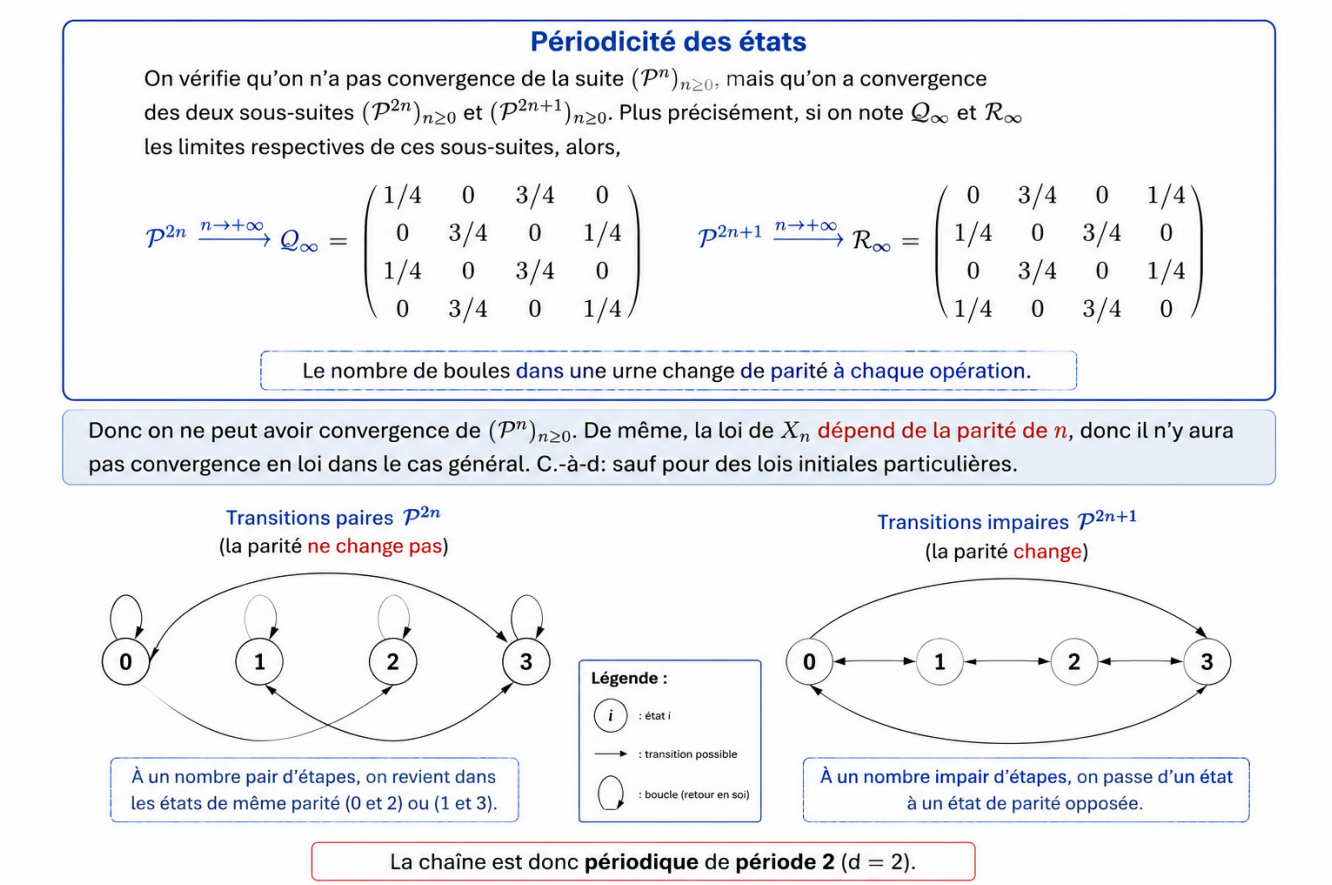


FIGURE 1.4 – Illustration de la périodicité d'une chaîne de Markov.

### 1.3.7 États récurrents et états transitoires

*La distinction entre états récurrents et états transitoires est essentielle pour étudier le comportement à long terme d'une chaîne de Markov.*

*Un état $i \in E$ est dit récurrent lorsque, partant de cet état, la chaîne y revient avec probabilité égale à* 1. *À l'inverse, un état i est dit transitoire lorsque la probabilité de ne jamais revenir à cet état est strictement positive.*

*Les états récurrents correspondent à des états que la chaîne est amenée à revisiter, tandis que les états transitoires représentent des états qui peuvent être quittés définitivement. Cette distinction joue un rôle important dans l'étude asymptotique des chaînes de Markov [1, 13].*

### 1.3.8 Ensembles fermés et classes récurrentes

*Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov d'espace d'états $E$. Un sous-ensemble $F \subset E$ est dit fermé lorsque, une fois que la chaîne entre dans $F$, elle ne peut plus en sortir. Autrement dit, pour tout $i \in F$ et tout $j \notin F$, on a*

$$p_{ij} = 0.$$

*Une classe de communication fermée joue un rôle important dans l'étude du comportement à long terme d'une chaîne de Markov. Dans une chaîne de Markov finie, toute classe fermée et irréductible est constituée d'états récurrents [1, 8, 13].*

***Proposition 1.3.4.*** *Dans une chaîne de Markov finie, toute classe fermée et irréductible est constituée uniquement d'états récurrents.*

***Preuve.*** *Considérons une classe $F$ fermée et irréductible d'une chaîne finie. Comme $F$ est fermée, toute trajectoire qui atteint $F$ y demeure. De plus, l'irréductibilité garantit que tous les états de $F$ communiquent entre eux. Ainsi, aucun état de $F$ ne peut être quitté définitivement, et chaque état de $F$ est revisité avec probabilité* 1. *Par conséquent, tous les états de $F$ sont récurrents.*

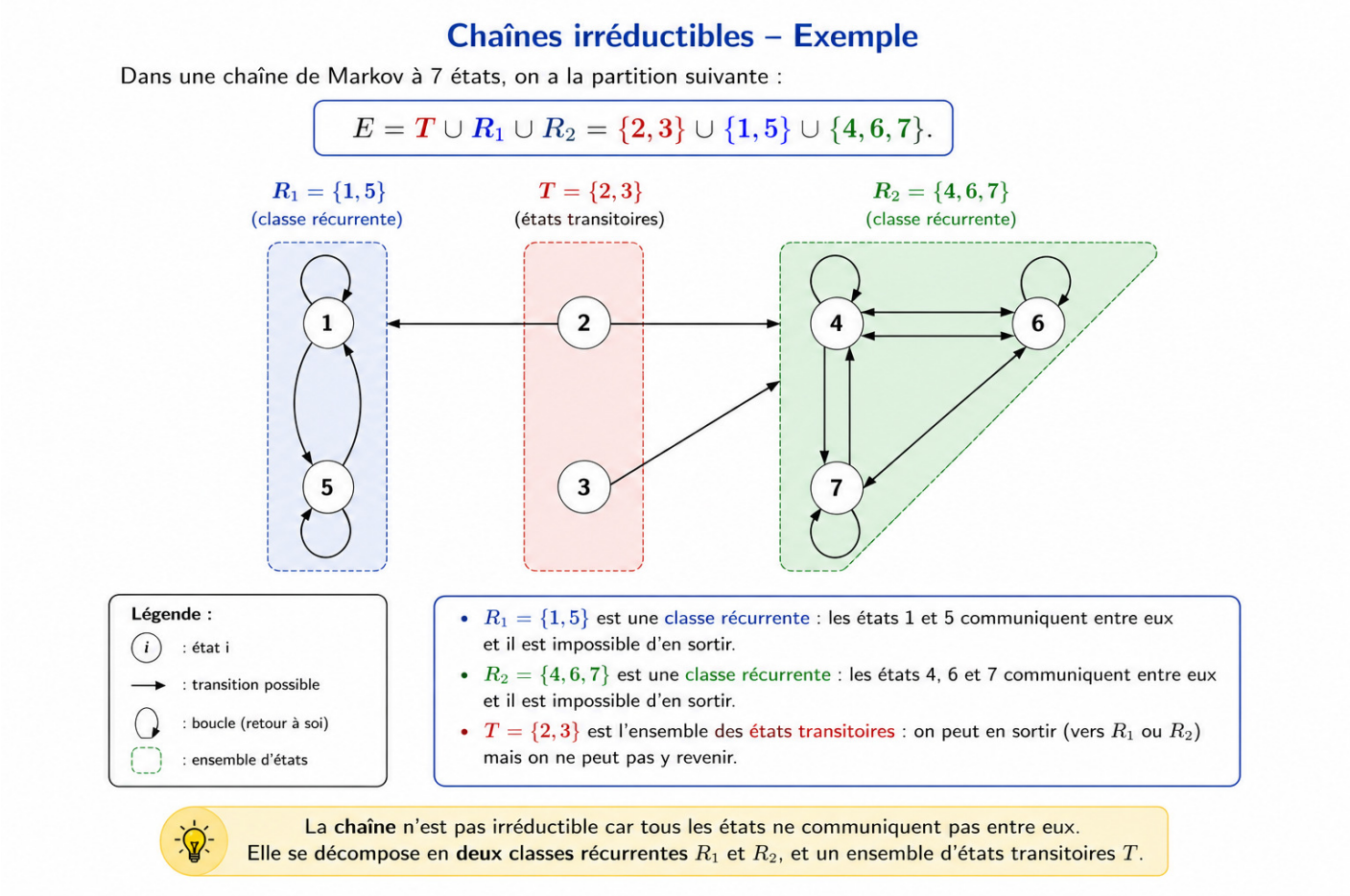


FIGURE 1.5 – Partition de l'espace des états en classes récurrentes et états transitoires.

### 1.3.9 Distribution stationnaire

*Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène définie sur un espace d'états fini $E$, de matrice de transition $P$. Une distribution de probabilité $\pi = (\pi_i)_{i\in E}$ est dite stationnaire si elle vérifie*

$$\pi_i \geq 0, \qquad \sum_{i\in E} \pi_i = 1,$$

*et*

$$\pi P = \pi.$$

*Cette relation signifie que si la chaîne possède la distribution $\pi$ à un instant donné, alors elle conserve cette même distribution après une transition. La distribution stationnaire représente donc un état d'équilibre probabiliste de la chaîne de Markov [1, 8, 13].*

### 1.3.10 Théorème de convergence

*Le théorème de convergence décrit le comportement à long terme d'une chaîne de Markov. Il précise les conditions sous lesquelles les probabilités de transition convergent vers une distribution stationnaire.*

***Théorème.*** *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov finie, irréductible et apériodique, de matrice de transition $P$. Alors il existe une unique distribution stationnaire $\pi = (\pi_i)_{i\in E}$ vérifiant*

$$\pi P = \pi,$$

*et, pour tous $i, j \in E$,*

$$\lim_{n\to+\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j.$$

*Ce résultat signifie que,lorsque le nombre de transitions tend vers l'infini, l'influence de l'état initial disparaît progressivement. La chaîne converge alors vers un comportement stable décrit par la distribution stationnaire $\pi$ [1, 8, 13].*

*Dans le cadre de la modélisation urbaine, ce résultat permet d'étudier la répartition probable des fonctions spatiales à long terme, lorsque les transitions entre les différents états urbains sont représentées par une matrice de transition [5, 13].*

### 1.3.11 Applications du théorème de convergence

*Le théorème de convergence permet d'étudier le comportement à long terme d'une chaîne de Markov. Il montre que, sous certaines conditions, l'influence de l'état initial disparaît progressivement et que la loi de la chaîne converge vers une distribution stationnaire $\pi$ [1, 13].*

*Soit $\mu_0$ la distribution initiale de la chaîne, écrite sous forme de vecteur ligne. D'après la relation étudiée précédemment, la distribution de la chaîne après n étapes est donnée par*

$$\mu_n = \mu_0 P^n.$$

*Ainsi, lorsque la suite des puissances $(P^n)_{n\geq 0}$ converge vers une matrice limite $P_\infty$, on obtient*

$$\mu_n \longrightarrow \mu_\infty = \mu_0 P_\infty.$$

*Dans le cas d'une chaîne de Markov finie, irréductible et apériodique, la matrice $P^n$ converge vers une matrice*

*dont toutes les lignes sont égales à la distribution stationnaire $\pi$. Autrement dit,*

$$P^n \longrightarrow P_\infty,$$

*avec*

$$P_\infty = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_M \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_M \end{pmatrix}.$$

*Par conséquent, pour toute distribution initiale $\mu_0$, on a*

$$\mu_n = \mu_0 P^n \longrightarrow \pi.$$

***Exemple 1.3.1.*** Considérons une chaîne de Markov à deux états

$$E = \{0, 1\},$$

de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix},$$

où $0 < \alpha < 1$ et $0 < \beta < 1$. Le coefficient $\alpha$ représente la probabilité de passer de l'état 0 vers l'état 1, tandis que le coefficient $\beta$ représente la probabilité de passer de l'état 1 vers l'état 0.

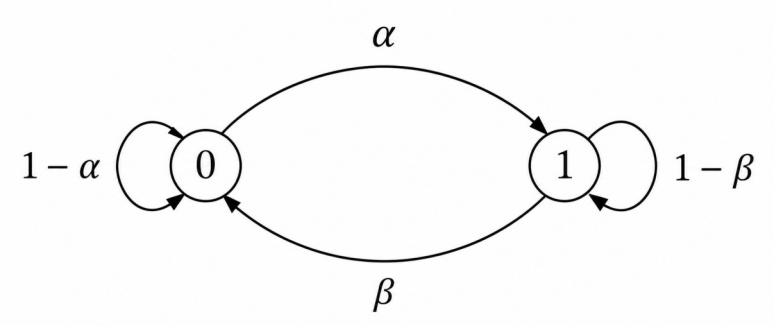


FIGURE 1.6 – Graphe de transition d'une chaîne de Markov à deux états

*La distribution stationnaire de cette chaîne est donnée par*

$$\pi = \left( \frac{\beta}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right).$$

***Preuve 1.3.3.*** On vérifie d'abord que $\pi$ est une loi de probabilité. En effet,

$$\frac{\beta}{\alpha+\beta}+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=1.$$

Il reste à vérifier que $\pi P=\pi$. On a

$$\pi P=\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta},\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\begin{pmatrix}1-\alpha & \alpha\\ \beta & 1-\beta\end{pmatrix}.$$

Pour la première composante, on obtient

$$\frac{\beta}{\alpha+\beta}(1-\alpha)+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\beta=\frac{\beta-\alpha\beta+\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}.$$

Pour la deuxième composante, on obtient

$$\frac{\beta}{\alpha+\beta}\alpha+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-\beta)=\frac{\alpha\beta+\alpha-\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

Donc

$$\pi P=\pi.$$

Ainsi, $\pi$ est bien une distribution stationnaire de la chaîne.

*Dans ce cas, la limite des puissances de la matrice de transition est*

$$P^n\longrightarrow P_\infty=\begin{pmatrix}\frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\\ \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\end{pmatrix}.$$

*Par conséquent, quelle que soit la distribution initiale $\mu_0$, on obtient*

$$\mu_n=\mu_0P^n\longrightarrow\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta},\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right).$$

***Remarque 1.3.3.*** *La condition d'apériodicité est importante. Par exemple, si $\alpha=\beta=1$, alors*

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

*Dans ce cas,*

$$P^{2n} = I_2$$

*et*

$$P^{2n+1} = P.$$

*La suite $(P^n)_{n\geq 0}$ ne converge donc pas. Cela montre que la convergence n'est pas automatique pour toutes les chaînes de Markov.*

*Dans le cadre de la modélisation urbaine, ce résultat peut être interprété comme une stabilisation progressive du système. Si les états représentent différentes fonctions spatiales, alors la distribution stationnaire $\pi$ peut décrire la répartition probable des fonctions urbaines à long terme. Le théorème de convergence fournit ainsi un outil utile pour analyser la stabilité asymptotique d'un système urbain modélisé par une matrice de transition [5, 13].*

### 1.3.12 Chaînes réversibles

***Définition 1.3.8.*** *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition*

$$P = \left(p_{ij}\right)_{i,j\in E}.$$

*La chaîne est dite réversible par rapport à une distribution de probabilité*

$$\pi = (\pi_i)_{i\in E}$$

*si, pour tous $i, j \in E$, on a*

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}.$$

*Cette relation est appelée condition de balance détaillée. Elle exprime un équilibre probabiliste entre les transitions directes de l'état $i$ vers l'état $j$ et les transitions inverses de l'état $j$ vers l'état $i$.*

***Proposition 1.3.3.*** Si une distribution de probabilité $\pi$ vérifie la condition de balance détaillée

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}, \qquad \forall\, i, j \in E,$$

alors $\pi$ est une distribution stationnaire de la chaîne.

***Preuve 1.3.4.*** Pour montrer que $\pi$ est stationnaire, il suffit de vérifier que

$$\pi P = \pi.$$

Pour tout $j \in E$, la $j$-ième composante du vecteur $\pi P$ est donnée par

$$(\pi P)_j = \sum_{i \in E} \pi_i p_{ij}.$$

En utilisant la condition de balance détaillée, on obtient

$$(\pi P)_j = \sum_{i \in E} \pi_j p_{ji}.$$

Comme $\pi_j$ ne dépend pas de l'indice $i$, on peut écrire

$$(\pi P)_j = \pi_j \sum_{i \in E} p_{ji}.$$

Or, la somme des coefficients de la ligne $j$ de la matrice de transition est égale à 1, donc

$$\sum_{i \in E} p_{ji} = 1.$$

Ainsi,

$$(\pi P)_j = \pi_j.$$

Par conséquent,

$$\pi P = \pi.$$

Donc $\pi$ est une distribution stationnaire de la chaîne.

*Les chaînes réversibles sont importantes parce qu'elles permettent de vérifier la stationnarité d'une distribution à partir d'une relation plus simple que le calcul direct de $\pi P = \pi$. Elles interviennent notamment dans l'étude des systèmes dynamiques, des modèles de diffusion, des réseaux et des méthodes probabilistes de simulation.*

*Dans une interprétation urbaine, une chaîne réversible peut représenter une situation d'équilibre entre deux types de transitions spatiales opposées. Toutefois, dans les systèmes urbains réels, les transitions ne sont pas toujours symétriques. La réversibilité doit donc être considérée comme une propriété mathématique particulière, utile pour l'analyse théorique, mais qui n'est pas toujours vérifiée dans les phénomènes urbains [5, 13].*

### 1.3.13 Applications probabilistes des chaînes de Markov

*Les chaînes de Markov possèdent plusieurs applications dans différents domaines scientifiques et techniques.*

*Elles sont utilisées dans :*

- *les systèmes de files d'attente ;*
- *les réseaux de communication ;*
- *l'intelligence artificielle ;*
- *l'analyse économique ;*
- *les systèmes biologiques ;*
- *les modèles urbains et architecturaux.*

*Grâce à leur capacité à représenter des transitions probabilistes entre différents états, les chaînes de Markov constituent des outils mathématiques efficaces dans l'étude des systèmes dynamiques complexes.*

*Après l'étude des propriétés théoriques des chaînes de Markov, nous présentons maintenant quelques exemples classiques permettant d'illustrer le fonctionnement des systèmes markoviens [1, 3, 13].*

### 1.3.14 Comportement asymptotique des chaînes de Markov

*Le comportement asymptotique d'une chaîne de Markov correspond à l'étude de son évolution lorsque le nombre de transitions tend vers l'infini. Cette analyse permet de déterminer si le système tend vers une organisation stable à long terme [1, 8, 13].*

*Lorsque la chaîne est finie, irréductible et apériodique, les probabilités de transition convergent vers une distribution stationnaire $\pi$. Autrement dit, pour tous états $i, j \in E$, on a*

$$\lim_{n \to +\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j.$$

*Cela signifie que, à long terme, la probabilité d'être dans l'état $j$ ne dépend plus de l'état initial $i$, mais seulement de la distribution stationnaire de la chaîne.*

*Ainsi, l'étude asymptotique permet de comprendre la stabilité probabiliste d'un système dynamique. Elle constitue une étape importante avant l'application des chaînes de Markov à des systèmes plus complexes, notamment les systèmes urbains et architecturaux*

## *1.4 Ouverture vers les systèmes urbains*

*Les chaînes de Markov ne sont pas uniquement des outils théoriques destinés à l'étude abstraite des systèmes aléatoires. Elles peuvent également être utilisées pour représenter des phénomènes évolutifs dans lesquels un système passe progressivement d'un état à un autre selon des probabilités de transition.*

*Dans le domaine urbain, une ville peut être considérée comme un système dynamique composé de plusieurs fonctions spatiales : zones résidentielles, zones commerciales, zones industrielles, équipements, espaces verts ou zones non urbanisées. L'évolution de ces fonctions au cours du temps peut alors être interprétée comme une succession de transitions entre états urbains [5, 11, 12].*

*Cette représentation permet d'utiliser une matrice de transition pour analyser l'évolution probable d'un espace planifié. Elle offre ainsi un cadre mathématique utile pour comparer différents scénarios d'aménagement, étudier les transformations spatiales possibles et accompagner la prise de décision dans la construction des nouvelles villes [5, 13].*

*Les notions étudiées dans ce chapitre, notamment les matrices de transition, les probabilités à plusieurs étapes, les classes récurrentes, les distributions stationnaires et le comportement asymptotique, serviront de base au chapitre suivant consacré aux applications des chaînes de Markov dans l'architecture et l'urbanisme.*

## *Conclusion*

*Dans ce chapitre, nous avons présenté les principaux outils mathématiques nécessaires à l'étude des chaînes de Markov. Nous avons d'abord rappelé quelques notions de base en probabilité et en processus stochastiques, puis nous avons introduit la propriété de Markov, les matrices de transition et les probabilités de transition à plusieurs étapes.*

*Nous avons ensuite étudié les principales propriétés qualitatives des chaînes de Markov, notamment la communication entre états, l'irréductibilité, la périodicité, la récurrence, les classes fermées, la distribution stationnaire et le comportement asymptotique. Ces notions permettent d'analyser l'évolution d'un système probabiliste à court, moyen et long terme.*

*Ainsi, ce chapitre constitue le cadre théorique sur lequel s'appuiera le chapitre suivant. Les chaînes de Markov y seront utilisées comme outil de modélisation probabiliste afin de représenter et d'analyser les transitions possibles entre différents états urbains dans le contexte de la planification des nouvelles villes.*

# *CHAPITRE 02 :*

# *Applications des chaînes de Markov dans l'architecture et l'urbanisme*

## 2.1 Principes retenus pour la construction du modèle

La construction du modèle appliqué repose sur plusieurs principes qui permettent de passer de l'observation urbaine à une représentation mathématique exploitable. Ces principes traduisent les hypothèses de base nécessaires à l'utilisation d'une chaîne de Markov dans un contexte spatial.

Le premier principe consiste à considérer que l'espace urbain étudié peut être découpé en un nombre fini de fonctions principales. Chaque portion du territoire appartient alors, à un instant donné, à une fonction urbaine dominante. Cette simplification est nécessaire pour transformer une réalité spatiale complexe en un espace d'états fini.

Le deuxième principe repose sur la propriété de Markov. On considère que l'évolution future d'une portion urbaine dépend principalement de sa fonction actuelle. Autrement dit, la fonction observée à l'étape suivante est étudiée à partir de la fonction présente, sans reconstruire toute l'histoire passée de la zone considérée (Voir [1, 13]).

Le troisième principe consiste à représenter chaque transformation possible par une probabilité conditionnelle. Par exemple, une zone non bâtie peut rester non bâtie, ou bien évoluer vers une zone résidentielle, commerciale, industrielle ou vers un espace ouvert. Cette possibilité de passage est décrite par une probabilité de la forme :

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i), \qquad i, j \in E.$$

Le quatrième principe consiste à regrouper l'ensemble des probabilités de transition dans une matrice carrée $P$. Les lignes de cette matrice représentent les fonctions urbaines actuelles, tandis que les colonnes représentent les fonctions possibles à l'étape suivante. Chaque ligne doit former une loi de probabilité, c'est-à-dire :

$$p_{ij} \geq 0$$

et

$$\sum_{j \in E} p_{ij} = 1.$$

Enfin, l'étude des puissances de la matrice permet d'analyser l'évolution du système sur plusieurs étapes. Les matrices $P^2$, $P^3$, $P^4$ et $P^5$ permettent d'observer si certaines fonctions urbaines se stabilisent, si certaines transitions se renforcent ou si le système tend progressivement vers une organisation plus régulière.

## 2.2 Passage de l'observation spatiale au modèle markovien

L'application du modèle markovien suit une démarche progressive. Elle commence par l'observation de la zone d'étude, puis par l'identification des principales fonctions urbaines. Ces fonctions sont ensuite transformées en états mathématiques, ce qui permet de construire une matrice de transition et d'analyser l'évolution du système par calcul matriciel.

Le quartier 300 logements d'El Alia présente plusieurs caractéristiques qui justifient son choix comme cas d'application. Il est situé dans la partie orientale de Biskra, à proximité d'axes de circulation importants, de l'Université Mohamed Khider de Biskra, de l'oued Sidi Zarzour et de plusieurs espaces encore non bâtis. Cette situation crée un contexte favorable à l'étude des transformations spatiales.

Le quartier contient des zones résidentielles, des activités commerciales le long des axes principaux, des espaces industriels ou artisanaux, des espaces verts ou ouverts, ainsi que des terrains non bâtis. Ces différentes fonctions peuvent être interprétées comme des états urbains. Leur évolution possible dans le temps peut alors être représentée à l'aide d'une chaîne de Markov.

Ce passage de l'observation spatiale au modèle mathématique permet de relier directement la réalité urbaine au cadre probabiliste étudié dans le chapitre précédent. Les notions de variable aléatoire, de probabilité conditionnelle, de matrice de transition et de puissances de matrice seront donc utilisées pour analyser la dynamique possible du quartier.

## 2.3 Supports cartographiques et codage des données spatiales

La lecture de la zone d'étude repose sur des supports cartographiques permettant d'identifier les principales fonctions urbaines du quartier. Ces supports permettent de situer le quartier 300 logements d'El Alia dans son environnement urbain, puis de distinguer les catégories d'occupation du sol qui seront utilisées dans le modèle markovien.




FIGURE 2.7 – Présentation de la zone d'étude : quartier 300 logements d'El Alia – Biskra. Source : élaboré à partir de Google Maps, 2024.

La figure 2.7 présente la localisation du quartier 300 logements dans son environnement urbain. Elle permet d'identifier les principaux repères spatiaux de la zone, notamment les axes de circulation, les équipements proches, l'oued Sidi Zarzour et les limites générales du secteur étudié.

La carte d'occupation du sol permet ensuite de distinguer les principales fonctions spatiales présentes dans la zone. Ces fonctions constituent la base du codage des états markoviens utilisés dans le modèle.

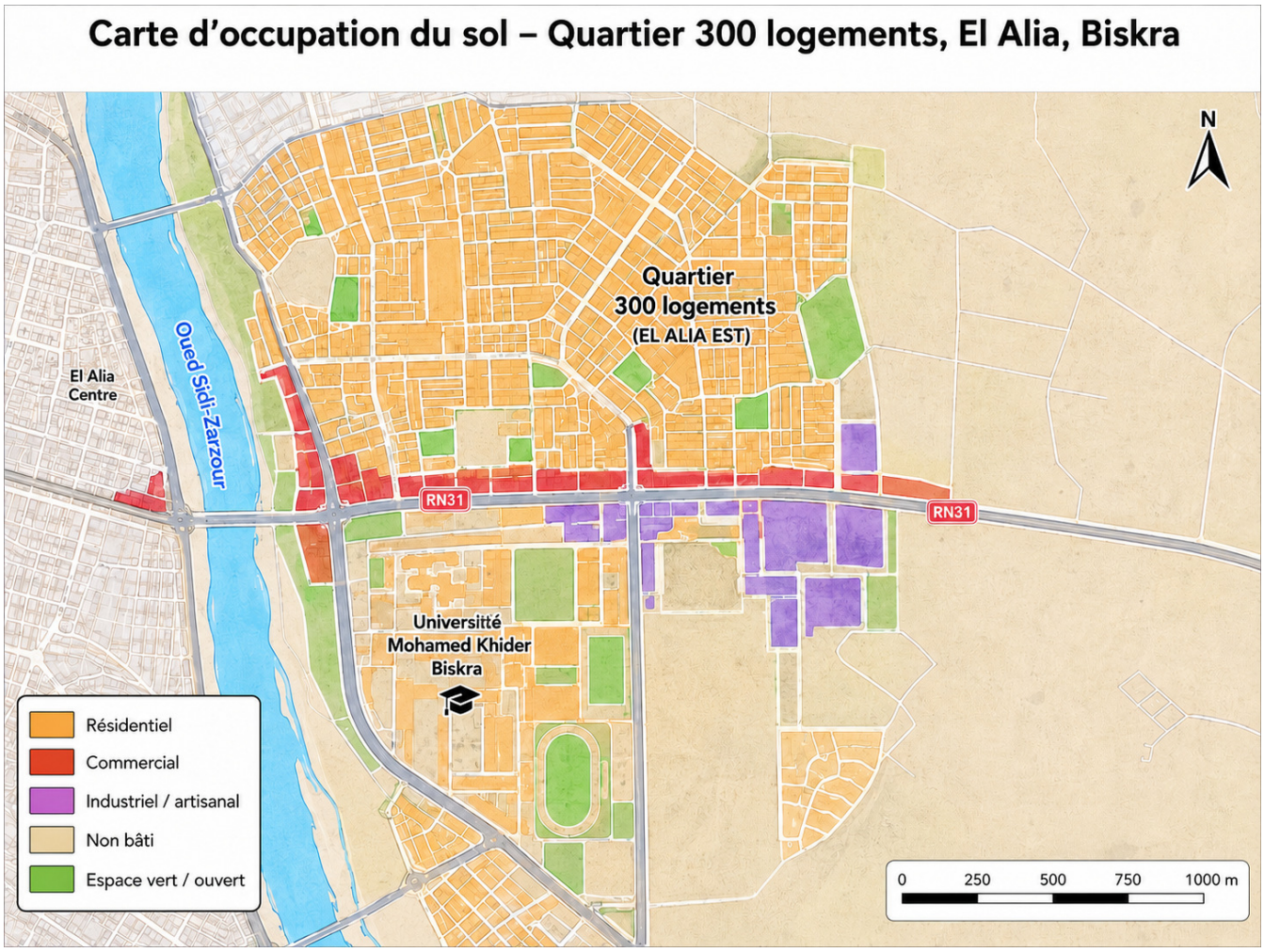


FIGURE 2.8 – Carte d'occupation du sol du quartier 300 logements d'El Alia – Biskra.

La figure 2.8 permet d'identifier les zones résidentielles, commerciales, industrielles ou artisanales, les espaces non bâtis et les espaces verts ou ouverts. Ces catégories sont ensuite transformées en états mathématiques afin de construire le modèle markovien.

## 2.4 Codage des fonctions urbaines en états markoviens

La construction du modèle markovien repose sur la discrétisation de l'espace urbain en un nombre fini d'états. Dans ce mémoire, chaque état représente une fonction dominante de l'occupation du sol dans le quartier étudié. Cette étape permet de relier l'observation urbaine au formalisme mathématique des chaînes de Markov.

On considère l'espace d'états suivant :

$$E = \{R, C, I, N, V\},$$

où :

$R$ : zone résidentielle,

$C$ : zone commerciale,

$I$ : zone industrielle ou artisanale,

$N$ : zone non bâtie,

$V$ : espace vert ou espace ouvert.

À chaque instant $n$, la variable aléatoire $X_n$ désigne la fonction urbaine occupée par une portion de l'espace étudié. Ainsi, l'événement

$$X_n = R$$

signifie que la portion considérée est résidentielle à l'instant $n$. De même, l'événement

$$X_{n+1} = C$$

signifie qu'elle devient commerciale à l'étape suivante.

La probabilité de passage d'un état urbain $i$ vers un état urbain $j$ est définie par :

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i), \qquad i, j \in E.$$

Cette probabilité est une probabilité conditionnelle, car elle décrit la possibilité d'obtenir une fonction urbaine future sachant la fonction urbaine présente. L'ensemble de ces probabilités forme la matrice de transition $P$, qui sera utilisée pour étudier l'évolution possible du quartier au cours de plusieurs étapes (Voir [1, 2, 13]).

La discrétisation en états $R$, $C$, $I$, $N$ et $V$ permet donc de construire un lien direct entre la carte d'occupation du sol et le modèle mathématique. Elle prépare la formulation de la matrice de transition et l'analyse dynamique par les puissances $P^2$, $P^3$, $P^4$ et $P^5$.

## 2.5 Formulation probabiliste des transitions urbaines

Après le codage des fonctions urbaines en états markoviens, chaque transformation possible entre deux fonctions spatiales peut être représentée par une probabilité conditionnelle. Ainsi, si une portion de l'espace urbain se trouve dans l'état $i$ à l'instant $n$, la probabilité qu'elle passe à l'état $j$ à l'étape suivante est donnée par :

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i), \qquad i, j \in E.$$

Dans cette formulation, $p_{ij}$ ne représente pas une valeur certaine, mais une tendance probabiliste de transformation. Par exemple, une zone non bâtie peut rester non bâtie, ou bien évoluer vers une zone résidentielle, commerciale, industrielle ou vers un espace vert ou ouvert. Cette logique permet de traduire les transformations urbaines sous forme mathématique, tout en conservant le caractère incertain de l'évolution spatiale.

On peut également associer à chaque transition élémentaire une variable de Bernoulli. Pour une transition donnée de l'état $i$ vers l'état $j$, on définit la variable :

$$B_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si la transition de } i \text{ vers } j \text{ se réalise,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette variable vérifie alors :

$$\mathbb{P}(B_{ij} = 1) = p_{ij}, \qquad \mathbb{P}(B_{ij} = 0) = 1 - p_{ij}.$$

Ainsi, la loi de Bernoulli permet de représenter mathématiquement l'existence ou non d'une transition urbaine élémentaire. L'ensemble de ces transitions élémentaires est ensuite regroupé dans une matrice de transition $P$, conformément au formalisme des chaînes de Markov (Voir [1, 2, 13]).

## 2.6 Construction de la matrice de transition

À partir de la carte d'occupation du sol et du codage des fonctions urbaines en états markoviens, on construit une matrice de transition permettant de représenter les passages possibles entre les différentes fonctions spatiales du quartier 300 logements d'El Alia.

L'ordre des états adopté dans la matrice est le suivant :

$$E = \{R, C, I, N, V\},$$

avec :

$R$ : résidentiel, $C$ : commercial, $I$ : industriel ou artisanal, $N$ : non bâti, $V$ : espace vert ou ouvert.

La matrice proposée est une matrice théorique et illustrative. Elle ne constitue pas une mesure empirique exhaustive issue d'une enquête de terrain, mais un outil de modélisation construit à partir de la lecture cartographique de la zone d'étude et de l'interprétation des fonctions urbaines observées. Son objectif est de montrer com-

ment les transformations spatiales peuvent être organisées dans un cadre markovien afin d'analyser l'évolution possible du quartier (Voir [1, 2, 13]).

On propose la matrice de transition suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 0.62 & 0.15 & 0.08 & 0.05 & 0.10 \\ 0.10 & 0.65 & 0.10 & 0.05 & 0.10 \\ 0.08 & 0.18 & 0.58 & 0.08 & 0.08 \\ 0.22 & 0.25 & 0.18 & 0.25 & 0.10 \\ 0.10 & 0.08 & 0.05 & 0.12 & 0.65 \end{pmatrix}.$$

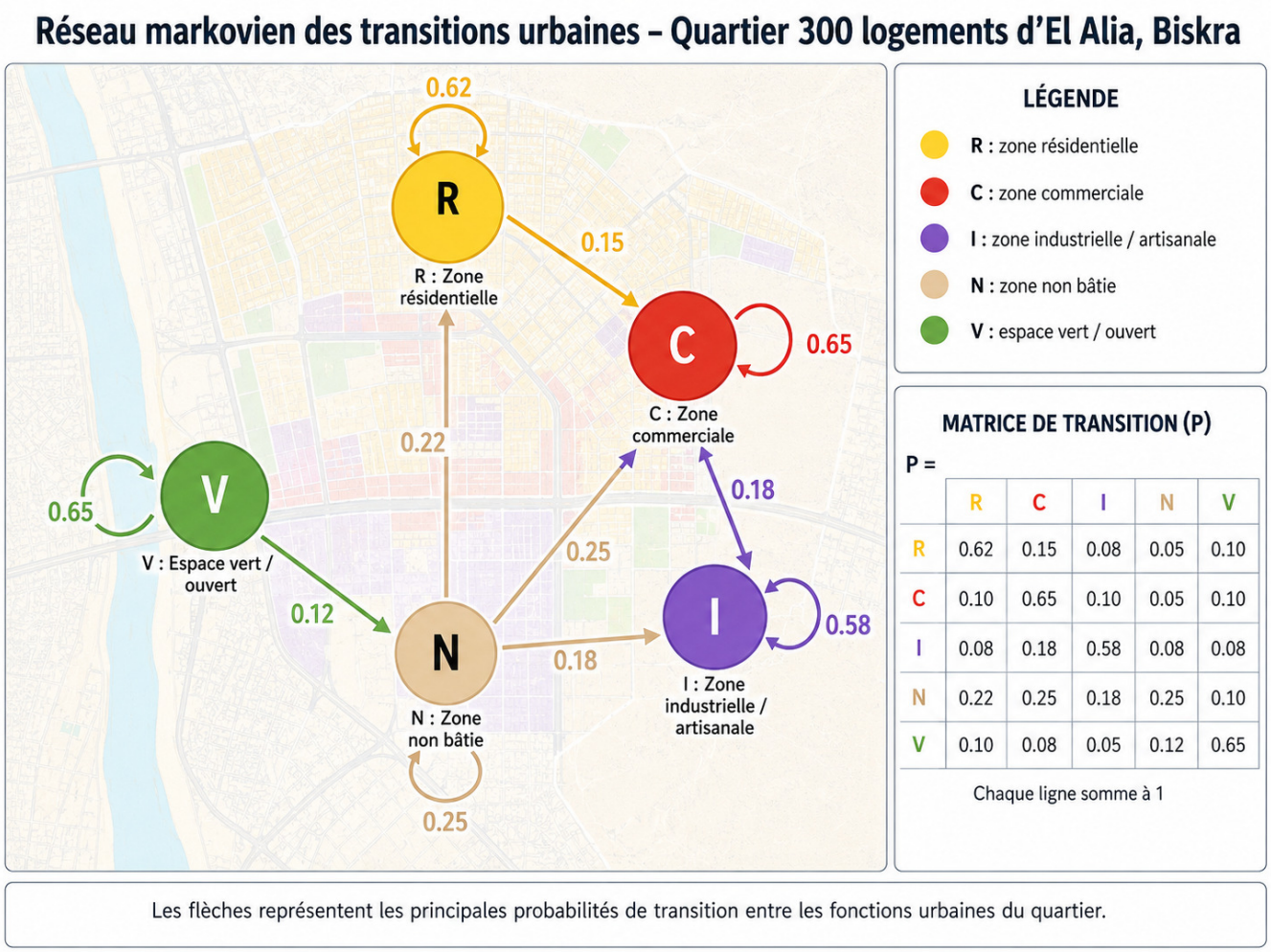


FIGURE 2.9 – Réseau markovien des transitions urbaines du quartier 300 logements d'El Alia – Biskra.

La figure 2.9 représente les principales transitions probabilistes entre les fonctions urbaines du quartier. Les boucles indiquent les probabilités de conservation d'une même fonction urbaine, tandis que les flèches entre deux états indiquent les possibilités de transformation spatiale. Cette représentation permet de rendre la matrice

de transition $P$ plus lisible et de relier les coefficients mathématiques à une interprétation urbaine concrète.

Dans cette matrice, les lignes représentent les fonctions urbaines actuelles et les colonnes représentent les fonctions urbaines possibles à l'étape suivante. Par exemple, le coefficient

$$p_{12} = 0.15$$

représente la probabilité théorique qu'une zone résidentielle évolue vers une zone commerciale après une étape.

De même, le coefficient

$$p_{42} = 0.25$$

représente la probabilité théorique qu'une zone non bâtie évolue vers une zone commerciale après une étape.

Le coefficient

$$p_{44} = 0.25$$

représente la probabilité qu'une zone non bâtie conserve le même état après une étape.

Les coefficients diagonaux

$$p_{11},\ p_{22},\ p_{33},\ p_{44},\ p_{55}$$

traduisent les probabilités de stabilité des différentes fonctions urbaines. Les coefficients non diagonaux traduisent les probabilités de transformation d'une fonction urbaine vers une autre.

## 2.7 Vérification de la cohérence mathématique de la matrice

Pour que $P$ soit une matrice de transition markovienne, deux conditions doivent être vérifiées. D'abord, tous les coefficients doivent être positifs ou nuls :

$$p_{ij} \geq 0, \qquad i, j \in E.$$

Ensuite, la somme des coefficients de chaque ligne doit être égale à 1. Pour la première ligne, on a :

$$0.62 + 0.15 + 0.08 + 0.05 + 0.10 = 1.$$

Pour la deuxième ligne :

$$0.10 + 0.65 + 0.10 + 0.05 + 0.10 = 1.$$

Pour la troisième ligne :

$$0.08 + 0.18 + 0.58 + 0.08 + 0.08 = 1.$$

Pour la quatrième ligne :

$$0.22 + 0.25 + 0.18 + 0.25 + 0.10 = 1.$$

Pour la cinquième ligne :

$$0.10 + 0.08 + 0.05 + 0.12 + 0.65 = 1.$$

Ainsi, chaque ligne de la matrice $P$ forme une loi de probabilité. La matrice $P$ est donc une matrice stochastique par lignes. Elle peut être utilisée pour étudier l'évolution du système urbain par les puissances successives $P^2$, $P^3$, $P^4$ et $P^5$ (Voir [1, 13]).

## 2.8 Analyse dynamique par puissances de la matrice

L'évolution du système urbain après plusieurs étapes est obtenue en calculant les puissances successives de la matrice de transition. Si $\mu_0$ désigne la distribution initiale des fonctions urbaines, alors la distribution après $n$ étapes est donnée par :

$$\mu_n = \mu_0 P^n.$$

Cette relation permet d'étudier les transformations possibles du quartier sur plusieurs périodes. Les puissances de la matrice donnent une lecture progressive de la dynamique urbaine.

La matrice au carré est :

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.4268 & 0.2254 & 0.1250 & 0.0694 & 0.1534 \\ 0.1560 & 0.4760 & 0.1450 & 0.0700 & 0.1530 \\ 0.1396 & 0.2598 & 0.3792 & 0.0890 & 0.1324 \\ 0.2408 & 0.2984 & 0.1970 & 0.1124 & 0.1514 \\ 0.1654 & 0.1580 & 0.0991 & 0.1210 & 0.4565 \end{pmatrix}.$$

La matrice à la troisième puissance est :

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0.3278 & 0.2627 & 0.1493 & 0.0784 & 0.1819 \\ 0.1866 & 0.3886 & 0.1644 & 0.0791 & 0.1813 \\ 0.1757 & 0.2909 & 0.2797 & 0.0884 & 0.1652 \\ 0.2348 & 0.3058 & 0.1912 & 0.0890 & 0.1793 \\ 0.1985 & 0.2121 & 0.1311 & 0.1091 & 0.3491 \end{pmatrix}.$$

La matrice à la quatrième puissance est :

$$P^4 = \begin{pmatrix} 0.2769 & 0.2809 & 0.1623 & 0.0829 & 0.1970 \\ 0.2032 & 0.3445 & 0.1725 & 0.0834 & 0.1964 \\ 0.1964 & 0.3011 & 0.2296 & 0.0876 & 0.1853 \\ 0.2289 & 0.3050 & 0.1852 & 0.0861 & 0.1948 \\ 0.2137 & 0.2465 & 0.1502 & 0.1002 & 0.2894 \end{pmatrix}.$$

La matrice à la cinquième puissance est :

$$P^5 = \begin{pmatrix} 0.2507 & 0.2898 & 0.1691 & 0.0852 & 0.2051 \\ 0.2122 & 0.3220 & 0.1756 & 0.0856 & 0.2046 \\ 0.2080 & 0.3032 & 0.2040 & 0.0874 & 0.1973 \\ 0.2257 & 0.3030 & 0.1815 & 0.0864 & 0.2034 \\ 0.2202 & 0.2675 & 0.1614 & 0.0948 & 0.2562 \end{pmatrix}.$$

On remarque que les lignes des matrices $P^4$ et $P^5$ deviennent progressivement plus proches les unes des autres. Cela indique que l'influence de l'état initial commence à diminuer et que le système tend vers une organisation plus stable. Cette observation correspond au comportement asymptotique étudié dans le chapitre théorique.

Dans le contexte urbain, cette évolution signifie que les différentes fonctions spatiales du quartier peuvent tendre vers une structure relativement équilibrée à long terme. Les zones résidentielles et commerciales gardent une importance importante, tandis que les espaces industriels, non bâtis et ouverts continuent d'intervenir dans la dynamique de transformation du quartier.

Cette analyse ne doit pas être comprise comme une prédiction certaine de l'avenir urbain. Elle constitue une simulation probabiliste théorique permettant d'observer des tendances possibles et d'aider à la décision dans la planification urbaine (Voir [5, 13]).

## 2.9 Interprétation urbanistique des résultats

L'analyse des puissances de la matrice de transition permet de donner une interprétation urbanistique des transformations possibles du quartier 300 logements d'El Alia. Les coefficients situés sur la diagonale principale de la matrice initiale traduisent la probabilité de conservation de chaque fonction urbaine.

On observe que les états résidentiel, commercial et espace vert ou ouvert présentent des probabilités de stabilité relativement élevées :

$$p_{11} = 0.62, \qquad p_{22} = 0.65, \qquad p_{55} = 0.65.$$

Ces valeurs indiquent que les zones résidentielles, commerciales et les espaces verts ou ouverts ont tendance à conserver leur fonction au cours d'une étape. Cette stabilité peut s'expliquer par leur rôle structurant dans l'organisation urbaine du quartier.

En revanche, l'état non bâti présente une probabilité de stabilité plus faible :

$$p_{44} = 0.25.$$

Cela signifie que les espaces non bâtis sont plus susceptibles de connaître des transformations vers d'autres fonctions urbaines. Dans la matrice proposée, ces transformations peuvent se faire principalement vers le résidentiel, le commercial ou l'industriel/artisanal :

$$p_{41} = 0.22, \qquad p_{42} = 0.25, \qquad p_{43} = 0.18.$$

Cette lecture montre que les terrains non bâtis constituent des espaces stratégiques dans la dynamique de transformation urbaine. Ils peuvent représenter des réserves foncières pour l'extension résidentielle, le développement commercial ou l'implantation de certaines activités artisanales.

L'étude des matrices $P^2$, $P^3$, $P^4$ et $P^5$ montre également que les probabilités se redistribuent progressivement entre les différentes fonctions urbaines. Cette évolution traduit une tendance vers une organisation plus régulière du système, où l'influence de l'état initial devient moins dominante au fil des étapes.

Dans une perspective de planification, ces résultats peuvent aider à repérer les fonctions urbaines les plus stables, les zones les plus susceptibles de transformation et les transitions qui méritent une attention particulière. Le modèle markovien devient ainsi un outil d'analyse et d'aide à la décision, notamment pour anticiper les transformations possibles du quartier et orienter les choix d'aménagement (Voir [5, 13]).

## 2.10 Interprétation urbanistique des résultats et aide à la décision

**.** *Dans cette section, l'interprétation urbanistique désigne la lecture des résultats markoviens dans le but de comprendre les tendances possibles de stabilité, de transformation et de réorganisation des fonctions urbaines du quartier étudié.*

L'analyse des puissances de la matrice de transition permet de donner une interprétation urbanistique des transformations possibles du quartier 300 logements d'El Alia. La matrice initiale $P$ décrit les transitions possibles après une seule étape, tandis que les matrices $P^2$, $P^3$, $P^4$ et $P^5$ décrivent l'évolution du système après plusieurs étapes successives.

Dans la matrice initiale $P$, les coefficients situés sur la diagonale principale traduisent les probabilités de conservation de chaque fonction urbaine après une étape. On observe que les états résidentiel, commercial et espace vert ou ouvert présentent des probabilités de stabilité relativement élevées :

$$p_{11} = 0.62, \qquad p_{22} = 0.65, \qquad p_{55} = 0.65.$$

Ces valeurs indiquent qu'après une seule étape, les zones résidentielles, commerciales et les espaces verts ou ouverts ont une tendance importante à conserver leur fonction initiale. Cette stabilité peut s'expliquer par leur rôle structurant dans l'organisation urbaine du quartier.

En revanche, l'état non bâti présente une probabilité de stabilité plus faible :

$$p_{44} = 0.25.$$

Cela signifie que les espaces non bâtis sont plus susceptibles de connaître une transformation vers d'autres fonctions urbaines. Dans la matrice initiale, ces transformations peuvent se faire principalement vers le résidentiel, le commercial ou l'industriel/artisanal :

$$p_{41} = 0.22, \qquad p_{42} = 0.25, \qquad p_{43} = 0.18.$$

Cette lecture montre que les terrains non bâtis constituent des espaces stratégiques dans la dynamique de transformation urbaine. Ils peuvent représenter des réserves foncières pour l'extension résidentielle, le développement commercial ou l'implantation de certaines activités artisanales.

### 2.10.1 Lecture dynamique des puissances de la matrice

Lorsque l'on étudie les puissances successives de la matrice, les valeurs changent. Cela signifie que les probabilités après deux, trois, quatre ou cinq étapes ne sont pas identiques aux probabilités initiales. Par exemple, pour la stabilité des principales fonctions urbaines, on obtient :

| | $R$ | $C$ | $I$ | $N$ | $V$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.6200 | 0.6500 | 0.5800 | 0.2500 | 0.6500 |
| $P^2$ | 0.4268 | 0.4760 | 0.3792 | 0.1124 | 0.4565 |
| $P^3$ | 0.3278 | 0.3886 | 0.2797 | 0.0890 | 0.3491 |
| $P^4$ | 0.2769 | 0.3445 | 0.2296 | 0.0861 | 0.2894 |
| $P^5$ | 0.2507 | 0.3220 | 0.2040 | 0.0864 | 0.2562 |

Ce tableau montre que les probabilités de stabilité directe diminuent progressivement lorsque le nombre d'étapes augmente. Cette diminution ne signifie pas que les fonctions urbaines disparaissent, mais elle indique que le système devient plus mélangé : les effets des transitions successives redistribuent progressivement les probabilités entre les différents états.

On remarque également que, dans les matrices $P^4$ et $P^5$, les lignes deviennent progressivement plus proches les unes des autres. Cela montre que l'influence de l'état initial commence à diminuer et que le système tend vers une organisation plus régulière. Cette observation rejoint le comportement asymptotique étudié dans le chapitre théorique des chaînes de Markov [1, 13].

Dans le contexte urbain, cette évolution signifie que les différentes fonctions spatiales du quartier peuvent tendre vers une structure relativement équilibrée à long terme. Les zones résidentielles et commerciales gardent une importance notable, tandis que les espaces industriels, les espaces non bâtis et les espaces verts ou ouverts continuent d'intervenir dans la dynamique de transformation du quartier.

### 2.10.2 Schéma d'aide à la décision fondé sur le modèle markovien

Afin de rendre l'interprétation des résultats plus lisible, il est possible de traduire les principales valeurs de la matrice de transition sous forme d'un schéma d'aide à la décision. Ce schéma permet de distinguer les fonctions urbaines relativement stables, les fonctions nécessitant une surveillance particulière et les espaces pouvant jouer un rôle stratégique dans les transformations futures du quartier.




FIGURE 2.10 – Schéma d'aide à la décision fondé sur le modèle markovien – quartier 300 logements d'El Alia, Biskra

La figure 2.10 présente une lecture décisionnelle des résultats issus de la matrice de transition. Elle permet de distinguer les fonctions urbaines relativement stables, les fonctions nécessitant une surveillance particulière et les espaces stratégiques de transformation.

Les fonctions (R), (C) et (V) apparaissent comme relativement stables, car leurs coefficients diagonaux sont élevés. L'état (I), correspondant à la zone industrielle ou artisanale, doit être surveillé, car il présente une stabilité moyenne et participe à la dynamique de transformation. L'état (N), correspondant aux espaces non bâtis, représente un espace stratégique, car il possède plusieurs probabilités de transition vers d'autres fonctions urbaines.

***Remarque.*** *Le modèle présenté reste un modèle théorique. Il ne constitue pas une mesure empirique exhaustive de la réalité urbaine, mais une lecture probabiliste permettant d'organiser les tendances possibles et de soutenir l'aide à la décision.*

***Remarque.*** *Le modèle présenté reste un modèle théorique. Il ne constitue pas une mesure empirique exhaustive de la réalité urbaine, mais une lecture probabiliste permettant d'organiser les tendances possibles et de soutenir l'aide à la décision.*

***Remarque.*** *Le modèle présenté reste un modèle théorique. Il ne constitue pas une mesure empirique exhaustive de la réalité urbaine, mais une lecture probabiliste permettant d'organiser les tendances possibles et de soutenir l'aide à la décision.*

## 2.11 Interprétation des résultats

Les résultats obtenus à partir de la matrice de transition permettent de proposer une lecture probabiliste de l'évolution possible des fonctions urbaines dans le quartier 300 logements d'El Alia. Cette interprétation ne constitue pas une prédiction certaine de l'avenir urbain, mais une analyse théorique permettant d'identifier les tendances possibles de stabilité, de transformation et de réorganisation spatiale.

Dans ce modèle, les coefficients de la matrice $P$ traduisent les probabilités de passage d'une fonction urbaine vers une autre. Les coefficients diagonaux indiquent les probabilités de conservation de la même fonction, tandis que les coefficients non diagonaux indiquent les possibilités de transformation d'une fonction urbaine vers une autre.

Ainsi, les valeurs

$$p_{11} = 0.62, \qquad p_{22} = 0.65, \qquad p_{55} = 0.65$$

montrent que les zones résidentielles, les zones commerciales et les espaces verts ou ouverts présentent une stabilité relativement importante. Ces fonctions peuvent donc être considérées comme des composantes structurantes du quartier.

En revanche, la valeur

$$p_{44} = 0.25$$

montre que les espaces non bâtis présentent une stabilité plus faible. Cela signifie que ces espaces sont plus susceptibles de connaître une transformation vers d'autres fonctions urbaines. Les principales transitions associées à l'état non bâti sont :

$$p_{41} = 0.22, \qquad p_{42} = 0.25, \qquad p_{43} = 0.18, \qquad p_{45} = 0.10.$$

Ces valeurs indiquent que les espaces non bâtis peuvent évoluer vers des zones résidentielles, commerciales,

industrielles ou artisanales, ou vers des espaces verts ou ouverts. Dans une perspective urbanistique, ils représentent donc des espaces stratégiques pour l'aménagement futur du quartier.

L'état industriel ou artisanal présente une stabilité moyenne :

$$p_{33} = 0.58.$$

Cette valeur montre que cette fonction n'est pas instable, mais qu'elle nécessite une attention particulière, car elle participe à la dynamique de transformation du quartier sans constituer la fonction la plus stable du système.

### 2.11.1 Rôle des chaînes de Markov dans la planification urbaine

Les chaînes de Markov peuvent jouer un rôle important dans la planification urbaine, car elles permettent de représenter l'évolution possible d'un système urbain à travers un ensemble d'états et de probabilités de transition. Dans le contexte des nouvelles villes, elles offrent un cadre mathématique utile pour analyser les transformations spatiales, comparer plusieurs scénarios d'aménagement et accompagner la prise de décision [5, 12, 13].

Dans une approche markovienne, chaque fonction urbaine peut être considérée comme un état du système :

$$E = \{R, C, I, N, V\},$$

où $R$ représente la zone résidentielle, $C$ la zone commerciale, $I$ la zone industrielle ou artisanale, $N$ la zone non bâtie et $V$ l'espace vert ou ouvert.

Les probabilités de transition permettent alors d'étudier, de manière théorique, les possibilités de conservation ou de transformation de ces fonctions au cours du temps. Cette approche permet notamment d'identifier les fonctions urbaines relativement stables, les espaces susceptibles de connaître une transformation plus rapide et les transitions qui méritent une attention particulière.

Dans le cas du quartier 300 logements d'El Alia, l'analyse markovienne montre que les fonctions $R$, $C$ et $V$ présentent une stabilité relativement importante, tandis que l'état $N$ constitue un espace stratégique de transformation. L'état $I$, quant à lui, peut être considéré comme une fonction à surveiller dans la dynamique urbaine du quartier.

Cette lecture peut contribuer à plusieurs objectifs de planification :

analyse, simulation, comparaison, aide à la décision.

Cependant, le rôle du modèle markovien reste complémentaire. Il ne remplace pas l'expertise urbanistique, les données de terrain ou les décisions institutionnelles. Il constitue plutôt un outil probabiliste d'appui permettant d'organiser l'analyse, de rendre les scénarios plus lisibles et de soutenir une planification urbaine plus rationnelle [5].

### 2.11.2 Tableau récapitulatif des transitions urbaines

Le tableau suivant présente une synthèse de quelques transitions issues de la matrice de transition proposée. Ces transitions ne représentent pas des données empiriques mesurées sur le terrain, mais un cadre théorique simplifié permettant de comprendre le principe du passage probabiliste entre différentes fonctions urbaines [1, 2, 13].

TABLE 2.1 – Transitions probabilistes entre les différentes fonctions urbaines

| **État initial** | **État final** | **Probabilité** | **Interprétation urbanistique** |
|---|---|---|---|
| *R* Résidentiel | *R* Résidentiel | 0.62 | Conservation relativement forte de la fonction résidentielle. |
| *C* Commercial | *C* Commercial | 0.65 | Stabilité importante des activités commerciales. |
| *V* Espace vert ou ouvert | *V* Espace vert ou ouvert | 0.65 | Maintien probable des espaces verts ou ouverts. |
| *N* Non bâti | *C* Commercial | 0.25 | Possibilité importante de transformation vers une fonction commerciale. |
| *N* Non bâti | *R* Résidentiel | 0.22 | Possibilité d'extension résidentielle à partir des espaces non bâtis. |
| *N* Non bâti | *I* Industriel ou artisanal | 0.18 | Possibilité d'implantation d'activités industrielles ou artisanales. |
| *V* Espace vert ou ouvert | *N* Non bâti | 0.12 | Possibilité limitée de transformation ou de réaffectation d'un espace ouvert. |
| *R* Résidentiel | *C* Commercial | 0.15 | Possibilité de développement d'activités commerciales à partir d'une zone résidentielle. |

Ce tableau met en évidence les transitions les plus utiles pour l'interprétation urbanistique du modèle. Il montre notamment que les espaces non bâtis peuvent évoluer vers plusieurs fonctions urbaines, ce qui traduit leur rôle important dans les scénarios d'expansion et de transformation spatiale.

Ainsi, le tableau permet de rendre la matrice de transition plus lisible et de relier les coefficients probabilistes à une interprétation concrète dans le cadre de la planification des nouvelles villes [5].

### 2.11.3 Synthèse de l'aide à la décision

À partir de l'analyse précédente, il est possible de résumer les résultats du modèle markovien en trois catégories principales :

Fonctions relativement stables : $R,\ C,\ V$,

Fonction à surveiller : $I$,

Espace stratégique de transformation : $N$.

Les fonctions $R$, $C$ et $V$ apparaissent comme relativement stables, car leurs coefficients diagonaux sont élevés. La fonction $I$ doit être surveillée, car elle participe à la dynamique de transformation du quartier. L'état $N$, correspondant aux espaces non bâtis, représente un espace stratégique, car il possède plusieurs probabilités de transition vers d'autres fonctions urbaines.

***Remarque.*** *Cette synthèse reste théorique et illustrative. Elle ne constitue pas une mesure empirique exhaustive de la réalité urbaine, mais une lecture probabiliste permettant d'organiser les tendances possibles et de soutenir l'aide à la décision.*

## 2.12 Perspectives d'application et recommandations

Les chaînes de Markov offrent plusieurs perspectives d'application dans le domaine de la planification urbaine, en particulier pour l'étude des nouvelles villes. Elles peuvent être utilisées comme outils de modélisation théorique afin d'analyser l'évolution possible des fonctions urbaines, de comparer différents scénarios d'aménagement et d'accompagner la prise de décision [5, 12, 13].

Dans une perspective pratique, cette approche peut être enrichie par l'utilisation de données spatiales, démographiques et environnementales. Ces données permettraient d'estimer de manière plus précise les probabilités de transition entre les différents états urbains, au lieu de les proposer uniquement à titre illustratif.

Les perspectives d'application peuvent concerner notamment :

- la simulation de scénarios d'expansion urbaine ;
- l'analyse des transformations des espaces non urbanisés ;
- l'étude de la stabilité des fonctions résidentielles, commerciales et industrielles ;
- l'aide à la localisation des équipements urbains ;
- la comparaison de plusieurs stratégies de planification.

L'intégration future des modèles markoviens avec les outils numériques, les systèmes d'information géographique et les méthodes d'analyse spatiale pourrait renforcer leur utilité dans la planification des villes intelligentes et durables. Toutefois, ces perspectives nécessitent des données fiables et une collaboration entre mathématiciens, urbanistes, géographes et décideurs publics.

Ainsi, les chaînes de Markov peuvent constituer une base mathématique intéressante pour développer des outils d'aide à la décision adaptés à la construction et à l'organisation des nouvelles villes [5]. Malgré l'efficacité des chaînes de Markov dans la modélisation des systèmes urbains, certaines limites doivent être prises en considération.

Le modèle markovien repose principalement sur l'hypothèse de Markov selon laquelle l'état futur dépend uniquement de l'état présent.

Or, les systèmes urbains réels sont influencés par plusieurs facteurs complexes tels que :

- les facteurs économiques ;
- les politiques urbaines ;
- les contraintes environnementales ;
- les changements démographiques ;
- les comportements sociaux.

Par conséquent, certaines dynamiques urbaines ne peuvent pas être représentées de manière totalement précise par un modèle markovien simple.

De plus, la qualité des résultats dépend fortement de la disponibilité et de la précision des données utilisées pour construire les matrices de transition.

Malgré ces limites, les chaînes de Markov demeurent des outils efficaces pour l'analyse probabiliste des phénomènes urbains complexes.

Dans une perspective de recommandation, il est nécessaire de considérer le modèle markovien comme un outil complémentaire d'aide à la décision. Son utilisation doit être accompagnée par des données cartographiques fiables, des observations de terrain et une analyse urbanistique approfondie. Il est également recommandé d'actualiser les probabilités de transition lorsque de nouvelles données spatiales ou démographiques deviennent disponibles.

Ainsi, l'approche markovienne peut aider les décideurs à identifier les espaces relativement stables, les zones susceptibles de transformation et les fonctions urbaines nécessitant une attention particulière. Toutefois, elle ne doit pas être utilisée comme un outil de prédiction certaine, mais comme une lecture probabiliste permettant d'organiser les tendances possibles et de soutenir les choix d'aménagement (Voir [5, 12, 13]).

# Conclusion

**Dans ce chapitre,** nous avons étudié les principales applications des chaînes de Markov dans les domaines de l'architecture, de l'urbanisme et de la planification des nouvelles villes. L'objectif était de montrer comment les outils probabilistes présentés dans le chapitre précédent peuvent être utilisés pour représenter les transitions entre différentes fonctions urbaines et analyser leur évolution possible au cours du temps [1, 2, 13]..

L'exemple illustratif du quartier 300 logements d'El Alia, à Biskra, a permis de construire un cadre simplifié de modélisation markovienne fondé sur un espace d'états composé de zones résidentielles, commerciales, industrielles ou artisanales, non bâties et d'espaces verts ou ouverts. À travers la matrice de transition proposée, il a été possible d'interpréter certaines tendances théoriques, notamment la stabilité relative de certaines fonctions urbaines et la transformation possible des espaces non bâtis.

Nous avons également montré que l'étude des puissances successives de la matrice de transition permet d'analyser l'évolution du système après plusieurs étapes. Cette approche peut servir à comparer différents scénarios d'aménagement, à visualiser les trajectoires possibles d'évolution fonctionnelle et spatiale, et à fournir un outil d'aide à la décision pour la planification urbaine (Voir [5, 12, 13]).

Toutefois, le modèle proposé reste théorique et illustratif. Il ne remplace pas les données de terrain ni l'expertise des urbanistes, mais il constitue un cadre mathématique utile pour organiser l'analyse, formaliser les transitions urbaines et soutenir la réflexion sur la construction et l'organisation des nouvelles villes. Ainsi, les chaînes de Markov apparaissent comme un outil probabiliste pertinent pour relier la modélisation mathématique aux problématiques concrètes de l'urbanisme moderne (Voir [5]).

**Synthèse méthodologique.** Les résultats présentés dans cette partie doivent être compris comme une lecture probabiliste théorique fondée sur la matrice de transition proposée. Les valeurs utilisées ne constituent pas une mesure empirique exhaustive du quartier, mais elles permettent de montrer comment les chaînes de Markov peuvent organiser l'analyse des stabilités, des transformations possibles et des espaces nécessitant une attention particulière. Dans ce sens, le modèle markovien constitue un outil d'aide à la décision destiné à accompagner la réflexion urbanistique, sans remplacer les données de terrain, l'expertise des urbanistes ou les choix institutionnels de planification [5, 13].

# Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'apport de la modélisation mathématique et des probabilités dans l'analyse des dynamiques urbaines liées à la construction des nouvelles villes. L'objectif principal était de montrer comment les chaînes de Markov peuvent constituer un cadre théorique utile pour représenter les transitions possibles entre différentes fonctions spatiales et accompagner la réflexion en matière de planification urbaine (Voir [1, 5, 13]).

Le premier chapitre a permis de présenter les fondements théoriques nécessaires à la compréhension des chaînes de Markov. Nous avons rappelé les notions de processus stochastique, de propriété de Markov, de matrice de transition, de probabilités à plusieurs étapes, ainsi que les concepts de communication entre états, d'irréductibilité, de périodicité, de récurrence, de distribution stationnaire et de comportement asymptotique. Ces notions constituent la base mathématique sur laquelle repose l'application proposée dans le chapitre suivant (Voir [1, 2, 13]).

Le deuxième chapitre a été consacré à l'application des chaînes de Markov dans les domaines de l'architecture, de l'urbanisme et de la planification des nouvelles villes. À travers un exemple illustratif relatif au quartier 300 logements d'El Alia, à Biskra, nous avons proposé une représentation simplifiée des transitions entre différentes fonctions urbaines, notamment les zones résidentielles, commerciales, industrielles ou artisanales, non bâties et les espaces verts ou ouverts. Cette application a permis de montrer comment une matrice de transition peut être utilisée pour interpréter des tendances théoriques d'évolution spatiale et comparer différents scénarios possibles.

Il convient toutefois de souligner que le modèle présenté reste théorique et illustratif. Les probabilités utilisées ne constituent pas des données empiriques issues d'une enquête de terrain exhaustive, mais servent à expliquer le fonctionnement du modèle markovien dans un cadre urbain simplifié. Ainsi, les résultats obtenus ne doivent pas être considérés comme des prévisions certaines de l'avenir urbain, mais comme un outil d'aide à l'analyse, à la comparaison et à la décision.

En définitive, les chaînes de Markov apparaissent comme un outil probabiliste pertinent pour relier la modélisation mathématique aux problématiques concrètes de l'urbanisme moderne. Elles permettent d'organiser l'analyse des transitions spatiales, de visualiser les évolutions possibles et de soutenir la prise de décision dans la planification des nouvelles villes. Des travaux futurs pourraient enrichir cette approche par l'intégration de

données spatiales, démographiques et environnementales plus précises, de systèmes d'information géographique et de méthodes de simulation plus avancées (Voir [5, 12, 13]).

# Bibliographie


[1] Norris, J. R. (1997). *Markov Chains*. Cambridge University Press.

[2] Brémaud, P. (1999). *Markov Chains : Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation, and Queues*. Springer.

[3] Ross, S. M. (2014). *Introduction to Probability Models*. Academic Press.

[4] Grimmett, G., & Stirzaker, D. (2001). *Probability and Random Processes*. Oxford University Press.

[5] Batty, M. (2013). *The New Science of Cities*. MIT Press.

[6] Barceló, J. (2010). *Fundamentals of Traffic Simulation*. Springer.

[7] Taylor, H. M., & Karlin, S. (1998). *An Introduction to Stochastic Modeling*. Academic Press.

[8] Chung, K. L. (1967). *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities*. Springer.

[9] Allen, L. J. S. (2011). *An Introduction to Stochastic Processes with Applications to Biology*. CRC Press.

[10] Yates, P. M., & Goodman, J. (2014). *Probability and Stochastic Processes*. Wiley.

[11] Vaisman, A., & Shoval, N. (2020). Urban mobility and probabilistic models in smart cities. *Sustainable Cities and Society*, 52, 101847.

[12] Li, X., & Yeh, A. G. O. (2002). Neural-network-based cellular automata for simulating multiple land use changes using GIS. *International Journal of Geographical Information Science*, 16(4), 323–343.

[13] Sghir, A. (2022). Introduction aux Processus Stochastiques : Chaînes de Markov et Martingales à Temps Discret. Notes de cours, Faculté des Sciences d'Oujda, Université Mohammed Premier.